В. В. Корнев, А. П. Хромов, Оператор интегрирования с инволюцией, имеющей степенную особенность, *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика*, 2008, том 8, выпуск 4, 18–33

DOI: 10.18500/1816-9791-2008-8-4-18-33

$$\begin{tikzcd} H(C^{(s-1)}) \arrow[rr] & & H(C^{(s)}) \arrow[dl] \\ & H(C^{(s)}/C^{(s-1)}) \arrow[ul] & \end{tikzcd},$$

которая в свою очередь дает точную диаграмму

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "i"] & & D \arrow[dl, "j"] \\ & E \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd}.$$

Таким образом, имеем точную пару (D, E, i, j, k), определяющую спектральную последовательность $\left\{E^m_{s,t}\right\}$ [5], которую назовем спектральной последовательностью толерантного расслоения $p : (E, \overline{\tau}) \to ((B, \tau))$.

Теорема 4. *Спектральная последовательность толерантного расслоения сходится, при этом для любой пары $s, t \geqslant 0$ имеется изоморфизм $E^2_{s,\ t} \cong H_s\left(B, H_t(F)\right)$.*

Доказательство. Утверждение следует из общей теории спектральных последовательностей [5], из доказанных выше свойств толерантных расслоений, с учетом предложения 8 работы [4].

Библиографический список

1. *Zeeman E.S.* The topology of brain and visual perception. The Topology of 3-Manifolds. N.Y., 1962.
2. *Небалуев С.И.* Гомологическая теория толерантных пространств. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006.
3. *Небалуев С.И.,Кляева И.А.* Толерантное расслоение пространства толерантных путей // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып.3. С. 93–106.
4. *Небалуев С.И.,Кляева И.А.* Теория пунктированных толерантных кубических сингулярных гомологий // Вестн. Самарск. гос. ун-та. 2007. Вып. 7(57). С. 134–151.
5. *Ху Сы-цзян.* Теория гомотопий. М.: Мир, 1964.

УДК 517.984

ОПЕРАТОР ИНТЕГРИРОВАНИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ, ИМЕЮЩЕЙ СТЕПЕННУЮ ОСОБЕННОСТЬ

В.В. Корнев, А.П. Хромов

Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений
и прикладной математики
E-mail: KornevVV@info.sgu.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

Изучаются спектральные свойства интегрального оператора с инволюцией специального вида, для разложений по собственным функциям этого оператора получена теорема равносходимости.

Ключевые слова: интегральный оператор, инволюция, разложения по собственным функциям, равносходимость.

Operator Integration with an Involution Having a Power Singularity

V.V. Kornev, A.P. Khromov

Spectral properties of the integral operator with an involution of special type in the upper limit are studied and an equiconvergence theorem for its generalized eigenfunction expansions is obtained.

Key words: integral operator, involution, eigenfunction expansions, equiconvergence.

В [1] впервые был рассмотрен с инволюцией $\theta(x) = 1 - x$ интегральный оператор:

$$Af = \alpha_1 \int\limits_0^x A_1(x,t) f(t)\,dt + \alpha_2 \int\limits_x^1 A_2(x,t) f(t)\,dt + \alpha_3 \int\limits_0^{1-x} A_3(1-x,t) f(t)\,dt + \alpha_4 \int\limits_{1-x}^1 A_4(1-x,t) f(t)\,dt,$$

где $A_i(x,t)$ — достаточно гладкие функции, причем $A_i(x,x) \equiv 1$ и α_i — комплексные числа. Была изучена задача обращения оператора A, которая открывала перспективу исследования таких вопросов, как равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям, абсолютная сходимость, сходимость средних Рисса, базисы Рисса. Отметим, что большой вклад в эту важную тематику внесен отечественными математиками ([2–4]). Мы же в последующем рассматривали интересный случай оператора A, когда $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$ и $A_1(x,t) = A_3(x,t)$ ([5–7]).

В настоящей статье изучается оператор

$$Af = \int\limits_0^{\theta(x)} f(t)\,dt, \qquad x \in [0,1],$$

где $\theta(x)$ — инволюция (т.е. функция со свойством $\theta(\theta(x)) \equiv x$) специального вида. Именно, будем считать, что $\theta(x)$ — непрерывна, $\theta(x) \in C^3(0,1)$ и $\theta'(x) = -x^\alpha$, где $\alpha > 0$, в окрестности точки $x = 0$. Тогда имеем $\theta(x) = 1 - \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ при $x \in [0,\delta]$. Далее, инволюция характеризуется тем, что график ее симметричен относительно главной диагонали. Для точки $(x,\theta(x))$ симметричной будет точка $(\theta(x),x)$. Так как $\theta(0) = 1$, то получаем, что на $[1-\delta,1]$ (δ берем то же самое) $\theta(x) = (\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha+1}}(1-x)^{\frac{1}{\alpha+1}}$. Таким образом, мы рассматриваем такую инволюцию, что $\theta(x) = 1 - \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ при $x \in [0,\delta]$ и $\theta(x) = (\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha+1}}(1-x)^{\frac{1}{\alpha+1}}$ при $x \in [1-\delta,1]$.

1. ПОСТРОЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ РЕЗОЛЬВЕНТЫ $\mathbf{R}_\lambda$

Займемся построением дифференциальной системы для резольвенты Фредгольма $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1}A$ оператора A (здесь E — единичный оператор, λ — комплексный параметр). Пусть $y = R_\lambda f$. Тогда имеем

$$y(x) - \lambda \int\limits_0^{\theta(x)} y(t)\,dt = \int\limits_0^{\theta(x)} f(t)\,dt. \tag{1}$$

Положим $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$ (T — знак транспонирования), где $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y(\theta(x))$.

