$$-\frac{15}{16}\beta^2\delta_{ij}-\frac{1}{4}\beta^2\delta_{ij}r_i^2+\left(-\frac{3}{4}\beta+\frac{5}{16}\beta^2\right)r_ir_j+\left(\frac{3}{8}\beta-\frac{1}{4}\beta^2\right)\times$$

$$\times r_ir_j(r_i^2+r_j^2)+\frac{\beta^2}{16}(\delta_{ij}-5r_ir_j)\sum_{k=1}^{3}r_k^4\Bigg]+\frac{d^2}{C_{44}^3}\Bigg[\delta_{ij}\left(\frac{3}{8}-\frac{15}{16}\beta+\right.$$

$$\left.+\frac{25}{32}\beta^2-\frac{25}{256}\beta^3\right)+\delta_{ij}r_i^2\left(-\frac{3}{4}+2\beta-\frac{79}{48}\beta^2+\frac{3}{8}\beta^3\right)+\delta_{ij}r_i^4\left(\frac{3}{8}-\right.$$

$$\left.-\frac{19}{16}\beta+\frac{113}{96}\beta^2-\frac{3}{8}\beta^3\right)+r_ir_j\left(\frac{13}{16}\beta-\frac{25}{32}\beta^2+\frac{25}{256}\beta^3\right)+$$

$$+r_ir_j(r_i^2+r_j^2)\left(-\frac{13}{16}\beta+\frac{147}{128}\beta^2-\frac{3}{8}\beta^3\right)+r_ir_j(r_i^4+r_j^4)\left(\frac{5}{16}\beta-\right.$$

$$\left.-\frac{45}{64}\beta^2+\frac{3}{8}\beta^3\right)+\left(\frac{21}{128}\beta^2-\frac{3}{32}\beta^3\right)(\delta_{ij}-5r_ir_j)\sum_{k=1}^{3}r_k^4+$$

$$+\left(-\frac{5}{64}\beta^2+\frac{1}{32}\beta^3\right)\left(\frac{3}{2}\delta_{ij}-7r_ir_j\right)(r_i^2+r_j^2)\sum_{k=1}^{3}r_k^4+\left(-\frac{5}{128}\beta^2+\frac{1}{16}\beta^3\right)\times$$

$$\times(\delta_{ij}-7r_ir_j)\sum_{k=1}^{3}r_k^6-\frac{7}{256}\beta^3(\delta_{ij}-9r_ir_j)\left(\sum_{k=1}^{3}r_k^4\right)^2\Bigg].$$

Эта формула уточняет результаты работ [1, 2], в которых содержатся неточности в записи двучленных выражений для $g_{ij}(\vec{r})$. Она оказывается удобной при решении граничных интегральных уравнений основных задач теории упругости кубически-анизотропной среды методами малого параметра, поскольку ее использование позволяет избежать одной квадратуры.

Литература

1. Лившиц Е. М., Розенцвейг Л. Н.— ЖЭТФ, 1947, т. 17, вып. 9, с. 783—791.
2. Dederichs P. H., Leibfried G. Elastic Green's Function for Anisotropic Cubic Crystals.— Physical Review, 1969, vol. 188, N 3, p. 1175—1183.
3. Новацкий В. Теория упругости.— М.: Мир, 1975.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию 23 апреля 1982 г.

УДК 517.937

И. В. МЕЛЬНИКОВА

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Работа посвящена исследованию задачи Коши для уравнения второго порядка

$$\frac{d^2u}{dt^2}+2A\frac{du}{dt}+Bu=0. \tag{1}$$

Эти уравнения в зависимости от того, как связаны операторы A и B: оператор B вполне подчинен оператору A^2 ($A^2 \gg B$) или $B \gg A^2$, разделены на уравнения I и II типа [1]. С. Г. Крейном получены достаточные условия разрешимости задачи Коши для уравнений I типа и необходимые и достаточные — для уравнений, в которых оператор $A=0$ [2]. В настоящей работе в предположении, что определен оператор $(A^2-B)^{1/2}$, получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Коши для уравнений I типа, в которых оператор B подчинен оператору A^2 с порядком $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$, и для уравнений II типа, в которых ограничен оператор A. Метод, с помощью которого получены эти результаты, делает их достаточно наглядными, позволяет увидеть аналог между условиями $A^2 \gg B$ и $B \gg A^2$ и условием на знак дискриминанта квадратного уравнения.

