M. A. Lifshits, The method of stratification for processes with independent increments, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1983, Volume 130, 109–121

М.А.Лифшиц

МЕТОД РАССЛОЕНИЙ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

Введение

Метод расслоений был впервые применен Ю.А.Давыдовым в [1,2], а затем использован в работах [3-6] для изучения различных свойств функционалов от гауссовских процессов. Идея метода заключается в следующем. Пространство траекторий процесса расслаивается на прямые линии (лучи, отрезки). Рассматриваются условные распределения процессов на этих линиях, а затем условные распределения функционалов, т.е. образы условных распределений процессов. Затем полученная информация об условных распределениях укрупняется до информации о распределении функционалов.

Для успешного применения метода расслоений важно, чтобы прямые, вдоль которых производится расслоение, были допустимыми направлениями сдвига для меры, отвечающей процессу. В противном случае условные распределения вырождаются.

Возникает желание распространить сферу применимости метода расслоений на случай негауссовских процессов. Один из самых естественных классов таких процессов - класс стохастически непрерывных процессов с независимыми приращениями.

Однако выясняется, что в своей первоначальной форме этот метод не может быть применен к процессам без гауссовской компоненты. Дело в том, что такие процессы вообще не имеют допустимых направлений. Преодолению этой трудности и посвящена настоящая работа. Оказывается, можно подобрать полугруппы допустимых преобразований пространства траекторий, замещающие полугруппы операторов сдвига. Вместо прямых линий элементами расслоения будут орбиты полугруппы. Эти орбиты оказываются гладкими кривыми, а условные распределения будут невырожденными. В качестве элементов полугруппы преобразований выступают преобразования скачков процесса.

Приятный долг автора - выразить признательность Ю.А.Давыдову, в результате бесед с которым возникли основные идеи этой статьи.

§ 1. Условные меры на орбитах полугрупп

Пусть P - мера на борелевской σ - алгебре полного сепарабельного метрического пространства ($\mathbb{D}$, d). Пусть $S \subset \mathbb{D}$ -

открытое множество, а $\{G_c\}$, $c \geq 0$ — полугруппа измеримых преобразований множества S в себя, т.е. G_0 — тождественное преобразование и

$$G_{c_1+c_2} = G_{c_1} \circ G_{c_2} .$$

Будем предполагать, что соответствие $c \to G_c(x)$ для любого x взаимно однозначно и непрерывно в обе стороны. Предположим еще, что при любом $c > 0$ преобразование G_c взаимно однозначно.

Орбитой полугруппы G, исходящей из x, назовем множество $\{G_c(x)\}$, $c \geq 0$. Из взаимной однозначности следует, что если две орбиты пересекаются, то одна из них содержится в другой. Поэтому объединения пересекающихся орбит образуют некоторое разбиение U множества S на одномерные "волокна".

Нетрудно установить, что любое "волокно" u имеет следующую структуру. Оно представляет собой множество, строго упорядоченное соотношением порядка

$$x \leq y \Longleftrightarrow \exists c : G_c(x) = y .$$

Существует такое $c_0 \in [-\infty ; 0]$ и биекция

$$I : \langle c_0 ; +\infty) \to u ,$$

такая, что I сохраняет порядок, и на любом луче $[c_1 ; +\infty)$ при $c_1 > 0$ отображение I является топологическим изоморфизмом. I можно построить следующим образом. Выбрать $x \in u$, положить $I(0) = x$. При положительных c возьмем $I(c) = G_c(x)$, а при отрицательных c значение $I(c)$ найдем из уравнения $G_{-c}(I(c)) = x$.

С помощью I можно перенести меру Лебега с вещественной прямой на "волокно" u. Полученная мера $\lambda_{u,G}$ характеризуется равенством

$$\lambda_{u,G} \{ y \in u : x \leq y \leq G_c(x) \} = c . \qquad (I.I)$$

Мера $\lambda_{u,G}$ инвариантна относительно действия полугруппы G, т.е. для любого измеримого $\mathfrak{A}$ и любого $c \geq 0$

$$\lambda_{u,G} (G_c^{-1}(\mathfrak{A})) = \lambda_{u,G}(\mathfrak{A}) .$$

Перейдем к изучению условных мер. Пусть P — мера на борелевской σ-алгебре $\sigma(D)$. Положим $P^c = P G_c^{-1}$. Полугруппу G будем считать допустимой для меры P, если для любого $c \geq 0$ на множестве S справедливо соотношение $P^c \ll P$.

