Если полиномы $R(z)$ выбирать так, чтобы $a_{n-1}=1$, то будут справедливы неравенства $a_{2\nu+1}>0$, $\nu=0,1,\ldots,n/2-1$. Учитывая, кроме того, что $\mu_{2\nu+1}>0$ (см. [2]) при $a_1=a_3=\cdots=a_{n-3}=0$, получим из (15)

$$\inf K_1=\frac{\mu_{n+1}}{4}. \tag{16}$$

Таким образом, нижняя грань K_1 отвечает полиному $R(z)=z^{n-1}$ или соответствующему полиному $\rho(\xi)=(\xi-1)(\xi+1)^{n-1}$. Разностная схема вида (2), отвечающая последнему полиному, очевидно, неустойчива.

Далее вычислим B_0. Имеем

$$B_0=\lim_{\xi\to 1}\frac{d\rho(\xi)}{d\xi}=\lim_{z\to\infty}\frac{d}{d\xi}\left\{\frac{R(z)}{\left[\frac{1}{2}(z-1)\right]^n}\right\}=2^{n-1}a_{n-1}=2^{n-1}.$$

После этого с учетом (16) получим

$$\inf\frac{K_1}{B_0}=\frac{\inf K_1}{2^{n-1}}=\frac{\mu_{n+1}}{2^{n+1}}. \tag{17}$$

Тем самым, доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Среди устойчивых схем вида* (2) (*n — четное*) *наивысшей степени* $s=n+2$ *не существует схемы, для которой величина* K_1/B_0 *достигала бы минимума.*

Теорема 2. *Для всякой устойчивой схемы вида* (2) (*n — четное*) *наивысшей степени* $s=n+2$ *имеет место неравенство* $K_1/B_0>\mu_{n+1}/2^{n+1}$.

Теорема 3. *Для всякого произвольного положительного числа* ε *можно построить устойчивую схему вида* (2) (*n — четное*) *наивысшей степени* $s=n+2$ *такую, что* $K_1/B_0<\mu_{n+1}/2^{n+1}+\varepsilon$.

Поступила в редакцию
9.06.1962

Цитированная литература

1. А. Н. Тихонов, А. Д. Горбунов. Асимптотические разложения погрешности разностного метода решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 4, 537—548.
2. G. Dahlquist. Convergens and stability in the numerical integration of ordinary differential equations. Math. skand., 1956, 4, № 1, 33—53.

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Н. Н. ЯНЕНКО

(*Челябинск*)

Рассмотрим смешанную задачу Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\varkappa(x_1,x_2,t)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right]+\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\varkappa(x_1,x_2,t)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right],\qquad \varkappa\geqslant\varkappa_0>0, \tag{1}$$

$$u(x_1,x_2,0)=\varphi(x_1,x_2),\qquad (x_1,x_2)\in D, \tag{2}$$

$$u(x_1,x_2,t)=f(x_1,x_2,t),\qquad (x_1,x_2,t)\in\{\gamma\times T\}, \tag{3}$$

где D — прямоугольная область плоскости $x_1,x_2: 0\leqslant x_1\leqslant 1,\ 0\leqslant x_2\leqslant 1$, γ — ее граница, T — сегмент $0\leqslant t\leqslant t_0$, $\varkappa(x_1,x_2,t)$ — достаточно гладкая функция своих аргументов.

В области $\overline{D}$ построим сетку $\overline{D}_h$:

$$x_{1i} = ih, \quad x_{2j} = jh, \qquad 0 \leqslant i \leqslant N+1, \quad 0 \leqslant j \leqslant N+1, \quad (N+1)h = 1,$$

в которой будем определять сеточные функции

$$u_{ij} = u(ih, jh).$$

Рассмотрим схему расщепления (см. [1])

$$\begin{aligned} \frac{U^{n+1/2} - U^n}{\tau} &= \Lambda_1 [\alpha U^{n+1/2} + (1-\alpha) U^n], \\ \frac{U^{n+1} - U^{n+1/2}}{\tau} &= \Lambda_2 [\alpha U^{n+1} + (1-\alpha) U^{n+1/2}], \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\Lambda_s = \frac{\Delta_s}{h} \varkappa \frac{\Delta_{-s}}{h}, \qquad \Delta_s = T_s - E, \qquad \Delta_{-s} = E - T_s^{-1},$$

$$T_1 U(x_1, x_2, t) = U(x_1 + h, x_2, t), \qquad T_2 U(x_1, x_2, t) = U(x_1, x_2 + h, t), \tag{5}$$

$$U^{n+s/2}(x_1, x_2) = U\left[x_1, x_2, \left(n + \frac{s}{2}\right)\tau\right], \qquad s = 0, 1.$$