Лемма 1. *Если $y = R_\lambda f$, то $z(x)$ удовлетворяет системе*

$$z_1'(x) - \lambda\theta'(x)z_2(x) = f(\theta(x))\theta'(x), \tag{2}$$

$$z_2'(x) - \lambda z_1(x) = f(x), \tag{3}$$

$$z_1(1) = z_2(0) = 0. \tag{4}$$

Обратно, если $z(x)$ удовлетворяет системе (2)–(4) *и соответствующая однородная система имеет только нулевое решение, то R_λ существует и $R_\lambda f = z_1(x)$.*

Доказательство. Прежде всего из (1) следует $z_1(1) = 0$, поскольку $\theta(1) = 0$. Дифференцируя (1), придем к (2). Полагая теперь в (1) $\theta(x)$ вместо x, аналогично получим (3) и $z_2(0) = 0$.

Докажем обратное предложение. Пусть λ таково, что однородная краевая задача, соответствующая системе (2)–(4), имеет только нулевое решение. Нетрудно убедиться, что $u_1(x) = z_2(\theta(x))$, $u_2(x) = z_1(\theta(x))$ также удовлетворяют системе (2)–(4). Поэтому $z_1(\theta(x)) = z_2(x)$ и из (2) получаем

$$z_1'(x) - \lambda\theta'(x)z_1(\theta(x)) = f(\theta(x))\theta'(x).$$

Проинтегрировав это тождество, получим

$$z_1(x) - \lambda A z_1 = Af. \tag{5}$$

Так как оператор $E - \lambda A$ ограниченно обратим, то из (5) получаем, что R_λ существует и $R_\lambda f = z_1(x)$. Лемма доказана.

Введем в рассмотрение следующую краевую задачу:

$$w'(t) - \lambda M(t)w(t) = F(t), \qquad 0 \le t \le 1, \tag{6}$$

$$Pw(0) + Qw(1) = 0, \tag{7}$$

где $w(t) = (w_1(t), \ldots, w_6(t))^T$, $M(t) = \operatorname{diag}(M_1(t), M_2(t), M_3(t))$, $M_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & \delta\theta'(\delta t) \\ \delta & 0 \end{pmatrix}$[1], $M_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta\theta'(1-\delta t) \\ -\delta & 0 \end{pmatrix}$, $M_3(t) = \begin{pmatrix} 0 & (1-2\delta)\theta'(\delta + t(1-2\delta)) \\ 1-2\delta & 0 \end{pmatrix}$, $F(t) = (F_1^T(t), F_2^T(t), F_3^T(t))^T$, $F_1(t) = (f_1(t), f_2(t))^T$, $f_1(t) = \delta f(\theta(\delta t))\theta'(\delta t)$, $f_2(t) = \delta f(\delta t)$, $F_2(t) = (-f_3(t), -f_4(t))^T$, $f_3(t) = \delta f(\theta(1-\delta t))\theta'(1-\delta t)$, $f_4(t) = \delta f(1-\delta t)$, $F_3(t) = (f_5(t), f_6(t))^T$, $f_5(t) = (1-2\delta) f(\theta(\delta + (1-2\delta)t)) \times \theta'(\delta + (1-2\delta)t)$, $f_6(t) = (1-2\delta) f(\delta + (1-2\delta)t)$,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Резольвента R_λ существует, если при этом λ краевая задача (6)–(7) при $F(t) \equiv 0$ имеет только нулевое решение. В этом случае*

$$R_\lambda f = \begin{cases} w_1\left(\frac{x}{\delta}\right), & x \in [0, \delta], \\ w_5\left(\frac{x-\delta}{1-2\delta}\right), & x \in [\delta, 1-\delta], \\ w_3\left(\frac{1-x}{1-\delta}\right), & x \in [1-\delta, 1], \end{cases}$$

где w_1, w_3, w_5 — нечетные компоненты $w(t)$ решения системы (6)–(7).

Доказательство. Система (6) распадается на три системы относительно $w_1(t)$, $w_2(t)$, затем $w_3(t)$, $w_4(t)$, и, наконец, $w_5(t)$, $w_6(t)$. Для $w_1(t)$, $w_2(t)$ из (6) имеем

$$\begin{cases} w_1'(t) - \lambda\delta\theta'(\delta t) w_2(t) = f_1(t), \\ w_2'(t) - \lambda\delta w_1(t) = f_2(t). \end{cases}$$

Отсюда следует, что функции $z_1(x) = w_1\left(\frac{x}{\delta}\right)$ и $z_2(x) = w_2\left(\frac{x}{\delta}\right)$ являются решениями системы (2)–(3) при $x \in [0, \delta]$.

Далее, для $w_3(t)$ и $w_4(t)$ из (6) имеем

$$\begin{cases} -w_3'(t) - \lambda\delta\theta'(1-\delta t) w_4(t) = f_3(t), \\ -w_4'(t) - \lambda\delta w_3(t) = f_4(t). \end{cases}$$

Поэтому функции $z_1(x) = w_3\left(\frac{1-x}{\delta}\right)$ и $z_2(x) = w_4\left(\frac{1-x}{\delta}\right)$ являются решениями системы (2)–(3) при $x \in [1-\delta, 1]$.

Наконец, $w_5(t)$ и $w_6(t)$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} w_5'(t) - \lambda(1-2\delta)\theta'(\delta + (1-2\delta)t) w_6(t) = f_5(t), \\ w_6'(t) - \lambda(1-2\delta) w_5(t) = f_6(t). \end{cases}$$

Следовательно, функции $z_1(x) = w_5\left(\frac{x-\delta}{1-2\delta}\right)$ и $z_2(x) = w_6\left(\frac{x-\delta}{1-2\delta}\right)$ удовлетворяют системе (2)–(3) при $\delta \le x \le 1-\delta$.

Из краевых условий (7) следует, что $z_1(x)$ и $z_2(x)$ образуют непрерывное на $[0, 1]$ решение системы (2)–(3) и удовлетворяют условиям (4).

Рассуждая в обратном порядке, можно из решения краевой задачи (2)–(4) получить решение краевой задачи (6)–(7). Поэтому однородная задача для (2)–(4) тоже имеет только нулевое решение. Отсюда по лемме 1 получаем утверждение теоремы 1.