Будем предполагать, что разбиение U регулярно, т.е. существуют условные меры $P_u, u \in S|U$ такие, что $P_u(u) = 1$ и для любого $V \in \sigma(\mathbb{D})$

$$P(V \cap S) = \int_{S/U} P_u(V) P_U(du).$$

Здесь P_U – фактор – мера, порожденная сужением P на S и расслоением U. Задача состоит в том, чтобы дать простое описание семейства условных мер P_u.

ТЕОРЕМА I. Если полугруппа G допустима для меры P и подчиняется сделанным выше предположениям, то условные меры P_u абсолютно непрерывны относительно $\lambda_{u,G}$, причем плотность имеет вид

$$\frac{dP_u}{d\lambda_{u,G}}(G_c(y)) = \left[\frac{dP^c}{dP}(G_c(y))\right]^{-1} \cdot \mathcal{K}_u , \tag{I.2}$$

где $y \in u \subset S$, а $\mathcal{K}_u$ – нормирующий множитель.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямая проверка показывает, что фактор – меры и условные меры исходной меры P и сдвинутых мер P^c связаны соотношениями

$$(P^c)_U = P_U ; \quad (P_u)^c = (P^c)_u .$$

ЛЕММА I. При P_U – почти всех u для всех $c \geqslant 0$ мера $(P_u)^c$ абсолютно непрерывна относительно P_u.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем c. Для любого $V \in \sigma(\mathbb{D})$

$$P^c(V \cap S) = \int_S \mathbb{1}_V \frac{dP^c}{dP}(x) P(dx) =$$

$$= \int_{S/U} P_U(du) \int_u \frac{dP^c}{dP}(x) \mathbb{1}_V P_u(dx) .$$

Отсюда следует, что для P_U – почти всех u при P_u – почти всех x

$$\frac{d(P^c)_u}{dP_u}(x) = \frac{d(P_u)^c}{dP_u}(x) = \frac{dP^c}{dP}(x) . \tag{I.3}$$

Следовательно, равенство (I.3) выполняется для P_U – почти всех u при почти всех $c \geqslant 0$. В этом случае можно воспользоваться следующим элементарным результатом.

ЛЕММА 2. Пусть $M \subset [0;+\infty)$, M содержит нуль, является полугруппой по сложению и имеет полную меру. Тогда $M = [0;+\infty)$

Применим лемму 2 к множеству $\{c : P_u^c \ll P_u\}$. Видим, что $P_u^c \ll P_u$ при всех $c \geqslant 0$. Из [9.стр.151] следует теперь, что $P_u^c \ll \lambda_{u,G}$ при всех $c \geqslant 0$.

Из (I.3) следуют теперь формулы для плотностей:

$$\frac{d(P_u)^c}{d\lambda_{u,G}}(x) = \frac{dP_u}{d\lambda_{u,G}}(x) \; \frac{d(P_u)^c}{dP_u}(x) = \frac{dP_u}{d\lambda_{u,G}}(x) \; \frac{dP^c}{dP}(x) .$$

С другой стороны, пользуясь инвариантностью $\lambda_{u,G}$, найдем

$$\frac{d(P_u)^c}{d\lambda_{u,G}}(x) = \frac{dP_u}{d\lambda_{u,G}}(y) , \quad x = G_c(y) .$$

Сравнивая полученные выражения, найдем

$$\frac{dP_u}{d\lambda_{u,G}}(G_c(y)) = \frac{dP_u}{d\lambda_{u,G}}(y) \Big/ \frac{dP^c}{dP}(G_c(y)) .$$

Варьируя $G_c(y)$ в пределах u , получаем (I.2)

§ 2. Преобразования скачков

В этом параграфе мы изучим свойства одного класса полугрупп в пространстве Скорохода ($\mathbb{D}[0; 1]$; d_0). Определение пространства $\mathbb{D}$ и метрики d_0 см.например в [10, стр.158].

Пусть $A_1 \ldots A_\mu$ - конечное число открытых множеств в R^1, отделенных от нуля: $A_m = \bigcup_k (\alpha_{k,m} ; \beta_{k,m})$ - объединение конечного или счетного числа открытых непустых интервалов. Пусть $\Theta_1 \ldots \Theta_\mu$ - непересекающиеся относительно открытые интервалы на отрезке $[0;1]$.

