УДК 517.9 : 534.1 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

М.Р. ЛЕВИТИН

О СПЕКТРЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧКИ, ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

(Представлено академиком П.Я. Кочиной 12 VI 1986)

1.Рассматривается тонкая упругая оболочка с толщиной h и срединной поверхностью $\Gamma \in C^\infty$. Оболочка ограничивает конечный объем $G \subset R^3$, заполненный вязкой сжимаемой жидкостью. Состояние оболочки описывается вектором перемещений $\mathbf{U}(\alpha) = \mathrm{col}(U_1, U_2, U_3)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ – локальные координаты на Г. Состояние жидкости описывается вектором перемещений $\mathbf{Q}(x) = \mathrm{col}(Q_1, Q_2, Q_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ – декартовы координаты в G. Материал оболочки характеризуется плотностью ρ_0, модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν. Жидкость характеризуется плотностью $\rho_ж$, скоростью звука $c_ж$ и коэффициентом вязкости $\eta > 0$.

Исследуются линейные свободные колебания системы оболочка – вязкая сжимаемая жидкость. Соответствующая система уравнений имеет вид

(1) $\quad i\rho_ж \Omega \mathbf{W} = \eta \Delta \mathbf{W}, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{W} = 0, \quad x \in G,$

(2) $\quad -\Omega^2 \Psi = (c_ж^2 + 4\eta i\Omega/(3\rho_ж))\Delta\Psi, \quad x \in G,$

(3) $\quad Eh \cdot \mathcal{L}\mathbf{U} = \rho_0 h \Omega^2 \mathbf{U} - T[i\Omega(\mathbf{W} + \nabla\Psi)]_\Gamma \mathbf{n}, \quad \alpha \in \Gamma,$

(4) $\quad (\mathbf{W} + \nabla\Psi)|_\Gamma = \mathbf{U}, \quad \alpha \in \Gamma.$

В системе (1)–(4) Ω – собственная частота свободных колебаний; $\mathcal{L} = \| \mathcal{L}_{jk} \|_{j,k=1}^3$ – матричный дифференциальный самосопряженный оператор теории оболочек (см. [1]); $T[\mathbf{V}]_\Gamma$ – тензор напряжений жидкости на Г (см. [2]); $\mathbf{V} = i\Omega\mathbf{Q} = i\Omega(\mathbf{W} + \nabla\Psi)$ – скорость точки жидкости, в которой выделен трехмерный соленоидальный вектор $\mathbf{W}$ и потенциальный вектор $\nabla\Psi$; $\mathbf{n}$ – единичная нормаль к Г.

Поясним, что (1), (2) представляют собой линеаризованные уравнения малых колебаний вязкой сжимаемой жидкости с учетом уравнений неразрывности и состояния (см. [3]), (3) и (4) – условия динамического и кинематического равновесия на Г. Система (1)–(4) возникает после отделения в соответствующей линеаризованной динамической системе временно́го множителя $\exp(i\Omega t)$.

2. Собственные колебания оболочки, заполненной невязкой сжимаемой жидкостью, изучены в [4]. Соответствующая система уравнений имеет вид

(5) $\quad \Delta\psi + (\omega/c_ж)^2\psi = 0, \quad x \in G,$

(6) $\quad Eh\mathcal{L}\mathbf{u} = \rho_0 h\omega^2 \mathbf{u} - \rho_ж c_ж^2 (\Delta\psi)|_\Gamma \mathbf{n}, \quad \alpha \in \Gamma,$

(7) $\quad \partial\psi/\partial n|_\Gamma = u_3, \quad \alpha \in \Gamma,$

где ω – собственная частота, $\mathbf{u}(\alpha)$ – вектор перемещений срединной поверхности, $\psi(x)$ – потенциал перемещений жидкости. Будем далее, согласно [4], обозначать $f = \mathrm{col}(u_1, u_2, u_3, \psi)$. Уравнения (5), (6) можно записать в виде $Af = \lambda f$, где $A = \| A_{jk} \|_{j,k=1}^3$ – матричный дифференциальный оператор, $\lambda = \rho_0 h \omega^2$ – новый спектральный параметр.

В дальнейшем мы существенно используем следующие два утверждения из [4].