[1] $\theta'(\delta t) = \frac{d}{d\xi}\theta(\xi)\Big|_{\xi=\delta t}$.

2. ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ БЕССЕЛЯ

Нам в дальнейшем потребуются следующие сведения об асимптотике некоторых решений уравнения Бесселя.

Функции Ганкеля [8, с. 304], определяемые по формулам

$$H_\nu^{(1)} = \frac{1}{i\sin\pi\nu}\{J_{-\nu}(z) - e^{-\pi\nu i}J_\nu(z)\}, \qquad H_\nu^{(2)} = \frac{1}{i\sin\pi\nu}\{-J_{-\nu}(z) + e^{\pi\nu i}J_\nu(z)\}, \tag{8}$$

где ν — вещественное и нецелое, а

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \Phi_\nu(z), \qquad \Phi_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \frac{1}{\Gamma(\nu+k+1)},$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения Бесселя:

$$z^2 y''(z) + zy'(z) + (z^2 - \nu^2)y(z) = 0. \tag{9}$$

Введем в рассмотрение следующие функции: $\varphi_1(z,\nu) = a(\nu)H_\nu^{(1)}(z)$, $\varphi_2(z,\nu) = \overline{a(\nu)}H_\nu^{(2)}(z)$, если $\arg z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; $\varphi_1(z,\nu) = \overline{ia(\nu)}H_\nu^{(2)}(-z)$, $\varphi_2(z,\nu) = -ia(\nu)H_\nu^{(1)}(-z)$, если $\arg z \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, где $a(\nu) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{-1/2} e^{i\left(\frac{\pi\nu}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$.

Лемма 2. *Если* $\arg z \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, *то*

$$H_\nu^{(1)}(z) = -e^{-i\pi\nu}H_\nu^{(2)}(-z), \qquad H_\nu^{(2)}(z) = e^{i\pi\nu}H_\nu^{(1)}(-z) + 2\cos\pi\nu H_\nu^{(2)}(-z).$$

Доказательство. Известно [8, с. 304], что

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2}[H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)], \quad H_{-\nu}^{(1)}(z) = e^{\pi\nu i}H_\nu^{(1)}(z), \quad H_{-\nu}^{(2)}(z) = e^{-\pi\nu i}H_\nu^{(2)}(z).$$

Так как $\Phi_\nu(z)$ целая четная функция, то

$$\Phi_\nu(z) = \Phi_\nu(-z) = \left(-\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \frac{H_\nu^{(1)}(-z) + H_\nu^{(2)}(-z)}{2}.$$

Поскольку $\arg(-z) = -\pi + \arg z$, то имеем

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(z) &= \frac{1}{i\sin\pi\nu}\{J_{-\nu}(z) - e^{-\pi\nu i}J_\nu(z)\} = \frac{1}{i\sin\pi\nu}\left\{\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\Phi_{-\nu}(z) - e^{-i\pi\nu}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\Phi_\nu(z)\right\} = \\ &= \frac{1}{2i\sin\pi\nu}\left\{e^{-i\pi\nu}[H_{-\nu}^{(1)}(-z) + H_{-\nu}^{(2)}(-z)] - [H_\nu^{(1)}(-z) + H_\nu^{(2)}(-z)]\right\} = \\ &= \frac{1}{2i\sin\pi\nu}\left\{e^{-i\pi\nu}[e^{i\pi\nu}H_\nu^{(1)}(-z) + e^{-i\pi\nu}H_\nu^{(2)}(-z)] - [H_\nu^{(1)}(-z) + H_\nu^{(2)}(-z)]\right\} = \\ &= \frac{1}{2i\sin\pi\nu}(e^{-2i\pi\nu} - 1)H_\nu^{(2)}(-z) = -e^{-i\pi\nu}H_\nu^{(2)}(-z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_\nu^{(2)}(z) &= \frac{1}{i\sin\pi\nu}\{-J_{-\nu}(z) + e^{\pi\nu i}J_\nu(z)\} = \frac{1}{i\sin\pi\nu}\left\{-\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\Phi_{-\nu}(z) + e^{i\pi\nu}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\Phi_\nu(z)\right\} = \\ &= \frac{1}{2i\sin\pi\nu}\left\{-e^{-i\pi\nu}[H_{-\nu}^{(1)}(-z) + H_{-\nu}^{(2)}(-z)] + e^{2\pi\nu i}[H_\nu^{(1)}(-z) + H_\nu^{(2)}(-z)]\right\} = \\ &= \frac{1}{2i\sin\pi\nu}\left\{-e^{-i\pi\nu}[e^{i\pi\nu}H_\nu^{(1)}(-z) + e^{-i\pi\nu}H_\nu^{(2)}(-z)] + e^{2\pi\nu i}[H_\nu^{(1)}(-z) + H_\nu^{(2)}(-z)]\right\} = \\ &= \frac{1}{2i\sin\pi\nu}\left\{(e^{2i\pi\nu} - 1)H_\nu^{(1)}(-z) + (e^{2i\pi\nu} - e^{-2i\pi\nu})H_\nu^{(2)}(-z)\right\} = \\ &= e^{i\pi\nu}H_\nu^{(1)}(-z) + 2\cos\pi\nu H_\nu^{(2)}(-z). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следствие. *Функции* $\varphi_j(z,\nu)$ $(j = 1, 2)$ *образуют фундаментальную систему решений уравнения* (9).