Положим $Z = \bigcup_{m=1}^{\mu} A_m \times \Theta_m$.

Функцию $v : R^1 \times [0;1] \to R^1$ будем называть скоростью преобразования скачков, если:

1. v непрерывна на каждом из множеств $A_m \times \Theta_m$ по паре переменных
2. $v^{-1}\{0\} = R^1 \times [0,1] \setminus Z$.
3. Если $v > 0$ на $(\alpha_{k,m} ; \beta_{k,m}) \times \Theta_m$, то требуем, что функция

$$(x,t) \longrightarrow \int_{\alpha_{k,m}}^{x} \frac{d\omega}{v(\omega,t)}$$

была конечна и непрерывна на $(\alpha_{k,m} ; \beta_{k,m}) \times \Theta_m$, но

$$\int_{\alpha_{k,m}}^{\beta_{k,m}} \frac{d\omega}{v(\omega,t)} = +\infty . \tag{2.1}$$

Если $v < 0$ на $(\alpha_{k,m} ; \beta_{k,m}) \times \Theta_m$, то требуем, чтобы функция

$$(x,t) \longrightarrow \int_{x}^{\beta_{k,m}} \frac{d\omega}{v(\omega,t)}$$

была конечна и непрерывна на $(\alpha_{k,m};\beta_{k,m})\times\Theta_m$, но

$$\int_{\alpha_{k,m}}^{\beta_{k,m}} \frac{d\omega}{v(\omega,t)} = -\infty. \tag{2.2}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ядром полугруппы преобразований со скоростью v назовем функцию $g:[0,+\infty)\times Z\to R^1$, которая является при $c\geq 0$, $(\varkappa,t)\in Z$ решением уравнения

$$\int_{\varkappa}^{g(c,\varkappa,t)} \frac{d\omega}{v(\omega,t)} = c. \tag{2.3}$$

Предположим для определенности, что $\varkappa\in(\alpha_{k,m};\beta_{k,m})$ и $v(\cdot,\cdot)>0$ на $(\alpha_{k,m};\beta_{k,m})\times\Theta_m$. В силу (2.1) уравнение (2.3) однозначно разрешимо относительно g, причем при $c>0$

$$\varkappa< g(c,\varkappa,t)<\beta_{k,m},\ \lim_{c\to\infty} g(c,\varkappa,t)=\beta_{k,m}.$$

Единственность следует из знакопостоянства скорости v. В любом случае $g(\cdot,\varkappa,t)$ - строго монотонная функция, $g(0,\varkappa,t)=\varkappa$, $\lim_{c\to\infty} g(c,\varkappa,t)\in\{\alpha_{k,m};\beta_{k,m}\}$, и значение предела определяется в зависимости от знака v. В силу непрерывности v имеем

$$g'_c(c,\varkappa,t) = v(g(c,\varkappa,t),t) \tag{2.4}$$

$$g'_\varkappa(c,\varkappa,t) = [v(\varkappa,t)/v(g(c,\varkappa,t),t)]^{-1}. \tag{2.5}$$

Важнейшее свойство ядра, позволяющее строить полугруппы преобразований, состоит в том, что

$$g(c_1+c_2,\varkappa,t) = g(c_1, g(c_2,\varkappa,t),t). \tag{2.6}$$

Равенство (2.6) немедленно следует из определения g.

Через $\mathbb{D}_Z$ обозначим множество функций на отрезке $[0;1]$, имеющих хотя бы один скачок, такой, что пара {(величина скачка, момент скачка)} принадлежит Z, и не имеющих таких скачков, что эта пара лежит на границе Z. Заметим, что поскольку множество $\bigcup_m A_m$ отделено от нуля, то количество скачков упомянутого вида конечно.

Для любого $x\in\mathbb{D}_Z$ существует единственное разложение

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t), \tag{2.7}$$

где

$$x_1(t)=\sum_{k=1}^{n_x} \mathbb{1}_{\{t>t_k^x\}}\,\varepsilon_k^x,\ (\varepsilon_k^x,t_k^x)\in Z, \tag{2.8}$$

а функция $x_{\mathfrak{z}}(t)$ непрерывна в точках t_k^x и не имеет скачков, лежащих в $\mathfrak{Z}$.

