Алгебра и анализ
Том 18 (2006), №4

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПРОСТРАНСТВ БЕСОВА В НЕДИАГОНАЛЬНОМ СЛУЧАЕ

© И. АСЕКРИТОВА, Н. КРУГЛЯК

Описаны пространства, интерполяционные для набора пространств Бесова в недиагональном случае. Результаты вытекают из того, что если выпуклая оболочка точек $(\bar{s}_0, \eta_0), \dots, (\bar{s}_n, \eta_n) \in \mathbb{R}^{m+1}$ содержит некоторый шар пространства $\mathbb{R}^{m+1}$, то имеет место формула

$$(l_{q_0}^{\bar{s}_0}((X_0, X_1)_{\eta_0, p_0}), \dots, l_{q_n}^{\bar{s}_n}((X_0, X_1)_{\eta_n, p_n}))_{\bar{\theta}, q} = l_q^{\bar{s}_{\bar{\theta}}}((X_0, X_1)_{\eta_{\bar{\theta}}, q}),$$

где $\bar{\theta} = (\theta_0, \dots, \theta_n)$ и $(s_{\bar{\theta}}, \eta_{\bar{\theta}}) = \theta_0(\bar{s}_0, \eta_0) + \dots \theta_n(\bar{s}_n, \eta_n)$.

§0. Введение

Видимо, нет нужды в особых объяснениях, почему важно знать интерполяционные свойства пространств Бесова и Соболева, в том числе и анизотропных. Хорошо известно [3], что в диагональном случае ($\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$) вещественный метод, примененный к *паре* изотропных пространств Бесова, дает опять пространство Бесова:

$$(B_{p_0,q_0}^{s_0}, B_{p_1,q_1}^{s_1})_{\theta,q} = B_{p,q}^{s_\theta} \quad (s_0 \neq s_1, p = q, s_\theta = (1-\theta)s_0 + \theta s_1). \tag{0.1}$$

Однако в недиагональном случае формула (0.1) верна, только при существенных ограничениях на параметры, а, вообще говоря, пространство $(B_{p_0,q_0}^{s_0}, B_{p_1,q_1}^{s_1})_{\theta,q}$ выходит из шкалы пространств Бесова. В то же время (см. [2]), если вместо пары рассматривать тройку пространств Бесова, мы опять получаем пространство из той же шкалы.

Трудности, возникающие при интерполяции пространств Бесова, связаны в первую очередь с трудностями, возникающими при интерполяции векторнозначных пространств $l_q^s(L_p)$ (определение этих пространств см. в §1).

В диагональном случае ($\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$) имеет место замечательная формула (см. [3]):

$$(l_{q_0}^{s_0}(A_0), l_{q_1}^{s_1}(A_1))_{\theta,q} = l_q^{s_\theta}((A_0, A_1)_{\theta,q}), \tag{0.2}$$

где $s_\theta = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$. В недиагональном же случае ($\frac{1}{q} \neq \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$) эта формула не верна для произвольной пары (A_0, A_1).

Это может быть продемонстрировано на очень простом примере. Рассмотрим пару

$$(l_p^{s_0}(A_0), l_p^{s_1}(A_1)), \quad \text{где } s_0 \neq s_1,$$

а внутренние пространства A_0, A_1 — это пространства $l_p^{r_0}$, $l_p^{r_1}$ $(r_0 \neq r_1)$ соответствено. Тогда, согласно формуле Гилберта [5], пространство

$$X = (l_p^{s_0}(l_p^{r_0}), l_p^{s_1}(l_p^{r_1}))_{\theta,q}, \quad q \neq p,$$

определяется с помощью нормы

$$\|\{a_{n_1,n_2}\}_{(n_1,n_2)\in\mathbb{Z}^2}\|_X = \left(\sum_k \|2^{s_\theta n_1} 2^{r_\theta n_2} a_{n_1,n_2} \chi_{\Omega_k}\|_{l_p}^q\right)^{1/q},$$

где $\Omega_k = \{(n_1,n_2) : 2^{k-1} < 2^{n_1(s_0-s_1)} 2^{n_2(r_0-r_1)} \leqslant 2^k\}$, $s_\theta = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$ и $r_\theta = (1-\theta)r_0 + \theta r_1$, которая, очевидно, не совпадает с нормой пространства

$$l_q^{s_\theta}(l_q^{r_\theta}) = l_q^{s_\theta}((A_0, A_1)_{\theta,q})$$

при $q \neq p$.

