А. А. Бейлинсон, Ю. И. Манин, Значения дзета-функции Сельберга в целых точках, *Функц. анализ и его прил.*, 1987, том 21, выпуск 1, 68–69

Функциональный анализ и его приложения,
1987, т. 21, вып. 1, 68—69

УДК 517.7

ЗНАЧЕНИЯ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ СЕЛЬБЕРГА В ЦЕЛЫХ ТОЧКАХ

А. А. Бейлинсон, Ю. И. Манин

1. Обозначения. Пусть X — компактная риманова поверхность (т. е. комплексная кривая) рода $g \geqslant 2$, H — верхняя полуплоскость, $X = \Gamma \setminus H$ — униформизация X. Дзета-функция Сельберга определяется формулой $Z(X, s) = \prod\limits_{\gamma} \prod\limits_{n=0}^{\infty} (1 - e^{-(n+s)l(\gamma)})$, где γ пробегает примитивные классы сопряженных элементов в $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$, а $l(\gamma)$ — длина замкнутой геодезической в классе γ относительно метрики постоянной кривизны -1. Цель этой заметки — формула, выражающая значения $Z(X, n)$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \geqslant 2$, в терминах $Z'(X, 1)$ и голоморфных инвариантов кривой X. Эти инварианты суть детерминанты метрики Петерссона — Вейля в специальных базисах $(\varphi_a^{(n)})$ голоморфных дифференциалов веса n, которые мы называем отмеченными. Чтобы определить их, выберем тэта-характеристику $\Omega^{1/2}$ на X с условием $h^0(\Omega^{1/2}) = h^1(\Omega^{1/2}) = 1$. Фиксируем симплектический базис (a_i, b_j) в $H_1(X, \mathbf{Z})$. Базис Римана в $H^0(X, \Omega^1)$ определяется условием $\int\limits_{a_j} \omega_i = \delta_{ij}$. Пусть $\int\limits_{b_j} \omega_i = \tau_{ij}$. Обозначим через $\theta[\alpha](z, \tau)$ тэта-функцию Римана с характеристикой, отвечающей $\Omega^{1/2}$. Определим отмеченные базисы индукцией по n. При $n = 1$ положим $\varphi_0^{(1)} = \sum\limits_{j=1}^{g} \dfrac{\partial\theta[\alpha]}{\partial z_j}(0, \tau)\omega_j$. Пусть $\operatorname{div} \varphi_0^{(1)} = 2\sum\limits_{j=1}^{g-1} P_j$ с попарно разными P_j. Выберем локальный параметр t_j в точке P_j так, что $\varphi_0^{(1)} = t_j^2 dt_j = \varphi_0^{(1/2)2}$, и определим $\varphi_j^{(1)}$, $j = 1, \ldots, g-1$ условиями лагранжева типа $\varphi_j^{(1)} = (\delta_{jk} + a_{jk}t_k)\, dt_k + O(t_k^3 dt_k)$ вблизи P_k. При $n = 2$ положим

$$(\varphi_1^{(2)}, \ldots, \varphi_{3g-3}^{(2)}) = (\varphi_0^{(1)2};\ \varphi_0^{(1)}\varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_0^{(1)}\varphi_{g-1}^{(1)};$$
$$\varphi_1^{(1)2}, \ldots, \varphi_{g-1}^{(1)2};\ a_{g-1,1}^{-1}\varphi_1^{(1)}\varphi_g^{(1)}, \ldots, a_{g-1,g-2}^{-1}\varphi_{g-2}^{(1)}\varphi_{g-1}^{(1)}),$$

так что $\varphi_{2g-1+j}^{(2)} = \delta_{jk}t_k (dt_k)^2 + O(t_k^2 dt_k^2)$ вблизи P_k; $j, k = 1, \ldots, g-2$. Далее индукция по полуцелым весам: $(\varphi_a^{(n+1/2)}) = (\varphi_b^{(n+1/2)};\ \varphi_0^{(1/2)}\varphi_c^{(n)})$, где $\varphi_b^{(n+1/2)} = \delta_{bk}(dt_k)^{n+1/2} + O(t_k dt_k^{n+1/2})$ вблизи P_k; $b, k = 1, \ldots, g-1$.

2. Теорема. *Справедлива формула*

$$Z(X, n) = b_{g,n} Z'(X, 1)^{6n^2-6n+1} \frac{\det\left(\int\limits_X \varphi_a^{(n)}\bar{\varphi}_b^{(n)} v^{1-n}\right)}{\left[\det\left(\int\limits_X \varphi_a^{(1)}\bar{\varphi}_b^{(1)}\right)\right]^{6n^2-6n+1}}, \qquad (1)$$

где $b_{g,n}$ — константа, зависящая от g, n, но не X; v — элемент объема метрики постоянной кривизны -1.