Теорема 2. *При больших* $|z|$ *и* $\arg z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

$$\frac{d^j}{dz^j}\varphi_1(z,\nu) = i^j \left(\frac{1}{z}\right)^{1/2} \left\{1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right\} e^{iz} \quad (j = 0, 1), \tag{10}$$

$$\frac{d^j}{dz^j}\varphi_2(z,\nu) = (-i)^j \left(\frac{1}{z}\right)^{1/2} \left\{1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right\} e^{-iz} \quad (j = 0, 1). \tag{11}$$

Доказательство. Известно [9, с. 221], что

$$H_\nu^{(1)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{i\left(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4}\right)} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right], \tag{12}$$

если $-\pi + \varepsilon \le \arg z \le 2\pi - \varepsilon$, и

$$H_\nu^{(2)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{-i\left(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4}\right)} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right], \tag{13}$$

если $-2\pi + \varepsilon \le \arg z \le \pi - \varepsilon$.

Отсюда следует утверждения теоремы при $j = 0$. Так как [8, с. 305]

$$\frac{d}{dz}H_\nu^{(s)}(z) = H_{\nu-1}^{(s)}(z) - \frac{\nu}{z}H_\nu^{(s)}(z) \qquad (s = 1, 2), \tag{14}$$

то из (12) и (13) следует (10) и (11) и при $j = 1$. Теорема доказана.

Лемма 3. *При малых* z *имеют место асимптотические формулы: если* $\nu > 0$, *то*

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{1}{i\Gamma(-\nu+1)\sin\pi\nu}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\{1 + O(z^\varkappa)\},$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = -\frac{1}{i\Gamma(-\nu+1)\sin\pi\nu}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\{1 + O(z^\varkappa)\},$$

если $\nu < 0$, *то*

$$H_\nu^{(1)}(z) = -\frac{e^{-\pi\nu i}}{i\Gamma(\nu+1)\sin\pi\nu}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\{1 + O(z^\varkappa)\},$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = -\frac{e^{\pi\nu i}}{i\Gamma(\nu+1)\sin\pi\nu}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\{1 + O(z^\varkappa)\}.$$

Здесь $\varkappa = \min\{2, 2|\nu|\}$.

Утверждение леммы легко следует из формулы (8).

Лемма 4. *Если* $\nu > 0$, *то*

$$\frac{d}{dz}H_\nu^{(s)}(z) = \frac{(-1)^{s+1}}{i\Gamma(-\nu)\sin\pi\nu}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\frac{1}{z}\{1 + O(z^\varkappa)\} \qquad (s = 1, 2).$$

Если $\nu < 0$, *то*

$$\frac{d}{dz}H_\nu^{(s)}(z) = \frac{(-1)^s e^{(-1)^s\pi\nu i}}{i\Gamma(\nu)\sin\pi\nu}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\frac{1}{z}\{1 + O(z^\varkappa)\} \qquad (s = 1, 2).$$

Утверждение леммы легко следует из леммы 3 на основании (14).

На основании лемм 3, 4 и определения $\varphi_j(z,\nu)$ получаем следующие результаты.

Теорема 3. *При малых* z *и* $\arg z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *имеют место следующие асимптотические формулы:*

$$\frac{d^s}{dz^s}\varphi_1(z,\nu) = (-|\nu|)^s b(\nu)\left(\frac{z}{2}\right)^{-|\nu|}\frac{1}{z^s}\{1 + O(z^\varkappa)\}, \tag{15}$$

$$\frac{d^s}{dz^s}\varphi_2(z,\nu) = (-|\nu|)^s \overline{b(\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-|\nu|}\frac{1}{z^s}\{1 + O(z^\varkappa)\}, \tag{16}$$

где $s = 0, 1$, $b(\nu) = \dfrac{a(\nu)}{i\Gamma(-\nu+1)\sin\pi\nu}$ *при* $\nu > 0$, $b(\nu) = -\dfrac{a(\nu)e^{-\pi\nu i}}{i\Gamma(\nu+1)\sin\pi\nu}$ *при* $\nu < 0$. *Оценки* $O(\cdots)$ *равномерны по* $\arg z$.

Теорема 4. *При малых* z *и* $\arg z \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ *имеют место следующие асимптотические формулы:*

$$\frac{d^s}{dz^s}\varphi_1(z,\nu) = -i(-|\nu|)^s\overline{b(\nu)}e^{\pi|\nu|i}\left(\frac{z}{2}\right)^{-|\nu|}\frac{1}{z^s}\{1+O(z^{\varkappa})\},$$

$$\frac{d^s}{dz^s}\varphi_2(z,\nu) = -i(-|\nu|)^s b(\nu)e^{\pi|\nu|i}\left(\frac{z}{2}\right)^{-|\nu|}\frac{1}{z^s}\{1+O(z^{\varkappa})\},$$

где $s = 0, 1$ *и оценки* $O(\cdots)$ *равномерны по* $\arg z$.

Нам потребуется также следующее применение функций $\varphi_j(z,\nu)$.

Лемма 5. *Функции*

$$y_1(x,\lambda) = \sqrt{x}\varphi_1\left(\frac{i\lambda}{q}x^q, \nu\right), \qquad y_2(x,\lambda) = \sqrt{x}\varphi_2\left(\frac{i\lambda}{q}x^q, \nu\right),$$

где $q = \dfrac{\alpha+2}{2}$, $\nu = \dfrac{1}{2q}$, $\alpha \neq -2$ *вещественное и не целое, образуют фундаментальную систему решений уравнения* $y'' - \lambda^2 x^\alpha y = 0$, $x \geq 0$.

Этот факт есть, например, в работе[10, с. 401].

3. АСИМПТОТИКА КОМПОНЕНТ $w_1(t,\lambda)$, $w_2(t,\lambda)$ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ (6)

Обратимся к первым двум уравнениям системы (6). Мы имеем

$$w_1'(t) + \lambda\delta^{1+\alpha}t^\alpha w_2(t) = f_1(t), \tag{17}$$

$$w_2'(t) - \lambda\delta w_1(t) = f_2(t) \tag{18}$$

(для краткости пишем $w_j(t)$ вместо $w_j(t,\lambda)$).