Итак, для произвольных пространств A_0, A_1 формула (0.2) не верна в недиагональном случае. Однако, как было показано в [1], ее можно обобщить и на недиагональный случай, если вместо пары рассмотреть набор, состоящий из более чем двух векторнозначных пространств. А именно если $A_n = A_{n-1}$, $s_n \neq s_{n-1}$, то

$$(l_{q_0}^{s_0}(A_0), l_{q_1}^{s_1}(A_1), \dots, l_{q_n}^{s_n}(A_n))_{\bar\theta,q} = l_q^{s_{\bar\theta}}((A_0, \dots, A_n)_{\bar\theta,q}), \tag{0.3}$$

где $\bar\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n)$, $0 < \theta_i < 1$, $i = 0, 1, \dots, n$, $\sum_{i=0}^n \theta_i = 1$, $s_{\bar\theta} = \sum_{i=0}^n \theta_i s_i$. Интересно отметить, что в (0.3) нет ограничений на $A_0, A_1, \dots, A_{n-2}$ и $s_0, s_1, \dots, s_{n-2}$.

Пусть $\bar s_k \in \mathbb{R}^m$, $k = 0, 1, \dots, n$, $\vec X = (X_0, X_1)$ — пара банаховых или квазибанаховых пространств и пусть $A_k = (X_0, X_1)_{\lambda_k, p_k}$, $k = 0, 1, \dots, n$. Тогда, как мы покажем, удается получить обобщение формулы (0.3) на случай набора

$$(l_{q_0}^{\bar s_0}(A_0), l_{q_1}^{\bar s_1}(A_1), \dots, l_{q_n}^{\bar s_n}(A_n))$$

и, как следствие, проинтерполировать наборы пространств Бесова и Соболева в недиагональном случае.

§1. Основные определения

Как обычно, через $\mathbb{R}^n_+$ будем обозначать множество n-мерных векторов с положительными координатами.

Пусть $A_0, A_1, \ldots, A_n$ — банаховы или квазибанаховы пространства. Мы будем говорить, что пространства $A_0, A_1, \ldots, A_n$ образуют $(n+1)$-набор $\vec{A} = (A_0, A_1, \ldots, A_n)$, если они линейно и непрерывно вложены в одно, общее для всех, линейное топологическое пространство X с хаусдорфовой топологией.

Как и для пары, можно определить K-функционал элемента $a \in A_0 + A_1 + \cdots + A_n$:

$$K(\bar{t}, a, \vec{A}) = \inf(\|a_0\|_{A_0} + t_1\|a_1\|_{A_1} + \cdots + t_n\|a_n\|), \tag{1.1}$$

где $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n_+$, а нижняя грань берется по всевозможным разложениям элемента a в виде суммы $a = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, $a_i \in A_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Очевидно, что K-функционал является вогнутой функцией на $\mathbb{R}^n_+$ и при фиксированном t — нормой на $A_0 + \cdots + A_n$.

Далее, для любого параметра $\bar{\theta} = (\theta_0, \ldots, \theta_n)$, $\theta_i > 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $\sum_{i=0}^n \theta_i = 1$, интерполяционное пространство $\vec{A}_{\bar{\theta},q}$, $q > 0$, определяется как совокупность элементов $a \in A_0 + A_1 + \cdots + A_n$, для которых конечна следующая квазинорма (норма при $q \geqslant 1$):

$$\|a\|_{\bar{\theta},q} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} (t_1^{-\theta_1} \ldots t_n^{-\theta_n} K(\bar{t}, a; \bar{A}))^q \frac{dt_1}{t_1} \ldots \frac{dt_n}{t_n} \right)^{1/q}. \tag{1.2}$$

При этом, как обычно, интеграл заменяется на верхнюю грань при $q = \infty$.

Пусть A — банахово или квазибанахово пространство, $\bar{s} = (s_1, \ldots, s_m) \in \mathbb{R}^m$, $q > 0$, $\bar{k} = (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{Z}^m$. Через $l_q^{\bar{s}}(A)$ мы будем обозначать пространство A-значных функций, определяемое нормой (квазинормой при $0 < q < 1$)

$$\|a\|_{l_q^{\bar{s}}(A)} = \|\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}^m}\|_{l_q^{\bar{s}}(A)} = \left(\sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^m} (2^{\bar{k} \cdot \bar{s}} \|a_{\bar{k}}\|_A)^q \right)^{1/q}, \tag{1.3}$$

где $\bar{k} \cdot \bar{s} = \sum_{i=1}^m k_i s_i$, с заменой суммы в (1.3) на верхнюю грань при $q = \infty$.