Доказательство. Пусть $\pi\colon \mathscr{X} \to M_g$ — универсальное расслоение на кривые рода g над пространством модулей. Положим $\lambda_{g,n} = \det R\pi_*(\Omega^{\otimes n}\mathscr{X}/M_g)$. По теореме Мамфорда [1], имеется каноническое сечение $\mu_{g,n} \in \Gamma(\lambda_n \lambda_1^{-6n^2+6n-1})$, определенное однозначно с точностью до умножения на константу условием необращения в нуль (и поведением на бесконечности при $g = 2$). Пусть Δ_n — оператор Лапласа $\bar{\partial}^+\bar{\partial}$, действующий на формах типа $(n, 0)$ вдоль слоев π. Как установили Белавин и Книжник [2],

$$\frac{\det' \Delta_n}{(\det' \Delta_1)^{6n^2-6n+1}} = a_{g,n} \cdot \frac{\| \mu_{g,n} \|}{\| \mu_{g,1} \|^{6n^2-6n+1}}, \qquad (2)$$

где $\| \ \|$ — метрика на λ_n, индуцированная метрикой Петерссона — Вейля на $\pi_*(\Omega^{\otimes n}\mathscr{X}/M_g)$ (это следует также из более общего результата Бисмута и Фрида [3]). Наконец, из формулы следа Сельберга выводится, что (см. [4; 6])

$$\det{}' \Delta_1 = Z'(X, 1)\, e^{c_0(2g-2)},$$
$$\det{}' \Delta_n = Z(X, n)\, e^{c_{n-1}(2g-2)}, \quad n \geqslant 2, \tag{3}$$
$$c_n = \sum_{0 \leqslant m < n - \frac{1}{2}} (2n - 2m - 1) \log (2n - m) - (n + 1/2)^2 + 2\zeta'(-1).$$

Поэтому для вывода (1) из (2) и (3) остается установить, что $\mu_{g,n} = \bigwedge\limits_{a=1}^{(g-1)(2n-1)} \varphi_a^{(n)}$ с точностью до константы. Подробности этого вывода будут содержаться в [7] — публикации авторов, посвященной теории квантовых струн; эта заметка — результат сравнения двух методов вычисления струнной статистической суммы.

3. Замечания и дополнения. а) Теорему 1 можно распространить на случай дзета-функции Сельберга с характером. В правой части формулы появятся детерминанты базисов дифференциалов с коэффициентами в голоморфном расслоении.

б) Интересно было бы получить формулы такого типа для групп Г с некомпактным фактором, например, SL (2, Z) и ее подгрупп. Для дзета-функций Сельберга с группами арифметического происхождения можно было бы ожидать существования p-адического аналога.

в) Формы Мамфорда $\mu_{g,n}$ могут быть канонически нормированы для всех g и n одновременно с помощью некоторого «условия факторизации», которое означает согласованность их асимптотического поведения при вырождении кривой.

Для вычисления константы $b_{g,n}$ в (1) нужно было бы знать асимптотическое поведение $\det{}' \Delta_n$ или $Z(X, n)$ и константу $d_{g,n}$ в формуле $\mu_{g,n} = d_{g,n} \cdot \bigwedge\limits_{a} \varphi_a^{(n)}$, где слева стоит нормированная форма Мамфорда.

Требуемый результат для дзета-функции Сельберга, описывающий ее поведение при стягивании геодезической на X, был недавно анонсирован Вольпертом [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mumford D.* // Ens. Math.— 1977. V. 23.— P. 39—100. **2.** *Белавин А. А., Книжник В. А.* Комплексная геометрия и теория квантовых струн. Препринт 7-86. Институт теор. физ. им. Л. Д. Ландау АН СССР. Черноголовка, 1986. **3.** *Bismut J.-M., Freed D. S.* The analysis of elliptic families. Preprint 85-T-41, Univ. Paris-Sud, 1985. **4.** *Ray D., Singer A. M.* // Ann. of Math.— 1973. V. 98.— P. 154—180. **5.** *Wolpert S. A.* Asymptotics of the Selberg zeta function for degenerating Riemann surfaces. Preprint TR 85-39, MD 85-SW. Maryland Univ., 1985. **6.** *D'Hoker E., Phong D. H.* On determinants of Laplacians on Riemann surfaces. Preprint CU-TP-334. Columbia Univ., 1985. **7.** *Beilinson A. A., Manin Ju. I.* // Conv. in Math. Phys.— 1986. V. 107, № 3.— P. 359—376.

Всесоюзный кардиологический
научный центр АМН СССР
Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило в редакцию
20 мая 1986 года