Рассмотрим сначала однородную систему

$$w_1'(t) + \lambda\delta^{1+\alpha}t^\alpha w_2(t) = 0, \tag{19}$$

$$w_2'(t) - \lambda\delta w_1(t) = 0. \tag{20}$$

Из (19)–(20) получаем

$$w_2''(t) + \lambda^2\delta^{2+\alpha}t^\alpha w_2(t) = 0. \tag{21}$$

По лемме 5 для (21) имеем следующую фундаментальную систему решений:

$$w_{2j}(t) = \sqrt{t}\varphi_j(\mu_1 t^{q_1}, \nu_1),$$

где $\mu_1 = -\dfrac{\lambda\delta^{1+\frac{\alpha}{2}}}{q_1}$, $q_1 = \dfrac{\alpha+2}{2}$, $\nu_1 = \dfrac{1}{2q_1}$. Отсюда получаем следующую фундаментальную систему решений для (19)–(20):

$$(x_{11}(t), x_{21}(t))^T, \qquad (x_{12}(t), x_{22}(t))^T,$$

где $x_{11}(t) = \dfrac{1}{\lambda\delta}w_{21}'(t)$, $x_{21}(t) = w_{21}(t)$, $x_{12}(t) = \dfrac{1}{\lambda\delta}w_{22}'(t)$, $x_{22}(t) = w_{22}(t)$.

Положим $X(t,\lambda) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{pmatrix}$. Тогда $D_1(t,\lambda) = \det X(t,\lambda)$ есть вронскиан системы (19)–(20).

Лемма 6. *Вронскиан* $D_1(t,\lambda)$ *не зависит от* t *и имеет следующую асимптотику при больших* $|\lambda|$:

$$D_1(t,\lambda) = \frac{2q_1}{\lambda\delta}[1],$$

где $[1] = 1 + O(\lambda^{-1})$.

Доказательство. Так как диагональные элементы матрицы $M_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta^{1+\alpha}t^{\alpha} \\ \delta & 0 \end{pmatrix}$ равны нулю, то $D_1(t,\lambda)$ не зависит от t. Поэтому

$$D_1(t,\lambda) = D_1(1,\lambda) = \frac{1}{\lambda\delta}\begin{vmatrix} \frac{d}{dt}\varphi_1(\mu_1 t^{q_1},\nu_1)|_{t=1} & \frac{d}{dt}\varphi_2(\mu_1 t^{q_1},\nu_1)|_{t=1} \\ \varphi_1(\mu_1,\nu_1) & \varphi_2(\mu_1,\nu_1) \end{vmatrix}.$$

Но $\dfrac{d}{dt}\varphi_j(\mu_1 t^{q_1},\nu_1) = \varphi_j'(\mu_1 t^{q_1},\nu_1)\mu_1 q_1 t^{q_1-1}$. Поэтому по теореме 2

$$D_1(t,\lambda) = \frac{\mu_1 q_1}{\lambda\delta}\begin{vmatrix} i\mu_1^{-1/2}[1]e^{i\mu_1} & -i\mu_1^{-1/2}[1]e^{-i\mu_1} \\ \mu^{-1/2}[1]e^{i\mu_1} & \mu^{-1/2}[1]e^{-i\mu_1} \end{vmatrix} = \frac{2q_1}{\lambda\delta}[1].$$

Лемма доказана.

Лемма 7. *Имеют место следующие асимптотические формулы:*

$$x_{11}(t) = \begin{cases} O(\lambda^{\nu_1-1}) & \text{при } |\mu_1 t^{q_1}| \le 1, \\ -\dfrac{\delta^{-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{4}}q_1^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{1/2}} t^{\frac{q_1-1}{2}} e^{i\mu_1 t^{q_1}}\{1+O(|\mu_1 t^{q_1}|^{-1})\} & \text{при } |\mu_1 t^{q_1}| \ge 1, \end{cases} \tag{22}$$

$$x_{21}(t) = \begin{cases} O(\lambda^{-\nu_1}) & \text{при } |\mu_1 t^{q_1}| \le 1, \\ -i\dfrac{\delta^{-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}}q_1^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{1/2}} t^{\frac{1-q_1}{2}} e^{i\mu_1 t^{q_1}}\{1+O(|\mu_1 t^{q_1}|^{-1})\} & \text{при } |\mu_1 t^{q_1}| \ge 1, \end{cases} \tag{23}$$

$$x_{12}(t) = \begin{cases} O(\lambda^{\nu_1-1}) & \text{при } |\mu_1 t^{q_1}| \le 1, \\ \dfrac{\delta^{-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{4}}q_1^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{1/2}} t^{\frac{q_1-1}{2}} e^{-i\mu_1 t^{q_1}}\{1+O(|\mu_1 t^{q_1}|^{-1})\} & \text{при } |\mu_1 t^{q_1}| \ge 1, \end{cases} \tag{24}$$

$$x_{22}(t) = \begin{cases} O(\lambda^{-\nu_1}) & \text{при } |\mu_1 t^{q_1}| \le 1, \\ -i\dfrac{\delta^{-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}}q_1^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{1/2}} t^{\frac{1-q_1}{2}} e^{-i\mu_1 t^{q_1}}\{1+O(|\mu_1 t^{q_1}|^{-1})\} & \text{при } |\mu_1 t^{q_1}| \ge 1. \end{cases} \tag{25}$$

Доказательство. Рассмотрим $x_{11}(t)$ и для определенности $\operatorname{Re}\mu_1 \le 0$. Пусть сначала $|\mu_1 t^{q_1}| \le 1$. Тогда на основании (14) имеем

$$x_{11}(t) = \frac{1}{\lambda\delta}w_{21}'(t) = \frac{1}{\lambda\delta}\frac{d}{dt}\left(\sqrt{t}\varphi_1(\mu_1 t^{q_1},\nu_1)\right) =$$

$$= \frac{a(\nu_1)}{\lambda\delta}\frac{d}{dt}\left(\sqrt{t}H_{\nu_1}^{(1)}(\mu_1 t^{q_1})\right) = \frac{a(\nu_1)}{\lambda\delta}q_1\mu_1 t^{q_1-\frac{1}{2}}H_{\nu_1-1}^{(1)}(\mu_1 t^{q_1}). \tag{26}$$

Так как $\nu_1 - 1 < 0$, то по лемме 3 $H_{\nu_1}^{(1)}(\mu_1 t^{q_1}) = O\left((\mu_1 t^{q_1})^{\nu_1-1}\right)$. Тем самым из (26) получаем оценку $x_{11}(t) = O(\lambda^{\nu_1-1})$.