§2. Интерполяция векторнозначных пространств

Пусть $\bar{s}_k = (s_1^k, \ldots, s_m^k) \in \mathbb{R}^m$, $\eta_k \in (0, 1)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Через $(\bar{s}_k, \eta_k)$ мы будем обозначать точку пространства $\mathbb{R}^{m+1}$ с координатами $(s_1^k, \ldots, s_m^k, \eta_k)$.

Пусть $\vec{X} = (X_0, X_1)$ — пара банаховых или квазибанаховых пространств.

Теорема 1. *Если выпуклая оболочка* $(n+1)$ *точки* $(\bar{s}_0, \eta_0)$, $(\bar{s}_1, \eta_1), \ldots, (\bar{s}_n, \eta_n)$ *содержит некоторый шар пространства* $\mathbb{R}^{m+1}$, *то*

$$(l_{q_0}^{\bar{s}_0}(\vec{X}_{\eta_0,p_0}), \ldots, l_{q_n}^{\bar{s}_n}(\vec{X}_{\eta_n,p_n}))_{\bar{\theta},q} = l_q^{\bar{s}_{\bar{\theta}}}(\vec{X}_{\eta_{\bar{\theta}},q}), \tag{2.1}$$

где $(\bar{s}_{\bar{\theta}}, \eta_{\bar{\theta}}) = \theta_0(\bar{s}_0, \eta_0) + \cdots + \theta_n(\bar{s}_n, \eta_n)$.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $\bar{e}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ — *стандартный базис в* $\mathbb{R}^m$. *Положим* $\bar{e}_0 = \bar{e}_{m+1} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m$. *Тогда для любого числа* $a \neq 0$ *имеет место равенство*

$$\begin{aligned}(l_p^{a\bar{e}_0}(X_0), l_p^{a\bar{e}_1}(X_1), \ldots, l_p^{a\bar{e}_{m+1}}(X_1))_{\bar{\theta},q} \\ = l_q^{a(\theta_1,\ldots,\theta_m)}(\vec{X}_{\theta_1+\cdots+\theta_{m+1},q})\end{aligned} \tag{2.2}$$

где $\bar{\theta} = (\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{m+1})$.

Доказательство. Применим индукцию по m. Если $m = 1$, то $\bar{e}_0 = \bar{e}_2 = 0$, $a\bar{e}_1 = a \neq 0$. Поэтому формула (2.2) имеет вид

$$(l_p(X_0), l_p^a(X_1), l_p(X_1))_{\bar{\theta},q} = l_q^{a\theta_1}(\vec{X}_{\theta_1+\theta_2,q}), \tag{2.3}$$

где $\bar{\theta} = (\theta_0, \theta_1, \theta_2)$. Справедливость этого равенства следует из (0.3) при $n = 2$.

Предположим, что равенство (2.2) верно для $m \leqslant N$, и докажем, что оно верно и для $m = N + 1$, а именно

$$\begin{aligned}(l_p^{a\bar{e}_0}(X_0), l_p^{a\bar{e}_1}(X_1), \ldots, l_p^{a\bar{e}_{N+2}}(X_1))_{\bar{\theta},q} \\ = l_q^{a(\theta_1,\ldots,\theta_{N+1})}(\vec{X}_{\theta_1+\cdots+\theta_{N+2},q}),\end{aligned} \tag{2.4}$$

где $\bar{\theta} = (\theta_0, \ldots, \theta_{N+1}, \theta_{N+2})$.

Обозначим через $\bar{e}_i^N$, $i = 0, 1, \ldots, N + 2$, векторы из $\mathbb{R}^N$ с координатами, равными первым N координатам векторов $\bar{e}_i$, и рассмотрим пространства

$$Y_0 = l_p^{a\bar{e}_0^N}(X_0), \quad Y_i = l_p^{a\bar{e}_i^N}(X_1), \quad i = 1, \ldots, N + 2. \tag{2.5}$$