Полугруппой преобразований $G_c : \mathbb{D}_{\mathfrak{z}} \longrightarrow \mathbb{D}_{\mathfrak{z}}$ с ядром g назовем семейство отображений, определяемое формулой

$$[G_c(x)](t) = x_{\mathfrak{z}}(t) + \sum_{k=1}^{n_x} \mathbb{1}_{\{t > t_k^x\}} \, g(c, \varepsilon_k^x, t_k^x). \tag{2.9}$$

Неформальное описание действия полугруппы G таково. Берется такой скачок траектории, произошедший на интервале θ_m, величина которого лежит в A_m. Величину скачка начинаем изменять, сохраняя момент скачка t. Величина скачка изменяется таким образом, что скорость её изменения равна $v(\varkappa, t)$ в тот момент, когда величина скачка равна $\varkappa$. Такое преобразование осуществляется одновременно над всеми скачками, попадающими в зону преобразования $\mathfrak{Z}$.

Простейшие свойства семейства G состоят в следующем:

1. При фиксированном c $G_c : \mathbb{D}_{\mathfrak{z}} \longrightarrow \mathbb{D}_{\mathfrak{z}}$.
2. G_0 есть тождественное отображение.
3. G_c взаимно однозначно при любом c. Это следует из монотонности функции $g(c, \cdot, t)$.
4. $G_{c_1} \circ G_{c_2} = G_{c_1 + c_2}$, т.е. G - полугруппа. Это немедленно следует из (2.6).
5. При любом x соответствие $c \longleftrightarrow G_c(x)$ взаимнооднозначно и взаимно непрерывно.

Следующим свойством является гладкость орбит. Однако в пространстве $\mathbb{D}$ понятие гладкости требует уточнения. Символом $\|\cdot\|$ обозначаем равномерную норму в $\mathbb{D}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $I : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{D}$. Будем говорить, что $I' \in \mathbb{D}$ является производной отображения I в точке $c \in \mathbb{R}^1$, если

$$\| I(c+s) - I(c) - I'(c)\, s \| = \bar{o}(s) \quad \text{при} \quad s \longrightarrow 0.$$

2. Пусть $\Phi : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^1$, $\ell \in \mathbb{D}$, $x \in \mathbb{D}$. Будем говорить о производной функционала Φ в направлении ℓ в точке x, если существует предел

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \ell}(x) = \lim_{c \to 0} c^{-1} [\Phi(x + c\ell) - \Phi(x)].$$

ЛЕММА 3. Для $x \in \mathbb{D}_{\mathfrak{z}}$ отображение $I_x(c) = G_c(x)$ имеет производную при любом $c \geq 0$. При этом

$$[I_x'(c)](t) = \sum_{k=1}^{n_x} \mathbb{1}_{\{t > t_k^x\}} \, g_c'(c, \varepsilon_k^x, t_k^x). \tag{2.10}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай $c = 0$. Равномерно по $t \in [0; 1]$ справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^{n_x} \mathbb{1}_{\{t>t_k^x\}} \left(g(c,\varepsilon_k^x,t_k^x) - g(0,\varepsilon_k^x,t_k^x) - c g_c'(0,\varepsilon_k^x,t_k^x)\right) = \bar{\bar{o}}(c) ,$$

равносильная (2.10). Общий случай сводится к случаю $c = 0$ благодаря тождеству

$$G_{c+\Delta c}(x) - G_c(x) = G_{\Delta c}\left[G_c(x)\right] - G_c(x) .$$

Лемма доказана.

В соответствии с общей теорией, изложенной в § I, множество $\mathbb{D}_z$ расслаивается на одномерные "волокна". Разбиение будем обозначать через $\mathbb{U}$, его классы ("волокна") - через u. Нетрудно установить регулярность разбиения $\mathbb{U}$.