Рассмотрим уравнение (1), в котором A, B — замкнутые операторы со всюду плотными в банаховом пространстве E областями определения и такие, что определен опера-

тор $(A^2-B)^{1/2}$, а оператор $(A^2-B)^{-\frac{1}{2}}$ ограничен. Будем искать дважды непрерывно дифференцируемое решение задачи Коши с начальными условиями $u_0 \in D(A) \cap \cap D(B)$, $u_1 \in D(A)$. При сделанных предположениях решение задачи Коши для уравнения (1) порождает по формулам $x = u + v$, $y = u - v$, где $v = (A^2 - B)^{-\frac{1}{2}}\left[Au + \frac{du}{dt}\right]$, решение задачи Коши для системы

$$\frac{dx}{dt} = [-A + (A^2 - B)^{1/2}]\, x, \quad x(0) = u_0 + (A^2 - B)^{-1/2}\,[Au_0 + u_1],$$
$$\frac{dy}{dt} = [-A - (A^2 - B)^{1/2}]\, y, \quad y(0) = u_0 - (A^2 - B)^{-1/2}\,[Au_0 + u_1]. \tag{2}$$

Обратно, решение задачи Коши для системы (2) по формуле $u = \frac{1}{2}(x + y)$ порождает решение рассматриваемой задачи Коши для уравнения (1). Проверяется это соответствие непосредственно подстановкой функций в систему или уравнение. Установлено, когда оно является взаимно-однозначным.

Теорема 1. *Пусть оператор $(A^2 - B)^{1/2}$ определен, оператор $(A^2 - B)^{-\frac{1}{2}}$ ограничен и либо $A^2 \gg B$, либо $B \gg A^2$, тогда для того, чтобы задача Коши для уравнения (1) имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы операторы в правой части системы (2) порождали полугруппы класса C_0.*

Рассмотрим уравнения I типа, в которых оператор B подчинен оператору A^2 с порядком $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$ и существует ограниченный обратный A^{-1}. При этих условиях операторы A и $(A^2 - B)^{1/2}$ отличаются на оператор, который подчинен оператору A с любым порядком $\varkappa > \alpha + \frac{1}{2} - 1$ ([1]). Обозначим этот оператор через T. Система (2) при этом обозначении принимает следующий вид:

$$\frac{dx}{dt} = (-A + A + T)\, x = Tx, \quad \frac{dy}{dt} = (-2A - T)\, y. \tag{3}$$

При $\alpha < \frac{1}{2}$ оператор T ограничен, поэтому операторы в правой части порождают полугруппу класса C_0 тогда и только тогда, когда таковым является оператор $-A$. Отсюда следует

Теорема 2. *Для того чтобы задача Коши для уравнения (1) имела единственное решение в случае $A^{2\alpha} \gg B$, $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$, необходимо и достаточно, чтобы оператор $-A$ порождал полугруппу класса C_0.*

Обратная задача Коши для уравнения (1) сводится к задаче Коши для уравнения $\frac{d^2u}{dt^2} - 2A\frac{du}{dt} + Bu = 0$ и, следовательно, к задаче Коши для системы

$$\frac{dx}{dt} = [A + (A^2 - B)^{1/2}]\, x, \quad \frac{dy}{dt} = [A - (A^2 - B)^{1/2}]\, y.$$

Отсюда следует

Теорема 3. *Для того чтобы обратная задача Коши для уравнения (1) имела единственное решение в случае $A^{2\alpha} \gg B$, $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$, необходимо и достаточно, чтобы оператор A порождал полугруппу класса C_0.*

Рассмотрим уравнения II типа с ограниченным оператором A, и пусть определен либо оператор $B^{1/2}$, либо $(-B)^{1/2}$. Назовем эти условия IIа и IIв, а уравнения обобщенно-гиперболическим и обобщенно-эллиптическим соответственно. Для них имеет место

Теорема 4. *Пусть A — ограниченный оператор и выполнено условие IIа (IIв), тогда для того, чтобы задача Коши для уравнения (1) имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы оператор $iB^{1/2}$ ($(-B)^{1/2}$) был производящим оператором сильно непрерывной группы.*

Литература

1. Мельникова И. В., Морнова В. М.— Дифференц. уравнения, 1979, т. 15, № 4, с. 614—618.
2. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.— М.: Наука, 1967.

Уральский государственный университет им. А. М. Горького

Поступила в редакцию 29 ноября 1979 г.