Нетрудно видеть, что пространство в левой части равенства (2.4) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}(l_p^{a\bar{e}_0}(X_0), l_p^{a\bar{e}_1}(X_1), \ldots, l_p^{a\bar{e}_{N+2}}(X_1))_{\bar{\theta},q} \\ = (l_p(Y_0), l_p(Y_1), \ldots, l_p^a(Y_{N+1}), l_p(Y_{N+2}))_{\bar{\theta},q}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Так как $\bar{e}^N_{N+1} = \bar{e}^N_{N+2} = \bar{0} \in \mathbb{R}^N$ и $a \neq 0$, то $Y_{N+1} = Y_{N+2}$ и к правой части формулы (2.6) применима формула (0.3). Используя ее, получаем

$$\begin{aligned}(l_p^{a\bar{e}_0}(X_0), l_p^{a\bar{e}_1}(X_1), \dots, l_p^{a\bar{e}_{N+2}}(X_1))_{\bar{\theta},q} \\ = l_q^{a\theta_{N+1}}((Y_0, \dots, Y_{N+1}, Y_{N+2})_{\bar{\theta},q}) \\ = l_q^{a\theta_{N+1}}((Y_0, \dots, Y_{N+1})_{\theta_0,\dots,\theta_{N+1}+\theta_{N+2},q}).\end{aligned} \tag{2.7}$$

Осталось заметить, что для набора $(Y_0, \dots, Y_{N+1})$ справедливо предположение индукции. Поэтому

$$\begin{aligned}(l_p^{a\bar{e}_0}(X_0), l_p^{a\bar{e}_1}(X_1), \dots, l_p^{a\bar{e}_{N+2}}(X_1))_{\bar{\theta},q} \\ = l_q^{a\theta_{N+1}}(l_q^{a(\theta_1,\dots,\theta_N)}((X_0, X_1)_{\theta_1+\dots+\theta_{N+2},q})) \\ = l_q^{a(\theta_1,\dots,\theta_{N+1})}(\vec{X}_{\theta_1+\dots+\theta_{N+2},q}).\end{aligned} \tag{2.8}$$

Лемма доказана. •

Доказательство теоремы 1. Правая часть в (2.1) не зависит от p_i и q_i $(i = 0, 1, \dots, n)$. Поэтому из непрерывных вложений

$$l_{r_0}^{\bar{s}_i}(\vec{X}_{\eta_i,r_0}) \hookrightarrow l_{q_i}^{\bar{s}_i}(\vec{X}_{\eta_i,p_i}) \hookrightarrow l_{r_1}^{\bar{s}_i}(\vec{X}_{\eta_i,r_1}),$$

где

$$r_0 = \min_{0\leqslant i,j\leqslant n}\{p_i, q_j\}, \quad r_1 = \max_{0\leqslant i,j\leqslant n}\{p_i, q_j\},$$

видно, что достаточно доказать теорему 1 только для случая, когда все p_i и q_i, $i = 0, \dots, n$, равны одному и тому же числу r. А именно достаточно доказать, что

$$(l_r^{\bar{s}_0}(\vec{X}_{\eta_0,r}), \dots, l_r^{\bar{s}_n}(\vec{X}_{\eta_n,r}))_{\bar{\theta},q} = l_q^{\bar{s}_\theta}(\vec{X}_{\eta_{\bar{\theta}},q}). \tag{2.9}$$

Далее, без ограничения общности можно считать, что $\bar{s}_i \in \mathbb{R}^m_+$, $i = 0, 1, \dots, n$. Действительно, так как

$$\begin{aligned}\|\{a_{\bar{k}}\}_{\bar{k}\in\mathbb{Z}^m}\|_{l_r^{\bar{s}_i+\bar{s}}(\vec{X}_{\eta_i,r})} \\ = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^m}(2^{(\bar{s}_i+\bar{s})\cdot\bar{k}}\|a_{\bar{k}}\|_{\bar{X}_{\eta_i,r}})^r\right)^{1/r} = \|\{2^{\bar{s}\cdot\bar{k}}a_{\bar{k}}\}_{\bar{k}\in\mathbb{Z}^m}\|_{l_r^{\bar{s}_i}(\vec{X}_{\eta_i,r})},\end{aligned} \tag{2.10}$$

то отображение

$$A_{\bar{s}} : \{a_{\bar{k}}\}_{\bar{k}\in\mathbb{Z}^m} \mapsto \{2^{\bar{s}\cdot\bar{k}}a_{\bar{k}}\}_{\bar{k}\in\mathbb{Z}^m}$$