Пусть теперь $|\mu_1 t^{q_1}| \ge 1$. Тогда имеем

$$x_{11}(t) = \frac{1}{\lambda\delta}\left\{\frac{1}{2}t^{-1/2}\varphi_1(\mu_1 t^{q_1},\nu_1) + t^{1/2}\mu_1 q_1 t^{q_1-1}\varphi_t'(\mu_1 t^{q_1},\nu_1)\right\}.$$

Отсюда по теореме 2 получаем (22) в этом случае. Формулы (23)–(25) получаются аналогично.

Следствие. *Имеют место оценки:*

$$x_{11}(t) = O(\lambda^{-1/2}e^{i\mu_1 t^{q_1}}), \quad x_{12}(t) = O(\lambda^{-1/2}e^{-i\mu_1 t^{q_1}}),$$

$$x_{21}(t) = O(\lambda^{-\nu_1}e^{i\mu_1 t^{q_1}}), \quad x_{22}(t) = O(\lambda^{-\nu_1}e^{-i\mu_1 t^{q_1}}).$$

Эти оценки следуют из (22)–(25), если учесть, что $q_1 > 1$, а $\nu_1 < 1/2$.

Лемма 8. *Система* (17)–(18) *имеет следующее общее решение:*

$$(w_1(t,\lambda), w_2(t,\lambda))^T = X(t,\lambda)c + g_{1\lambda}F_1, \tag{27}$$

где $g_{1\lambda}F_1 = \int\limits_0^1 g_1(t,\tau,\lambda)F_1(\tau)\,d\tau$, $g_1(t,\tau,\lambda) = X(t,\lambda)P_1(t,\tau,\lambda)X^{-1}(\tau,\lambda)$, $P_1(t,\tau,\lambda) = \mathrm{diag}(\varepsilon(t,\tau), -\varepsilon(\tau,t))$ *при* $\mathrm{Re}\, i\mu_1 \le 0$, $P_1(t,\tau,\lambda) = \mathrm{diag}(-\varepsilon(\tau,t), \varepsilon(t,\tau))$ *при* $\mathrm{Re}\, i\mu_1 \ge 0$, $\varepsilon(x,t) = 1$ *при* $t \le x$, $\varepsilon(x,t) = 0$ *при* $t > x$, c *— постоянный вектор.*

Доказательство. Вектор-функция $X(t,\lambda)c$ есть общее решение однородной системы (19)–(20). Общее решение системы (17)–(18) получаем методом вариации произвольных постоянных, т.е. ищем его в виде $X(t,\lambda)c(t)$, где $c(t) = (c_1(t), c_2(t))^T$. Тогда имеем

$$c'(t) = X^{-1}(t,\lambda)F_1(t),$$

где $X^{-1}(t,\lambda) = \dfrac{1}{D_1(1,\lambda)}\begin{pmatrix} x_{22}(t) & -x_{12}(t) \\ -x_{21}(t) & x_{11}(t)\end{pmatrix}$. Пусть $\mathrm{Re}\, i\mu_1 \le 0$. Тогда $c_1(t)$ находим интегрированием первого соотношения от 0 до t, а $c_2(t)$ — второго соотношения от t до 1. Подставляя найденное $c(t)$ в $X(t,\lambda)c(t)$, придем к (27). В случае $\mathrm{Re}\, i\mu_1 \ge 0$ надо проводить интегрирование $c_1'(t)$ от t до 1, а $c_2'(t)$ — от 0 до t.

Замечание 1. Выбор пределов интегрирования для нахождения $c_1(t)$ и $c_2(t)$ проведен с таким расчетом, чтобы в $g_1(t,\tau,\lambda)$ экспоненты из асимптотических формул (22)–(25) имели отрицательную вещественную часть.

Замечание 2. Формула (27) имеет место для любой $f(x) \in L[0,1]$. Это вытекает из следствия к лемме 7.

4. АСИМПТОТИКА КОМПОНЕНТ $w_3(t,\lambda)$, $w_4(t,\lambda)$ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ (6)

Из третьего и четвертого уравнений системы (6) имеем

$$-w_3'(t) - \lambda\delta\theta'(1-\delta t)w_4(t) = f_3(t), \tag{28}$$

$$-w_4'(t) - \lambda\delta w_3(t) = f_4(t), \tag{29}$$

или, учитывая явный вид $\theta'(1-\delta t)$,

$$-w_3'(t) + \lambda\delta^{\beta+1}(\alpha+1)^\beta t^\beta w_4(t) = f_3(t), \tag{30}$$

$$-w_4'(t) - \lambda\delta w_3(t) = f_4(t), \tag{31}$$

где $\beta = -\dfrac{\alpha}{\alpha+1}$. Рассмотрим сначала однородную систему

$$-w_3'(t) + \lambda\delta^{\beta+1}(\alpha+1)^\beta t^\beta w_4(t) = 0, \tag{32}$$

$$-w_4'(t) - \lambda\delta w_3(t) = 0. \tag{33}$$

Из (32)–(33) получаем

$$w_4''(t) + \lambda^2\delta^{\beta+2}(\alpha+1)^\beta t^\beta w_4(t) = 0.$$

Положим $\mu_2 = -\dfrac{\lambda\delta^{1+\frac{\beta}{2}}(\alpha+1)^{\frac{\beta}{2}}}{q_2}$, $q_2 = \dfrac{\beta+2}{2}$, $\nu_2 = \dfrac{1}{2q_2}$. Отсюда в соответствии с леммой 5 получаем для $w_4(t)$ следующую фундаментальную систему решений:

$$w_{4j}(t) = \sqrt{t}\varphi_j(\mu_2 t^{q_2}, \nu_2) \qquad (j = 1,2).$$

Теперь на случай системы (28)–(29) легко переносятся результаты раздела 3.