Следующий результат показывает, что семейство полугрупп преобразований скачков достаточно богато. Для почти любой точки y пространства $\mathbb{D}$ и любого направления $\ell \in \mathbb{D}$ можно построить полугруппу так, что вблизи y касательные к орбитам полугруппы почти параллельны ℓ.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $y \in \mathbb{D}$, и множество точек разрыва функции y всюду плотно в $[0; 1]$. Тогда для любых $\varepsilon > 0$, $\ell \in \mathbb{D}$ найдутся область преобразования z, поле скоростей v и $\delta > 0$ такие, что δ - окрестность y принадлежит $\mathbb{D}_z$ и при $d_0(y,y') < \delta$

$$d_0(\ell ; G_c'(y')\big|_{c=0}) < \varepsilon .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку ступенчатые функции плотны в $\mathbb{D}$ в равномерной норме, то можно считать, что ℓ - ступенчатая функция

$$\ell(t) = \sum_{k=1}^{n_\ell} \mathbb{1}_{\{t>t_k^\ell\}} \varepsilon_k^\ell .$$

Существует плотное в $[0;1]$ счетное множество $\{t_j\}$ точек разрыва функции y таких, что разрывы $\varepsilon_j = y(t_j+0) - y(t_j-0)$ различны. Среди $\{t_j\}$ выберем набор $\{t_k^y\}$, $1 \leq k \leq n_\ell$ таким образом, чтобы

$$t_{k-1}^\ell < t_k^y \leq t_k^\ell , \quad \left| \log \frac{t_k^\ell - t_{k+1}^\ell}{t_k^y - t_{k+1}^y} \right| < \frac{\varepsilon}{4} . \qquad (2.11)$$

В качестве A_1 возьмем объединение непересекающихся малых отрезков с центрами в точках

$$\varepsilon_k^y = y(t_k^y + 0) - y(t_k^y - 0) .$$

Отрезки выберем настолько малыми, чтобы среди скачков функции y только скачки ε_k^y попадали в замыкание A_1. Положим

$\theta_1 = [0;1]$, $Z = A_1 \times \theta_1$.Поле скоростей $v(\cdot,\cdot)$ выберем так, чтобы

$$v(\varepsilon_k^y, t_k^y) = \varepsilon_k^\ell . \qquad (2.12)$$

В остальном $v(\cdot,\cdot)$ можно выбрать произвольно, соблюдая только выполнение условий I-3, налагаемых на поле скоростей. В силу непрерывности v на Z найдется такое $\delta_1 > 0$, что из

$$\max_k \max\{|\varepsilon_k^y - \tilde{\varepsilon}|, |t_k^y - \tilde{t}|\} < \delta_1 \qquad \text{следует}$$

$$\max_k |v(\tilde{\varepsilon}, \tilde{t}) - \varepsilon_k^\ell| < \frac{\varepsilon}{4 n_\ell} . \qquad (2.13)$$

Существует такой шар V радиуса δ с центром в y, что $w \in V$ имеет ровно n_ℓ скачков, лежащих в A_1. Обозначим их величины и моменты через (ε_k^w, t_k^w). При этом, при малом δ

$$|\varepsilon_k^w - \varepsilon_k^y| < \delta_1 ; \quad |t_k^w - t_k^y| \leq \delta_1 . \qquad (2.14)$$

Касательная ℓ^w, проведенная к орбите полугруппы в точке w, рассчитывается по формуле (2.10). Подставляя в (2.10) выражение (2.4), находим

$$\ell^w(t) = \sum_{k=1}^{n_\ell} \mathbb{1}_{\{t > t_k^w\}} v(\varepsilon_k^w, t_k^w) .$$

В силу (2.14) можно применить (2.13), откуда

$$\left\| \ell^w(t) - \sum_{k=1}^{n_\ell} \mathbb{1}_{\{t > t_k^w\}} \varepsilon_k^\ell \right\| \leq n_\ell \cdot \frac{\varepsilon}{4 n_\ell} = \frac{\varepsilon}{4} . \qquad (2.15)$$

В свою очередь, при достаточно малом δ_1, из (2.14) и (2.11) следует оценка

$$\max_k \left| \log \frac{t_k^\ell - t_{k+1}^\ell}{t_k^w - t_{k+1}^w} \right| < \frac{\varepsilon}{4} , \qquad \text{откуда}$$

$$d_0 \left(\sum_{k=1}^{n_\ell} \mathbb{1}_{\{t > t_k^w\}} \varepsilon_k^\ell ; \ell \right) \leq \frac{\varepsilon}{4} . \qquad (2.16)$$

Из (2.15) и (2.16) вытекает требуемое неравенство

$$d_0(\ell^w; \ell) \leq \frac{\varepsilon}{2} .$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Фактически мы попутно доказали, что отображение $w \to \ell^w$ непрерывно, как отображение из $\mathbb{D}_Z$ в $\mathbb{D}$, то есть касательная к орбите меняется непрерывно.