Уравнения (4) перепишем в виде

$$\begin{aligned} &A_s U^{n+s/2} - B_s U^{n+(s-1)/2} = 0, \qquad s = 1, 2, \\ &A_s = E - \alpha\tau\Lambda_s, \qquad B_s = E + (1-\alpha)\tau\Lambda_s. \end{aligned} \tag{6}$$

Для разностного решения $U^{n+s/2}$ уравнений (4) или (6) поставим следующие начальные и краевые условия:

$$U^0(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2), \qquad U^{n+s/2}(x_1, x_2) = f\left[x_1, x_2\left(n + \frac{s}{2}\right)\tau\right], \tag{7}$$

$$(x_1, x_2) \in \gamma.$$

Если через

$$u^{n+s/2} = u\left[x_1, x_2\left(n + \frac{s}{2}\right)\tau\right]$$

обозначить точное решение дифференциальной задачи, через $v^{n+s/2} = U^{n+s/2} - u^{n+s/2}$ функцию отклонения разностного решения от точного, то для $v^{n+s/2}$ получаем неоднородную систему

$$A_s v^{n+s/2} - B_s v^{n+s-1/2} = F_s^{n+1/2} + R_s^n, \tag{8}$$

$$v^0 = 0, \quad v^{n+s/2}(x_1, x_2) = 0, \qquad (x_1, x_2) \in \gamma. \tag{9}$$

Здесь

$$\begin{aligned} &F_1^{n+1/2} = \tau\psi^{n+1/2}, \qquad F_2^{n+1/2} = -\tau\psi^{n+1/2}, \\ &\psi(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\varkappa\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\varkappa\frac{\partial u}{\partial x_2}\right), \end{aligned} \tag{10}$$

R_s^n — остаточные члены, имеющие порядок $O(\tau^{1+s})$, $\varepsilon > 0$ — степень аппроксимации.

Будем предполагать τ, h^2 связанными законом предельного перехода:

$$\tau/h^2 = \gamma,$$

где γ — произвольная положительная константа.

Операторы A_1, A_2 обратимы (см. лемму 2), поэтому уравнения (8) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} v^{n+1/2} &= C_1 v^n + A_1^{-1}[F_1^{n+1/2} + R_1^n], \\ v^{n+1} &= C_2 v^{n+1/2} + A_2^{-1}[F_2^{n+1/2} + R_2^n], \quad C_s = A_s^{-1} B_s. \end{aligned} \tag{11}$$

Исключая из (11) $v^{n+1/2}$, получаем

$$v^{n+1} = Cv^n + \Phi^n, \qquad C = C_2C_1, \quad \Phi^n = F^n + R^n, \quad R^n = C_2A_1^{-1}R_1^n + A_2^{-1}R_2^n, \tag{12}$$

$$F^n = C_2A_1^{-1}F_1^{n+1/2} + A_2^{-1}F_2^{n+1/2} = (C_2A_1^{-1} - A_2^{-1})\,F_1^{n+1/2} = \tau\,(C_2A_1^{-1} - A_2^{-1})\,\psi^{n+1/2}. \tag{12'}$$

Мы дадим теперь анализ корректности и аппроксимации схемы (12) в L_2. Сеточное двумерное пространство D_h можно рассматривать как совокупность (теоретико-множественную сумму) одномерных сеточных пространств, соответствующих фиксированной x_1- или x_2-линии сетки.

Будем обозначать: через L_j — одномерное пространство точек j-й x_1-линии

$$x_1 = ih, \quad i = 0, 1, \ldots, N+1, \qquad x_2 = jh, \quad j \text{ фиксировано};$$

через M_i — пространство точек

$$x_1 = ih, \qquad i \text{ фиксировано}, \qquad x_2 = jh, \quad j = 0, 1, \ldots, N+1.$$

Аналогично, $(N+2)^2$-мерные векторы v^n, определенные в $\overline{D}_h$, следует рассматривать как совокупность векторов в L_j или M_i:

$$v^n = \{y_j^n\}, \qquad y_j^n = \{v_{0j}^n, v_{1j}^n, \ldots, v_{N+1j}^n\},$$
$$v^n = \{z_i^n\}, \qquad z_i^n = \{v_{i0}^n, v_{i1}^n, \ldots, v_{iN+1}^n\}.$$

Соответственно этому операторы A_s, B_s, C_s, определенные в $\overline{D}_h$, можно рассматривать как совокупность операторов, действующих в пространствах L_j, M_i.