Таким образом, для системы (32)–(33) получаем следующую фундаментальную систему решений:

$$(y_{11}(t), y_{21}(t))^T, \qquad (y_{12}(t), y_{22}(t))^T,$$

где $y_{1j}(t) = -\dfrac{1}{\lambda\delta}w_{4j}'$, $y_{2j}(t) = w_{4j}(t)$ $(j = 1,2)$.

Положим $Y(t,\lambda) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) \\ y_{21}(t) & y_{22}(t)\end{pmatrix}$. Тогда $D_2(t,\lambda) = \det Y(t,\lambda)$ есть вронскиан системы (32)–(33).

Лемма 9. *Вронскиан* $D_2(t,\lambda)$ *не зависит от* t *и имеет следующую асимптотику при больших* $|\lambda|$*:*

$$D_2(t,\lambda)=\frac{2q_2}{\lambda\delta}[1].$$

Лемма 10. *Имеют место следующие асимптотические формулы:*

$$y_{11}(t)=\begin{cases}O(\lambda^{\nu_2-1}) & \text{при } |\mu_2 t^{q_2}|\le 1,\\ \dfrac{\delta^{-\frac12+\frac{\beta}{4}}(\alpha+1)^{\frac{\beta}{4}}q_2^{\frac12}}{\lambda^{1/2}}t^{\frac{q_2-1}{2}}\{1+O(|\mu_2 t^{q_2}|^{-1})\}e^{i\mu_2 t^{q_2}} & \text{при } |\mu_2 t^{q_2}|\ge 1,\end{cases}$$

$$y_{21}(t)=\begin{cases}O(\lambda^{-\nu_2}) & \text{при } |\mu_2 t^{q_2}|\le 1,\\ -i\dfrac{\delta^{-\frac12-\frac{\beta}{4}}(\alpha+1)^{-\frac{\beta}{4}}q_2^{\frac12}}{\lambda^{1/2}}t^{\frac{1-q_2}{2}}\{1+O(|\mu_2 t^{q_2}|^{-1})\}e^{i\mu_2 t^{q_2}} & \text{при } |\mu_2 t^{q_2}|\ge 1,\end{cases}$$

$$y_{12}(t)=\begin{cases}O(\lambda^{\nu_2-1}) & \text{при } |\mu_2 t^{q_2}|\le 1,\\ -\dfrac{\delta^{-\frac12+\frac{\beta}{4}}(\alpha+1)^{\frac{\beta}{4}}q_2^{\frac12}}{\lambda^{1/2}}t^{\frac{q_2-1}{2}}\{1+O(|\mu_2 t^{q_2}|^{-1})\}e^{-i\mu_2 t^{q_2}} & \text{при } |\mu_2 t^{q_2}|\ge 1,\end{cases}$$

$$y_{22}(t)=\begin{cases}O(\lambda^{-\nu_2}) & \text{при } |\mu_2 t^{q_2}|\le 1,\\ -i\dfrac{\delta^{-\frac12-\frac{\beta}{4}}(\alpha+1)^{-\frac{\beta}{4}}q_2^{\frac12}}{\lambda^{1/2}}t^{\frac{1-q_2}{2}}\{1+O(|\mu_2 t^{q_2}|^{-1})\}e^{-i\mu_2 t^{q_2}} & \text{при } |\mu_2 t^{q_2}|\ge 1.\end{cases}$$

Следствие. *Имеют место оценки:*

$$y_{11}(t)=O(\lambda^{\nu_2-1}e^{i\mu_2 t^{q_2}}),\qquad y_{21}(t)=O(\lambda^{-1/2}e^{i\mu_2 t^{q_2}}),$$
$$y_{12}(t)=O(\lambda^{\nu_2-1}e^{-i\mu_2 t^{q_2}}),\qquad y_{22}(t)=O(\lambda^{-1/2}e^{-i\mu_2 t^{q_2}}).$$

Эти оценки следуют из леммы 10, если учесть, что $q_2<1$, $1/2<\nu_2<1$.

Лемма 11. *Система* (30)–(31) *имеет следующее общее решение:*

$$(w_3(t,\lambda),w_4(t,\lambda))^T=Y(t,\lambda)c+g_{2\lambda}F_2, \tag{34}$$

где $g_{2\lambda}F_2=\int_0^1 g_2(t,\tau,\lambda)F_2(\tau)\,d\tau$, $g_2(t,\tau,\lambda)=Y(t,\lambda)P_2(t,\tau,\lambda)Y^{-1}(\tau,\lambda)$, $P_2(t,\tau,\lambda)=\operatorname{diag}(\varepsilon(t,\tau),-\varepsilon(\tau,t))$ *при* $\operatorname{Re} i\mu_2\le 0$, $P_2(t,\tau,\lambda)=\operatorname{diag}(-\varepsilon(\tau,t),\varepsilon(t,\tau))$ *при* $\operatorname{Re} i\mu_2\ge 0$, c *— постоянный вектор.*

Замечание. Формула (34) имеет место при любой $f(x)\in L[0,1]$.