§ 3 Условные распределения функционалов

Пусть G - полугруппа преобразований, изученная в предыдущих параграфах, U - расслоение множества $\mathbb{D}_z$ на орбиты полугруппы. Пусть P - мера в $\mathbb{D}$, и существуют фактор-мера P_U и семейство условных мер $\{P_u\}$. Предположим, что условные меры абсолютно непрерывны относительно инвариантных мер $\lambda_{u,G}$, определенных соотношением (I.I). Обозначим

$$p_u(x) = \frac{dP_u}{d\lambda_{u,G}}(x).$$

Пусть $\Phi : \mathbb{D} \to R^1$ - измеримый функционал, дифференцируемый вдоль орбит в следующем смысле. Для P - почти всех $x \in \mathbb{D}_z$ функция $\Phi_x : C \to \Phi(G_c(x))$ дифференцируема при почти всех c. Наша цель - описать условные распределения функционала Φ.

ТЕОРЕМА 3. Предположим, что при P - почти всех x функция Φ_x либо монотонна, либо абсолютно непрерывна и ее производная почти наверное отлична от нуля. Тогда условное распределение $P_u\Phi^{-1}$ абсолютно непрерывно относительно меры Лебега λ и плотность вычисляется по формуле

$$\frac{dP_u\Phi^{-1}}{d\lambda}(\gamma) = \sum_{\{c : \Phi_x(c) = \gamma\}} \frac{p_u(G_c(x))}{|\Phi_x'(c)|}. \tag{3.I}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мера $P_u\Phi^{-1}$ может быть получена следующим образом. В R^1 введем меру $\tilde{P}_u$, определив ее плотность соотношением

$$\frac{d\tilde{P}_u}{d\lambda}(c) = p_u(G_c(x)).$$

Тогда $P_u\Phi^{-1} = \tilde{P}_u\Phi_x^{-1}$. Для абсолютно непрерывных функций формула (3.I) получена для переноса гауссовской меры в [II]. Для монотонных функций формула (3.I) содержит в правой части единственное слагаемое и легко проверяется прямым вычислением.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Для допустимых полугрупп существование плотности гарантируется теоремой I, причем плотность вычисляется по формуле (I.2).

2. Дифференцируемость Φ_x может проверяться с помощью следующей леммы.

ЛЕММА 4. Пусть $I : R^1 \to \mathbb{D}; \Phi : \mathbb{D} \to R^1$, отображение I имеет производную I' в некоторой точке $c \in R^1$, функционал Φ имеет производную $\frac{\partial\Phi}{\partial I'}$ в точке $I(c)$. Предположим, что в некоторой окрестности V точки $I(c)$ функционал Φ удовлетворяет условию Липшица в равномерной норме:

$$\forall x, y \in V \quad |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L\|x - y\|. \tag{3.2}$$

Тогда функция $\Phi \circ I$ дифференцируема в точке c :

$$(\Phi \circ I)'(c) = \frac{\partial \Phi}{\partial I'}(I(c)).$$

§ 4. Преобразования процессов с независимыми приращениями

Пусть $X_t, t \in [0; 1]$ – стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями. Пусть P – соответствующая ему мера в $\mathbb{D}[0;1]$, а Π – его структурная мера, т.е.

$$\ln E\exp\{i\tau(X_s - X_0)\} = i\gamma(s)\tau - \frac{\sigma^2(s)}{2}\tau^2 + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^s \left(e^{i\tau\varkappa} - 1 - \frac{i\tau\varkappa}{1+\varkappa^2}\right)\Pi(d\varkappa, ds'). \tag{4.1}$$

Обоснование формулы (4.1) и другие свойства процесса X_t можно найти в [8]. Для нас важно, что структурная мера $\Pi(\Delta)$ равна среднему числу скачков траектории X_t, величина которых $\varkappa$ и момент скачка t удовлетворяют условию $(x, t) \in \Delta$.

Известно также, что количества скачков, попадающих в непересекающиеся множества $\Delta_1, \Delta_2 \subset R^1 \times [0;1]$ независимы.