Будем обозначать через A_{1j}, B_{1j}, C_{1j} операторы, действующие в L_j, через A_{2i}, B_{2j}, C_{2j} — операторы, действующие в M_i. Тогда можно положить, например, для операторов C_s

$$C_1v^n = \{C_{1j}y_j^n\}, \qquad C_2v^n = \{C_{2i}z_i^n\}.$$

Отсюда следует

$$\|C_1\| \leqslant \max_j \|C_{1j}\|, \qquad \|C_2\| \leqslant \max_i \|C_{2i}\|.$$

Применяя оценки норм операторов с переменными коэффициентами (см. [2], [3]), получаем условие корректности эквивалентных схем (8), (11), (12) в L_2:

$$\frac{\varkappa_{\max}\cdot\tau}{h^2} \leqslant \frac{1}{2\,(1-2\alpha)}, \qquad 0 \leqslant \alpha < \tfrac{1}{2}, \text{ или } \tfrac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1. \tag{13}$$

Действительно, при этом условии

$$\|C_{sj}\| = 1 + O(\tau), \quad \|C_s\| = 1 + O(\tau), \qquad s = 1, 2.$$

В дальнейшем условие (13) мы будем предполагать выполненным.

На основании теоремы эквивалентности для сходимости схемы (12) достаточно установить аппроксимацию.

Оценим величину F^n по норме L_2:

$$F^n = (C_2A_1^{-1} - A_2^{-1})\,F_1^{n+1/2} = A_2^{-1}\,(B_2A_1^{-1} - E)\,F_1^{n+1/2}.$$

Так как $\|A_2^{-1}\| \leqslant 1$ (см. лемму 2), то достаточно оценить величину

$$g^n = (B_2A_1^{-1} - E)\,F_1^{n+1/2} = (B_2 - A_1)\,A_1^{-1}E_1^{n+1/2} =$$
$$= [(B_2 - E) - (A_1 - E)]\,A_1^{-1}F_1^{n+1/2} = h^n + k^n, \tag{14}$$
$$h^n = (1-\alpha)\,\tau\Lambda_2A_1^{-1}F_1^{n+1/2}, \qquad k^n = (E - A_1)\,A_1^{-1}F_1^{n+1/2}.$$

Сформулируем ряд лемм.

Пусть $v = \{v_{ij}\}$ — сеточная функция, определенная в $\overline{D}_h$, A — оператор, определяемый равенствами

$$Av_{ij} = \sum_{\alpha=0}^{N+1} a_{ij}^{\alpha}v_{\alpha j}. \tag{15}$$

Обозначим через $\delta_2 A$, $\delta_{-2} A$ операторы

$$\delta_2 A: \quad \delta_2 A v_{ij} = \sum_{\alpha=0}^{N+1} \Delta_2 a_{ij}^{\alpha} v_{\alpha j} = \sum_{\alpha=0}^{N+1} (a_{ij+1}^{\alpha} - a_{ij}^{\alpha})\, v_{\alpha j};$$

$$\delta_{-2} A: \quad \delta_{-2} A v_{ij} = \sum_{\alpha=0}^{N+1} \Delta_{-2} a_{ij}^{\alpha} v_{\alpha j} = \sum_{\alpha=0}^{N+1} (a_{ij}^{\alpha} - a_{ij-1}^{\alpha})\, v_{\alpha j}.$$

Очевидна справедливость равенств

$$\Delta_2 A \cdot v = (A + \delta_2 A)\, \Delta_2 v + \delta_2 A v,$$

$$\Delta_{-2} A \cdot v = (A + \delta_{-2} A)\, \Delta_{-2} v + \delta_{-2} A v,$$

$$\Delta_{-2}\Delta_2 A \cdot v = (A + \delta_2 A + \delta_{-2} A + \delta_{-2}\delta_2 A)\, \Delta_{-2}\Delta_2 v +$$

$$+ (\delta_{-2} A + \delta_{-2}\delta_2 A)\, \Delta_2 v + (\delta_2 A + \delta_{-2}\delta_2 A)\, \Delta_{-2} v + \delta_{-2}\delta_2 A \cdot v.$$