является изометрией между пространствами $l_r^{\bar{s}_i+\bar{s}}(\vec{X}_{\eta_i,r})$ и $l_r^{\bar{s}_i}(\vec{X}_{\eta_i,r})$, а также между пространствами $l_q^{\bar{s}_{\bar{\theta}}+\bar{s}}(\vec{X}_{\eta_{\bar{\theta}},q})$ и $l_q^{\bar{s}_{\bar{\theta}}}(\vec{X}_{\eta_{\bar{\theta}},q})$. Кроме этого,

$$\theta_0(\bar{s}_0 + \bar{s}) + \theta_1(\bar{s}_1 + \bar{s}) + \dots + \theta_n(\bar{s}_n + \bar{s}) = \bar{s}_{\bar{\theta}} + \bar{s}.$$

Поэтому достаточно доказать равенство (2.9) для $\bar{s}_i \in \mathbb{R}^m_+$, $i = 0, \ldots, n$.

Покажем теперь, что если $\bar{s}_i \in \mathbb{R}^m_+$, то все пространства $l_r^{\bar{s}_i}(\vec{X}_{\eta_i,r})$ могут быть получены вещественным методом интерполяции из „базового“ набора

$$\vec{Z} = (l_r^{a\bar{e}_0}(X_0), l_r^{a\bar{e}_1}(X_1), \ldots, l_r^{a\bar{e}_{m+1}}(X_1)), \tag{2.11}$$

рассмотренного в лемме 1.

Для этого выберем положительное, достаточно большое число a $\big(a > \max\limits_{i=0,n} \frac{\sum_{j=1}^m s_j^i}{\eta_i}\big)$ и определим векторы $\bar{\lambda}_i = (\lambda_0^i, \ldots, \lambda_{m+1}^i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, следующим образом:

$$\lambda_j^i = \frac{1}{a} s_j^i, \quad j = 1, \ldots, m, \quad \lambda_{m+1}^i = \eta_i - \sum_{j=1}^m \frac{s_j^i}{a}. \tag{2.12}$$

Определим также $\lambda_0^i = 1 - \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j^i$. Очевидно, что при достаточно большом значении a все λ_j^i строго положительны $(j = 0, \ldots, m+1)$ и $\sum_{j=0}^{m+1} \lambda_j^i = 1$. Поэтому из леммы 1 с учетом формул (2.12) получаем

$$\begin{aligned} &(l_r^{a\bar{e}_0}(X_0), l_r^{a\bar{e}_1}(X_1), \ldots, l_r^{a\bar{e}_{m+1}}(X_1))_{\bar{\lambda}_i,r} \\ &\quad = l_r^{a(\lambda_1^i,\ldots,\lambda_m^i)}(\vec{X}_{\lambda_1^i+\cdots+\lambda_{m+1}^i,r}) = l_r^{\bar{s}_i}(\vec{X}_{\eta_i,r}) \end{aligned} \tag{2.13}$$

для всех $i = 0, 1, \ldots, n$.

Таким образом, левая часть равенства (2.9) имеет вид

$$\begin{aligned} &(l_r^{\bar{s}_0}(\vec{X}_{\eta_0,r}), l_r^{\bar{s}_1}(\vec{X}_{\eta_1,r}), \ldots, l_r^{\bar{s}_n}(\vec{X}_{\eta_n,r}))_{\bar{\theta},q} \\ &\quad = (\bar{Z}_{\bar{\lambda}_0,r}, \bar{Z}_{\bar{\lambda}_1,r}, \ldots, \bar{Z}_{\bar{\lambda}_n,r})_{\bar{\theta},q}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

где $\vec{Z}$ определено в (2.11). Далее, как следует из [6, утверждения 6.4, 10.1 и теорема 9.1], для набора $\bar{Z}$ справедлива теорема реитерации

$$(\bar{Z}_{\bar{\lambda}_{0,r}}, \bar{Z}_{\bar{\lambda}_{1,r}}, \ldots, \bar{Z}_{\bar{\lambda}_{n,r}})_{\bar{\theta},q} = \bar{Z}_{\theta_0\bar{\lambda}_0+\cdots+\theta_n\bar{\lambda}_n,q}, \tag{2.15}$$