Пусть G – полугруппа преобразований скачков, изученная в § 2.

ЛЕММА 5. Для любого $c \geq 0$ процесс $[G_c X](t)$ является стохастически непрерывным процессом с независимыми приращениями, а его структурная мера Π^c определяется, как образ меры Π при отображении

$$\begin{aligned} \Gamma_c &: (\varkappa, s) \longrightarrow (g(c, \varkappa, s), s) \quad \text{при} \quad (\varkappa, s) \in Z; \\ \Gamma_c &: (\varkappa, s) \longrightarrow (\varkappa, s) \quad \text{при} \quad (\varkappa, s) \notin Z. \end{aligned} \tag{4.2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приращение процесса $G_c X$ на любом отрезке $[s_1; s_2] \subset [0;1]$ полностью определяется поведением приращения процесса X на $[s_1; s_2]$. Поэтому независимость приращений сохраняется при переходе от X к $G_c(X)$.

Если траектория $X(\cdot)$ непрерывна в момент времени t, то и $G_c X(\cdot)$ непрерывна в t, поскольку G_c преобразует только скачки процесса. Отсюда следует стохастическая непрерывность $G_c X$.

Пусть $\Delta \subset R^1 \times [0;1]$. Число скачков функции $G_c X$, попавших в Δ, равно числу скачков функции X, попавших в $\Gamma^{-1}(\Delta)$.

Переходя к средним значениям числа скачков, находим

$$\Pi^c(\Delta) = \Pi\{\Gamma^{-1}(\Delta)\},$$

что и требовалось доказать.

Основой дальнейших рассуждений служит такой критерий абсолютной непрерывности мер [7,8].

ТЕОРЕМА А.В.Скорохода. Пусть P_1, P_2 - две меры в $\mathbb{D}$, отвечающие процессам с независимыми приращениями и отличающиеся конечными структурными мерами: $\Pi_1 \neq \Pi_2$. Для абсолютной непрерывности P_1 относительно P_2 необходимо и достаточно, чтобы мера Π_1 была абсолютно непрерывна относительно меры Π_2. При этом

$$\frac{dP_1}{dP_2}(\xi) = \exp\Big\{\sum_{(\varkappa,t)} \ln\frac{d\Pi_1}{d\Pi_2}(\varkappa,t)\Big\}\exp\Big\{(\Pi_2-\Pi_1)(R^1\times[0;1])\Big\}, \quad (4.3)$$

где сумма берется по всем скачкам траектории ξ.

ЗАМЕЧАНИЯ. I. Формула (4.3) имеет смысл, поскольку конечность структурных мер гарантирует конечность числа скачков.

2. Формула (4.3) имеет место и для бесконечных структурных мер, если они совпадают на некотором множестве, а вне его конечны.

Следующая теорема описывает условные распределения процесса на орбитах.

ТЕОРЕМА 4. Пусть на множестве Z мера Π имеет условные распределения вдоль оси скачков, абсолютно непрерывные относительно одномерной меры Лебега и плотность

$$n(\varkappa,t) = \frac{\Pi(d\varkappa,t)}{d\lambda}. \quad (4.4)$$

Тогда полугруппа G является допустимой относительно меры P, условные распределения P_u на орбитах существуют и их плотности относительно инвариантных мер вычисляются по формуле

$$\frac{dP_u}{d\lambda_{u,G}}(G_c(y)) = \frac{dP_u}{d\lambda_{u,G}}(y)\exp\Big\{\sum_{(\varepsilon_k^y,t_k^y)\in Z} \ln\frac{n(g(c,\varepsilon_k^y,t_k^y),t_k^y)\,v^{-1}(\varepsilon_k^y,t_k^y)}{n(\varepsilon_k^y,t_k^y)\,v^{-1}(g(c,\varepsilon_k^y,t_k^y),t_k^y)}\Big\}, \quad (4.5)$$

где $y \in u \in \mathbb{D}_Z | U, (\varepsilon_k^y, t_k^y)$ - величина и моменты скачка функции y.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 5 следует, что

$$\frac{\Pi^c(d\varkappa,t)}{d\lambda}\Big|_{\Gamma_c(\varkappa,t)} = \frac{\Pi(d\varkappa,t)}{d\lambda}\Big|_{(\varkappa,t)}\cdot\Big[\frac{\partial\Gamma_c}{\partial\varkappa}(\varkappa,t)\Big]^{-1} =$$

$$= \frac{\Pi(d\varkappa,t)}{d\lambda}\Big|_{(\varkappa,t)}\cdot\big[g'_\varkappa(c,\varkappa,t)\big]^{-1}.$$