Т е о р е м а 1 [4]. *Линейный оператор A, соответствующий задаче* (5)–(7), *самосопряжен и неотрицателен в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ столбцов вида*

$f = \mathrm{col}(\mathbf{u}, \psi)$ *со скалярным произведением*

(8) $\quad (f^{(1)}, f^{(2)})_{\mathcal{H}} = \rho_0 h (\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)})_{L_2(\Gamma)} + \rho_ж (\nabla \psi^{(1)}, \nabla \psi^{(2)})_{L_2(\Gamma)}.$

Теорема 2 [4]. *Спектр оператора A дискретен, веществен и неотрицателен, а соответствующие собственным значениям λ собственные векторы $f = \mathrm{col}(\mathbf{u}, \psi)$ можно выбрать вещественными.*

Всюду далее для определенности $\omega > 0$ – простая собственная частота невязкой задачи (5)–(7).

3. Будем рассматривать $\epsilon = \eta^{1/2}$ как малый параметр. В этом пункте описан итерационный процесс, позволяющий находить собственные частоты Ω и формы колебаний $\mathbf{U}$, Ψ, $\mathbf{W}$ вязкой задачи (1)–(4), отправляясь от собственных частот ω и форм колебаний $\mathbf{u}$, ψ невязкой задачи (5)–(7).

Положим $\Omega^{(0)} = \omega$, $\mathbf{U}^{(0)} = \mathbf{u}$, $\Psi^{(0)} = \psi$, $\mathbf{W}^{(0)} = \mathbf{0}$ (верхний индекс – номер итерации). Пусть мы знаем $\Omega^{(r)}$, $\mathbf{U}^{(r)}$, $\Psi^{(r)}$. Находим $\mathbf{W}^{(r+1)}$, решая задачу

(9) $\quad i\rho_ж \Omega^{(r)} \mathbf{W}^{(r+1)} = \epsilon^2 \Delta \mathbf{W}^{(r+1)}, \quad \mathrm{div}\, \mathbf{W}^{(r+1)} = 0, \quad x \in G,$

(10) $\quad \mathbf{W}_\tau^{(r+1)}|_\Gamma = \mathbf{U}_\tau^{(r)} - \nabla_\tau \Psi^{(r)}|_\Gamma, \quad \alpha \in \Gamma;$

индексом τ здесь и далее обозначаются тангенциальные компоненты векторов и операторов. Задача (9), (10) близка к задаче Стокса, описывающей колебания вязкой несжимаемой жидкости. Разрешимость этой и последующих задач обсуждается ниже, см. п. 4.

Пусть далее $f^{(r)} = \mathrm{col}(\mathbf{U}^{(r)}, \Psi^{(r)})$. Подставляя в (2), (3) и в третье граничное условие из (4) неизвестные $\Omega^{(r+1)}$, $f^{(r+1)}$ и найденный вектор $\mathbf{W}^{(r+1)}$, запишем полученную в результате подстановки систему в виде возмущенной невязкой задачи

(11) $\quad Af^{(r+1)} = \rho_ж h \omega^2 f^{(r+1)} + g^{(r+1)},$

(12) $\quad \partial \Psi^{(r+1)}/\partial n|_\Gamma = U_3^{(r+1)} - W_3^{(r+1)}|_\Gamma.$

Поясним, что в выражения для компонент столбца $g^{(r+1)}$ входят $\Omega^{(r+1)}$, $f^{(r+1)}$ и уже найденное $\mathbf{W}^{(r+1)}$.

Домножая (11) скалярно в смысле (8) на $f^{(0)} = \mathrm{col}(\mathbf{u}, \psi)$ и формально заменяя в полученном уравнении все вхождения $f^{(r+1)}$ в $g^{(r+1)}$ на $f^{(r)}$ (результат замены обозначим в (11) через $g_*^{(r+1)}$), приходим с учетом (12) к равенству

(13) $\quad (g_*^{(r+1)}, f^{(0)})_{\mathcal{H}} = -\rho_0 h \rho_ж c_ж^2 \iint\limits_\Gamma (W_3^{(r+1)} \Delta \psi)|_\Gamma dS,$

которое представляет собой квадратное уравнение относительно $\Omega^{(r+1)}$. Находим $\Omega^{(r+1)}$ с условием $\mathrm{Im}\, \Omega^{(r+1)} \geqslant 0$. Теперь, решая задачу (11), (12), где $g^{(r+1)}$ заменено на $g_*^{(r+1)}$, находим $f^{(r+1)}$; поясним, что здесь берется решение, удовлетворяющее условию $(f^{(r+1)}, f^{(0)})_{\mathcal{H}} = (f^{(0)}, f^{(0)})_{\mathcal{H}}$.