если линейная оболочка векторов $\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n$ порождает все пространство $\mathbb{R}^{m+2}$. Так как по условию теоремы выпуклая оболочка точек $(\bar{s}_i, \eta_i) \in \mathbb{R}^{m+1}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, содержит некоторый шар пространства $\mathbb{R}^{m+1}$, а точки $p_i = (\lambda_1^i, \lambda_2^i, \ldots, \lambda_{m+1}^i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, получены из $(\bar{s}_i, \eta_i)$ с помощью невырожденного линейного преобразования (см. (2.12)), то их выпуклая оболочка также содержит некоторый шар пространства $\mathbb{R}^{m+1}$. А следовательно, и выпуклая оболочка точек $(\lambda_0^i, \lambda_1^i, \ldots, \lambda_{m+1}^i) \in \mathbb{R}^{m+2}$, лежащих на гиперплоскости $t_0 + t_1 + \cdots + t_{m+1} = 1$, содержит некоторый шар пространства $\mathbb{R}^{m+1}$. Отсюда немедленно вытекает, что линейная оболочка векторов $\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n$ порождает все пространство $\mathbb{R}^{m+2}$.

Теперь из формул (2.14), (2.15), леммы 1 и равенства (2.12) получаем

$$\begin{aligned}&(l_r^{\bar s_0}(\vec X_{\eta_0,r}), l_r^{\bar s_1}(\vec X_{\eta_1,r}),\dots,l_r^{\bar s_n}(\vec X_{\eta_n,r}))_{\bar\theta,q}\\ &\quad=(l_r^{a\bar e_0}(X_0), l_r^{a\bar e_1}(X_1),\dots,l_r^{a\bar e_{m+1}}(X_1))_{\bar\lambda_{\bar\theta},q}=l_q^{\bar s_\theta}(\vec X_{\bar\eta_{\bar\theta}},q),\end{aligned}$$

что и завершает доказательство теоремы. •

В теореме 1 рассматривался набор пространств

$$l_{q_i}^{\bar s_i}(\vec X_{\eta_i,p_i})=l_{q_i}^{\bar s_i}((X_0,X_1)_{\eta_i,p_i});$$

при этом, как обычно, $0<\eta_i<1$, $i=0,\dots,n$. Однако интересен случай, когда вместо одного или нескольких пространств $(X_0,X_1)_{\eta_i,p_i}$ стоит „крайнее“ пространство X_1. В этом случае полагаем $X_1=(X_0,X_1)_{1,p_i}$, т.е. параметр η_i может принадлежать полуинтервалу $(0,1]$.

Замечание. Теорема 1 верна и в случае, когда $\eta_i\in(0,1]$.

Доказательство немедленно вытекает из того, что лемма 1 верна и при $\theta_0=0$, а теорема реитерации (см. [6]) верна и в случае, когда вектор $\bar\theta$ имеет одну или несколько нулевых координат.

§3. Приложения

Рассмотрим набор векторнозначных пространств

$$(l_{q_0}^{\bar s_0}(L_{p_0}),\dots,l_{q_n}^{\bar s_n}(L_{p_n}),$$

где $\bar s_i\in\mathbb R^m$, $m\geqslant1$, $p_i,q_i>0$, $i=0,1,\dots,n$.

Так как для $r<\min\limits_{0\leqslant i\leqslant n}p_i$ имеет место равенство

$$L_{p_i}=(L_r,L_\infty)_{\eta_i,p_i},\quad \eta_i=1-\frac{r}{p_i},\quad i=0,\dots,n,$$

то из теоремы 1 немедленно вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Если векторы $\bar s_0,\dots,\bar s_n\in\mathbb R^m$ таковы, что выпуклая оболочка векторов $(\bar s_0,\frac{1}{p_0}),\dots,(\bar s_n,\frac{1}{p_n})$ содержит некоторый шар пространства $\mathbb R^{m+1}$, то*

$$(l_{q_0}^{\bar s_0}(L_{p_0}),\dots,l_{q_n}^{\bar s_n}(L_{p_n}))_{\bar\theta,q}=l_q^{\bar s_\theta}(L_{p_\theta,q}),$$

где $L_{p_\theta,q}$ — пространство Лоренца и $(\bar s_{\bar\theta},\frac{1}{p_\theta})=\theta_0(\bar s_0,\frac{1}{p_0})+\dots+\theta_n(\bar s_n,\frac{1}{p_n})$.

Из теоремы 2 и того, что пространства Бесова являются ретрактами пространств $l_q^{\bar s}(Lp)$, следуют интерполяционные формулы для пространств Бесова и Соболева.