Лемма 1. *Если* $\delta_2 A = hB$, $\delta_{-2} A = hC$, $\delta_{-2}\delta_2 A = h^2 D$, *где* A, B, C, D — *некоторые операторы, и* $\|A\| \leqslant M_1$, $\|A^{-1}\| \leqslant M_1$, $\|B\| \leqslant M_1$, $\|C\| \leqslant M_1$, $\|D\| \leqslant M_1$, *где* M_1 *не зависит от* h, *то* $\delta_2 A^{-1} = hE$, $\delta_{-2} A^{-1} = hF$, $\delta_{-2}\delta_2 A^{-1} = h^2 G$ *и* $\|E\| \leqslant M_2$, $\|F\| \leqslant M_2$, $\|G\| \leqslant M_2$, M_2 *не зависит от* h.

Доказательство. Применяя к тождеству $AA^{-1} = I$ (единичная матрица) операцию δ_2, имеем

$$(A + \delta_2 A)\, \delta_2 A^{-1} + \delta_2 A A^{-1} = 0;$$

отсюда

$$\delta_2 A^{-1} = -(A + hb)^{-1} \cdot \delta_2 A \cdot A^{-1} = hE,$$

$$\|E\| = \|(A + hB)^{-1} \cdot BA^{-1}\| \leqslant \|(A + hB)^{-1}\| \cdot \|B\| \cdot \|A^{-1}\| \leqslant M_2.$$

Аналогично доказываются остальные оценки леммы.

Лемма 2.

$$\|A_1\| = \max\{1 + 2\lambda_{1j},\ \ 1 + 2\lambda_{Nj},\ \ 1 + 2\lambda_{ij} + 2\lambda_{i+1j}\}, \tag{16}$$

$$\|A_1^{-1}\| \leqslant 1, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant N, \tag{17}$$

где

$$\lambda_{ij} = \frac{\alpha\tau}{h^2}\, \varkappa_{i-1/2\,j} = \frac{\alpha\tau}{h^2} \left[\varkappa\left(\left(i - \frac{1}{2}\right) h;\ jh;\ \left(n + \frac{s}{2}\right)\tau\right)\right]^{\beta}.$$

Доказательство. Оператор A_1 определяется равенством

$$A_1 v_{ij} = -\lambda_{i-1j} v_{i-1j} + [1 + \lambda_{i-1j} + \lambda_{ij}]\, v_{ij} = \lambda_{ij} v_{i+1j}.$$

Применяя оценки характеристических корней по Гершгорину и учитывая самосопряженность оператора, получаем оценки (16), (17).

Лемма 3. *Если* $\varkappa(x_1, x_2, t)$ — *дважды дифференцируемая функция переменных* x_1, x_2, *то* $\delta_2 A_1 = hB$, $\delta_{-2} A_1 = hC$, $\delta_{-2}\delta_2 A_1 = h^2 D$, *где операторы* B, C, D *ограничены по норме константой, не зависящей от* h.

Учитывая гладкость $\varkappa$, самосопряженность операторов B, C, D и применяя оценки по Гершгорину, получаем утверждение.

Оценим теперь по норме величину g^n из (14). Слагаемое k^n без труда оценивается:

$$k^n = A_1^{-1}(E - A_1)\, F_1^{n+1/2} = \alpha\tau A_1^{-1} \Lambda_1 F_1^{n+1/2},$$

отсюда

$$\|k^n\| \leqslant \alpha\tau\, \|A_1^{-1}\|\, \|\Lambda_1 F_1^{n+1/2}\| \leqslant \alpha\tau\, \|\Lambda_1 F_1^{n+1/2}\|. \tag{18}$$

Оценим теперь

$$h^n = (1 - \alpha)\, \tau \Lambda_2 A_1^{-1} F_1^{n+1/2}.$$

Справедливо соотношение

$$\Lambda_2 A_2^{-1} F_{ij} = \Delta_{-2}(\mu_{ij} \Delta_2 A_1^{-1})\, F_{ij} = \mu_{ij} \Delta_{-2}\Delta_2 A_1^{-1} F_{ij} + (\Delta_{-2}\mu_{ij})\, \Delta_2 A_1^{-1} F_{if}, \tag{19}$$

$$\mu_{ij} = \frac{1}{h^2}\, \varkappa_{ij-1/2} = \frac{\varkappa\left[ih,\ \left(j - \frac{1}{2}\right) h,\ \left(n + \frac{s}{2}\right)\tau\right]}{h^2}.$$