4. Теорема 3. *При достаточно малом ϵ для любого $r = 0, 1, 2, \ldots$ существуют единственные решения $\mathbf{W}^{(r)} \in H_2(G)$, $\Omega^{(r)}$, $\mathrm{Im}\, \Omega^{(r)} \geqslant 0$, $\mathbf{U}^{(r)} \in H_{2,2,4}(\Gamma)$, $\Psi^{(r)} \in H_3(G)$, и имеют место оценки*

(14) $\quad \| \mathbf{W}^{(r+1)} - \mathbf{W}^{(r)} \|_{H_\sigma(G)} \leqslant C_\sigma \epsilon^{r+1/2-\sigma}, \quad \sigma \in [0, 2],$

(15) $\quad |\Omega^{(r+1)} - \Omega^{(r)}| \leqslant C_3 \epsilon^{r+1},$

(16) $\quad \| \mathbf{U}^{(r+1)} - \mathbf{U}^{(r)} \|_{H_{2,2,4}(\Gamma)} \leqslant C_4 \epsilon^{r+1},$

(17) $\quad \| \Psi^{(r+1)} - \Psi^{(r)} \|_{H_3(G)} \leqslant C_5 \epsilon^{r+1},$

где $H_l(G, \Gamma)$ – пространства Соболева, а C_σ, C_l – константы, не зависящие от ϵ и r. Таким образом, при достаточно малой вязкости $\eta = \epsilon^2$ итерационный процесс сходится при $r \to +\infty$.

Доказательство теоремы 3 проводится по индукции и существенно опирается на работы [5] и [4]. Оно нетривиально, и его подробное изложение выходит за рамки настоящей работы.

5. Справедлива следующая

Теорема 4. *При $\epsilon \to +0$ имеют место следующие сходящиеся разложения:*

$$(18)\quad \Omega = \sum_{k=0}^{s} \epsilon^k \omega_k + O(\epsilon^{s+1}),$$

$$(19)\quad \mathrm{U}(\alpha) = \sum_{k=0}^{s} \epsilon^k \mathbf{u}_k(\alpha) + O(\epsilon^{s+1}), \quad \alpha \in \Gamma,$$

$$(20)\quad \Psi(x) = \sum_{k=0}^{s} \epsilon^k \psi_k(x) + O(\epsilon^{s+1}), \quad x \in G,$$

а также асимптотические разложения в некоторой окрестности S_Γ поверхности Γ

$$(21)\quad \mathrm{W}(\alpha, \gamma) = \left(\sum_{k=0}^{s} \epsilon^k \mathbf{w}_k(\alpha, \gamma) + O(\epsilon^{s+1})\right) \exp\left(-\frac{\sqrt{i\rho_ж \omega}}{\epsilon}\gamma\right), \quad \alpha \in \Gamma.$$

Здесь $\gamma \geqslant 0$ – расстояние до оболочки по направлению внешней нормали $\mathbf{n}$, $\omega_0 = \omega$, $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}$, $\psi_0 = \psi$. Оценки О-членов равномерны в (19) по $\alpha \in \Gamma$, в (20) по $x \in G$, в (21) по $x = \alpha - \mathbf{n}\gamma \in S_\Gamma$ и выдерживают дифференцирование. При $x \in G \setminus S_\Gamma$ вектор-функция $\mathrm{W}(x)$ и все ее производные асимптотически удовлетворяют оценке $O(\epsilon^{+\infty})$.