Начнем с изотропного случая. Известно (см. [3] для $q, p \geqslant 1$ и [4] для $q, p < 1$), что пространства Бесова $B^s_q(L_p)$ (т.е. пространства Бесова гладкости s, построенные на базе пространств L_p) получаются из $l^s_q(L_p)$ с помощью некоторой ретракции, не зависящей от p, q и s. Поэтому из теоремы 2 получаем такое утверждение.

Следствие 1. *Если выпуклая оболочка точек* $(s_0, \frac{1}{p_0}), \dots, (s_n, \frac{1}{p_n})$ *содержит некоторый шар пространства* $\mathbb{R}^2$ (*т.е. точки не лежат на одной прямой*), *то имеет место формула*

$$(B^{s_0}_{q_0}(L_{p_0}), \dots, B^{s_n}_{q_n}(L_{p_n}))_{\bar\theta, q} = B^{s_{\bar\theta}}_q(L_{p_{\bar\theta}, q}),$$

где $(s_{\bar\theta}, \frac{1}{p_{\bar\theta}}) = \theta_0(s_0, \frac{1}{p_0}) + \dots + \theta_n(s_n, \frac{1}{p_n})$.

Так как для пространств Соболева имеет место вложение

$$B^s_1(Lp) \subset W^s_p \subset B^s_\infty(Lp),$$

то из следствия 1 вытекает еще одно утверждение.

Следствие 2. *В условиях следствия* 1 *справедлива формула*

$$(W^{s_0}_{p_0}, \dots, W^{s_n}_{p_n})_{\bar\theta, q} = B^{s_{\bar\theta}}_q(L_{p_{\bar\theta}, q}),$$

где $(s_{\bar\theta}, \frac{1}{p_\theta}) = \theta_0(s_0, \frac{1}{p_0}) + \dots + \theta_n(s_n, \frac{1}{p_n})$.

Аналогичные результаты верны и для анизотропных пространств Бесова и Соболева с доминирующей гладкостью.

Хорошо известно (см., например, [6]), что пространство Бесова с доминирующей гладкостью $\bar s \in \mathbb{R}^m$, построенное на базе пространства L_p, $p \geqslant 1$ (мы будем обозначать его через $\tilde B^{\bar s}_q(L_p)$), является ретрактом пространства $l^{\bar s}_q(L_p)$. Обозначим через $\tilde B^{\bar s}_q(L_{p,r})$ пространство, получающееся при той же ретракции из пространства $l^{\bar s}_q(L_{p,r})$. Тогда из теоремы 2 немедленно вытекает такое следствие.

Следствие 3. *Если выпуклая оболочка точек* $(\bar s_0, \frac{1}{p_0}), \dots, (\bar s_n, \frac{1}{p_n})$ *содержит некоторый шар пространства* $\mathbb{R}^{m+1}$, *то*

$$(\tilde B^{\bar s_0}(L_{p_0}), \dots, \tilde B^{\bar s_n}(L_{p_n}))_{\bar\theta, q} = \tilde B^{\bar s_{\bar\theta}}_q(L_{p_{\bar\theta}, q}),$$

где $\bar s_{\bar\theta}$ *и* $p_{\bar\theta}$ *таковы, что*

$$(\bar s_{\bar\theta}) = \theta_0\Big(\bar s_0, \frac{1}{p_0}\Big) + \dots + \theta_n\Big(\bar s_n, \frac{1}{p_n}\Big).$$

Список литературы

[1] Asekritova I., Krugljak N., *Real interpolation of vector-valued spaces in non-diagonal case*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), 1665–1675.

[2] Asekritova I., Krugljak N., Maligranda L., Nikolova L., Persson L.-E., *Lions-Peetre reiteration formulas for triples and their applications*, Studia Math. **145** (2001), 219–254.

[3] Берг Й., Лефстрем Й., *Интерполяционные пространства: Введение*, Мир, М., 1980.

[4] DeVore R., Popov V., *Interpolation of approximation spaces*, Constructive Theory of Functions (Varna, 1987), Bulgar. Acad. Sci., Sofia, 1988, pp. 110–119.

[5] Gilbert J. E., *Interpolation between weighted Lp-spaces*, Ark. Mat. **10** (1972), 235–249.

[6] Sparr G., *Interpolation of several Banach spaces*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **99** (1974), 247–316.

School of Mathematics
and System Engineering
Växjö University
Sweden
E-mail: irina.asekritova@vxu.se

Поступило 21 января 2006 г.

Department of Mathematics
Lulea University of Technology
Sweden
E-mail: natan@ltu.se