Применяя равенства (15), получим

$$\Lambda_2 A_1^{-1} F_{ij} = \mu_{ij} [(A_1^{-1} + \delta_2 A_1^{-1} + \delta_{-2} A_1^{-1} + \delta_{-2}\delta_2 A_1^{-1})\, \Delta_{-2}\Delta_2 F_{ij} + \tag{20}$$
$$+ (\delta_{-2} A_1^{-1} + \delta_{-2}\delta_2 A_1^{-1})\, \Delta_2 F_{ij} + (\delta_2 A_1^{-1} + \delta_{-2}\delta_2 A_1^{-1})\, \Delta_{-2} F_{ij} +$$
$$+ \delta_{-2}\delta_2 A_1^{-1} F_{ij}] + (\Delta_{-2}\mu_{ij})\, [(A_1^{-1} + \delta_2 A_1^{-1})\, \Delta_2 F_{ij} + \Delta_2 A_1^{-1} F_{ij}].$$

Исходя из оценок лемм 1, 2, 3, получаем

$$\Lambda_2 A_1^{-1} F_{ij} = \Phi_1 \frac{\Delta_{-2}\Delta_2}{h^2} F_{ij} + \Phi_2 \frac{\Delta_2}{h} F_{ij} + \Phi_3 \frac{\Delta_{-2}}{h} F_{ij} + \Phi_4 F_{ij}, \tag{21}$$

где Φ_s — операторы с нормой, ограниченной константой, не зависящей от h.

На основании оценок (18), (21) и предполагая четырежды дифференцируемым решение $u(x_1, x_2, t)$ задачи (1) — (3) и тем самым дважды дифференцируемой функцию $\psi(x_1, x_2, t)$, получаем оценку

$$F^n = O(\tau^2), \qquad \Phi^n = O(\tau^{1+\varepsilon}).$$

На основании теоремы эквивалентности имеем из (12)

$$v^n = O(\tau^\varepsilon).$$

Таким образом, справедлива

Теорема. *Пусть*

а)

$$\frac{\varkappa_{\max} \cdot \tau}{h^2} \leqslant \frac{1}{2(1-2\alpha)}, \quad 0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2} \text{ (условие корректности)}$$

или

$$\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1;$$

б) *решение* $u(x_1, x_2, t)$ *задачи* (1) — (3) *четырежды непрерывно дифференцируемо,* $\varkappa(x_1, x_2, t)$ *— дважды непрерывно дифференцируемая функция (условие аппроксимации).*

Тогда решение U^n *схемы* (4) *сходится в* L_2 *к решению* $u(x_1, x_2, t)$ *задачи* (1) — (3).

В заключение сделаем несколько замечаний.

На основании теоремы вложения С. Л. Соболева или теоремы эквивалентности Стрэнга [4], предполагая бо́льшую гладкость $u(x_1, x_2, t)$ и $\varkappa(x_1, x_2, t)$, можно доказать равномерную сходимость U^n к u.

Нетрудно видеть, что оценка норм разностных операторов A_s, B_s, C_s не зависит от формы области. Несколько детализуя исследование аппроксимации, можно доказать сходимость метода расщепления и для произвольной области.

Ясно, что метод доказательства остается в силе и для многомерного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_s} \left[\varkappa \frac{\partial u}{\partial x_s} \right].$$

Поступила в редакцию
24.05.1962

Цитированная литература

1. Н. Н. Яненко. Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопроводности, Докл. АН СССР, 1959, **125**, № 6, 1207—1210.
2. В. С. Рябенький, А. Д. Филиппов. Об устойчивости разностных уравнений. М. — Л., Гостехиздат, 1956.
3. Н. Н. Яненко, Ю. Е. Бояринцев. О сходимости разностных схем для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами. Докл. АН СССР, 1961, **139**, № 6, 1322—1324.
4. W. G. Strang. Difference methods for mixed boundary value problem. Duke Math. J., 1960, **27**, № 2, 221—231.