Подставляя сюда (4.4) и пользуясь формулой (2.5), находим

$$\left.\frac{\Pi^c(d\varkappa,t)}{d\lambda}\right|_{(g(c,\varkappa,t),t)}=n(\varkappa,t)\left[\frac{v(g(c,\varkappa,t),t)}{v(\varkappa,t)}\right]^{-1}. \tag{4.6}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d\Pi^c}{d\Pi}(g(c,\varkappa,t),t)=\left.\left[\frac{\Pi^c(d\varkappa,t)}{d\lambda}\Big/\frac{\Pi(d\varkappa,t)}{d\lambda}\right]\right|_{(g(c,\varkappa,t),t)}=$$

$$=\frac{n(\varkappa,t)}{n(g(c,\varkappa,t)}\cdot\frac{v(g(c,\varkappa,t),t)}{v(\varkappa,t)}. \tag{4.7}$$

Обозначим через $\mathbb{P}^c$ меру в $\mathbb{D}$, отвечающую процессу со структурной мерой Π^c и, подставляя (4.7) в (4.3), найдем

$$\frac{d\mathbb{P}^c}{d\mathbb{P}}(G_c(y))=\exp\left\{\sum_{(\varepsilon_k^y,t_k^y)\in Z}\ln\frac{n(\varepsilon_k^y,t_k^y)v^{-1}(g(c,\varepsilon_k^y,t_k^y),t_k^y)}{n(g(c,\varepsilon_k^y,t_k^y),t_k^y)v^{-1}(\varepsilon_k^y,t_k^y)}\right\}. \tag{4.8}$$

Здесь (ε_k^y,t_k^y) – величина и момент скачка функции y. Все слагаемые в правой части (4.3), отвечающие парам $(\varepsilon_k^y,t_k^y)\notin Z$, равны нулю, т.к. $\frac{d\Pi^c}{d\Pi}=1$ вне Z. Применимость (4.3) гарантируется замечанием 2 к теореме Скорохода.

Подставляя (4.8) в (I.2), получим (4.5).

Литература

I. Д а в ы д о в Ю.А. Об абсолютной непрерывности распределений функционалов от случайных процессов. – Теория вероятн. и ее примен., 1978, т.XXIII, № I, с.228-229.
2. Д а в ы д о в Ю.А. О сильной сходимости распределений функционалов от случайных процессов. – Теория вероятн.и ее примен. 1979, т.XXIУ, № 2, с.429.
3. Д а в ы д о в Ю.А. О сильной сходимости распределений функционалов от случайных процессов.I. – Теория вероятн.и ее примен., 1980, т.XXУ, № 4, с.782-800.
4. Д а в ы д о в Ю.А. О сильной сходимости распределений функционалов от случайных процессов.II. – Теория вероятн.и ее примен., 198I, т.XXУI, № 2, с.266-286.
5. Л и ф ш и ц М.А. Метод расслоений и его применение к изучению функционалов от случайных процессов. – Теория вероятн. и ее примен., 1982, т.XXУII, № 2, с.67-80.
6. Л и ф ш и ц М.А. Об абсолютной непрерывности распределений функционалов от случайных процессов. – Теория вероятн. и ее примен., 1982, т.XXУII, № 3,с.559-566.

7. С к о р о х о д А.В. Об абсолютной непрерывности мер, соответствующих случайным процессам.I. – Теория вероятн.и ее примен., 1957, II, № 2, с.418–444.
8. С к о р о х о д А.В. Случайные процессы с независимыми приращениями. М., 1964, 278 с.
9. Л и ф ш и ц М.А. Некоторые задачи теории случайных процессов, связанные с отображением мер. – Автореферат канд.дисс., Л., 1981.
10. Б и л л и н г с л и П. Сходимость вероятностных мер. М., 1977, 351 с.
11. G e m a n D., H o r o w i t z J. Occupation times for smooth stationary processes. – Ann.Prob., 1973, v.1, N 1, p.131–137.