Вычисляя явно первую поправку $\mathrm{W}^{(1)}$ из (9), (10) в виде отрезка ряда (21), находим

$$\mathbf{w}_{\tau,0} = \frac{\mathbf{u}_\tau - \nabla_\tau \psi|_\Gamma}{\sqrt{1 - 2H\gamma + K\gamma^2}},$$

$$w_{3,0} = 0, \quad w_{3,1} = -\frac{\operatorname{div}_\tau(\mathbf{u}_\tau - \nabla_\tau \psi|_\Gamma)}{\sqrt{1 - 2H\gamma + K\gamma^2}},$$

где $H(\alpha)$, $K(\alpha)$ – средняя и гауссова кривизны оболочки. Согласно процедуре пункта 3 определяем

$$(22)\quad \Omega - \omega = \epsilon\omega_1 + O(\epsilon^2) =$$

$$= \frac{i^{3/2} \rho_ж^{1/2} \omega^{1/2} \| \mathbf{u}_\tau - \nabla_\tau \psi|_\Gamma \|^2_{L_2(\Gamma)}}{2(\rho_0 h \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Gamma)} + \rho_ж \|\nabla\psi\|^2_{L_2(G)})} \sqrt{\eta} + O(\eta).$$

Формула (22) показывает, что при введении вязкости точки спектра сдвигаются в комплексную область под углом 135°, а величина сдвига пропорциональна корню из вязкости и в значительной мере зависит от формы и характера рассматриваемого невязкого колебания.

В случае сферической оболочки задача (1)–(4) допускает точное решение, поскольку переменные делятся [3]. Приведем значения величины относительного сдвига $\delta = (\Omega - \omega)/\omega$ первой квазитангенциальной собственной частоты (см. [6])

осесимметричных колебаний дюралюминиевой сферы с различными заполнителями (индекс 1 соответствует точному решению, индекс 2 – асимптотике (22)).

Вода:

$$\delta_1 = (-3{,}200 + i \cdot 3{,}198) \cdot 10^{-4},$$

$$\delta_2 = (-3{,}200 + i \cdot 3{,}200) \cdot 10^{-4}.$$

Глицерин:

$$\delta_1 = (-1{,}816 + i \cdot 1{,}756) \cdot 10^{-2},$$

$$\delta_2 = (-1{,}817 + i \cdot 1{,}817) \cdot 10^{-2}.$$

Численные результаты подтверждают высокую эффективность формулы (22).

Автор искренне благодарит В.Б. Лидского и Д.Г. Васильева за постановку задачи и большую помощь в работе.

Московский физико-технический институт

Поступило
9 VII 1986

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 384 с. 2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Гидродинамика. М.: Наука, 1986, т. 6. 736 с. 3. *Гузь А.Н., Кубенко В.Д.* Методы расчета оболочек. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек. Киев, 1982, т. 5. 400 с. 4. *Асланян А.Г., Васильев Д.Г., Лидский В.Б.* – Функц. анализ и его прилож., 1981, т. 15, вып. 3, с. 1–9. 5. *Агранович М.С., Вишик М.И.* – УМН, 1964, т. 19, вып. 3, с. 53–161. 6. *Васильев Д.Г., Симонов И.В.* Препринт № 186 Ин-та пробл. механики АН СССР. М.: ИПМ АН СССР, 1981. 69 с.

УДК 517.946 : 535.42

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А.Е. ПОЕДИНЧУК, Ю.А. ТУЧКИН,
академик АН УССР В.П. ШЕСТОПАЛОВ

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ВОЛНОВОГО РАССЕЯНИЯ НА НЕЗАМКНУТЫХ ЭКРАНАХ

Предлагается метод исследования двухмерных спектральных краевых задач для уравнения Гельмгольца, возникающих в (стационарной) теории дифракции электромагнитных и акустических волн на тонких экранах, где роль спектрального параметра играет частота. Развитый подход принципиально отличается от известных [1–6] и основывается на процедуре регуляризации [7] оператора краевой задачи. Он применим как к гладким телам (замкнутым экранам), так и к бесконечно тонким незамкнутым экранам. Предлагаемый метод иллюстрируется на примере бесконечного и однородного в продольном направлении цилиндрического экрана произвольного гладкого профиля с граничным условием Дирихле (двухмерная задача дифракции), но развитый подход допускает обобщение как на граничные условия второго и третьего рода, так и на трехмерные краевые задачи для уравнений Гельмгольца и Максвелла.

Идея использования процедуры регуляризации при анализе спектральных краевых задач почерпнута нами из работы [8], в которой исследуется случай экра-