5. АСИМПТОТИКА КОМПОНЕНТ $w_5(t,\lambda)$, $w_6(t,\lambda)$ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ (6)

Система для $w_j(t,\lambda)$ $(j=5,6)$ имеет вид

$$w_5'(t)-\lambda(1-2\delta)\theta'(\delta+(1-2\delta)t)w_6(t)=f_5(t), \tag{35}$$

$$w_6'(t)-\lambda(1-2\delta)w_5(t)=f_6(t). \tag{36}$$

Положим $\mu_3=\lambda(1-2\delta)$, $-\theta'(\delta+t(1-2\delta))=p(t)$. Тогда однородная система для (35)–(36) примет вид

$$w_5'(t)+\mu_3 p(t)w_6(t)=0, \tag{37}$$

$$w_6'(t)-\mu_3 w_5(t)=0. \tag{38}$$

Из (37)–(38) получаем

$$w_6''(t)+\mu_3^2 p(t)w_6(t)=0. \tag{39}$$

Лемма 12. *Уравнение* (39) *имеет фундаментальную систему решений* $\{w_{61}(t),w_{62}(t)\}$*, для которой при больших* $|\lambda|$ *имеют место асимптотические формулы:*

$$w_{61}(t)=p_1(\xi(t))e^{i\mu_3\xi(t)}[1],\qquad w_{61}'(t)=i\mu_3\sqrt{p(t)}p_1(\xi(t))e^{i\mu_3\xi(t)}[1],$$
$$w_{62}(t)=p_1(\xi(t))e^{-i\mu_3\xi(t)}[1],\qquad w_{62}'(t)=-i\mu_3\sqrt{p(t)}p_1(\xi(t))e^{-i\mu_3\xi(t)}[1],$$

где $p_1(\xi) = e^{-1/2\int\limits_0^\xi p_2(\tau)\,d\tau}$, $p_2(\xi) = p_3(t(\xi))$, $p_3(t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{p'(t)}{(p(t))^{3/2}}$, $\xi = \xi(t) = \int\limits_0^t \sqrt{p(\tau)}\,d\tau$, $[1] = 1 + O(\lambda^{-1})$.

Доказательство. Выполним в уравнении (39) замену независимого переменного $\xi = \int\limits_0^t \sqrt{p(\tau)}\,d\tau$ и положим $y(\xi) = w_6(t(\xi))$. Тогда имеем

$$w_6'(t) = y'(\xi)\sqrt{p(t)}, \quad w_6''(t) = y''(\xi)p(t) + \frac{1}{2}(p(t))^{-1/2}p'(t)y'(\xi).$$

Подставляем это в (39). Получим

$$y''(\xi)p(t) + \frac{1}{2}(p(t))^{-1/2}p'(t)y'(\xi) + \mu_3^2 p(t)y(\xi) = 0.$$

Отсюда

$$y''(\xi) + p_3(t)y'(\xi) + \mu_3^2 y(\xi) = 0,$$

или

$$y''(\xi) + p_2(\xi)y'(\xi) + \mu_3^2 y(\xi) = 0. \tag{40}$$

В (40) выполним замену $y = p_1(\xi)v$. Тогда получим

$$v''(\xi) + \tilde{p}(\xi)v'(\xi) + \mu_3^2 v(\xi) = 0. \tag{41}$$

Уравнение (41) [11, с. 53, 58–59] имеет фундаментальную систему решений $\{v_1(\xi), v_2(\xi)\}$ с асимптотикой

$$\begin{aligned} y_1(\xi) &= p_1(\xi)e^{i\mu_3\xi}[1], & y_1'(\xi) &= i\mu_3 p_1(\xi)e^{i\mu_3\xi}[1], \\ y_2(\xi) &= p_1(\xi)e^{-i\mu_3\xi}[1], & y_2'(\xi) &= -i\mu_3 p_1(\xi)e^{-i\mu_3\xi}[1]. \end{aligned}$$

Переходя отсюда к $w_6(t)$, получим для уравнения (39) фундаментальную систему решений $\{w_{61}(t), w_{62}(t)\}$ с указанной асимптотикой. Лемма доказана.

Обратимся теперь к однородной системе (37)–(38). Для нее получаем следующую фундаментальную систему решений

$$(z_{11}(t), z_{21}(t))^T, \qquad (z_{12}(t), z_{22}(t))^T,$$

где $z_{11}(t) = \dfrac{1}{\mu_3}w_{61}'(t)$, $z_{21}(t) = w_{61}(t)$, $z_{12}(t) = \dfrac{1}{\mu_3}w_{62}'(t)$, $z_{22}(t) = w_{62}(t)$.

По лемме 12 получаем

Лемма 13. *Имеют место асимптотические формулы*

$$\begin{aligned} z_{11}(t) &= i\sqrt{p(t)}p_1(\xi(t))e^{i\mu_3\xi(t)}[1], & z_{21}(t) &= p_1(\xi(t))e^{i\mu_3\xi(t)}[1], \\ z_{12}(t) &= -i\sqrt{p(t)}p_1(\xi(t))e^{-i\mu_3\xi(t)}[1], & z_{22}(t) &= p_1(\xi(t))e^{-i\mu_3\xi}[1]. \end{aligned}$$

Положим $Z(t,\lambda) = (z_{ij}(t))_1^2$. Тогда $D_3(t,\lambda) = \det Z(t,\lambda)$ есть вронскиан системы (37)–(38) и для него, как и в разделе 3, имеет место

Лемма 14. *Вронскиан $D_3(t,\lambda)$ не зависит от t и имеет следующую асимптотику при больших $|\lambda|$:*

$$D_3(t,\lambda) = D_3(0,\lambda) = 2i\sqrt{-\theta'(\delta)}[1].$$

Для неоднородной системы (35)–(36), как и в разделе 3, получаем

Лемма 15. *Система* (35)–(36) *имеет следующее общее решение:*

$$(w_5(t,\lambda), w_6(t,\lambda))^T = Z(t,\lambda)c + g_{3\lambda}F_3,$$

где c — постоянный вектор, $g_{3\lambda}F_3 = \int\limits_0^1 g_3(t,\tau,\lambda)F_3(\tau)\,d\tau$, $g_3(t,\tau,\lambda) = Z(t,\lambda)P_3(t,\tau,\lambda)Z^{-1}(\tau,\lambda)$, $P_3(t,\tau,\lambda) = \mathrm{diag}(\varepsilon(t,\tau), -\varepsilon(\tau,t))$ *при* $\mathrm{Re}\,i\mu_3 \le \mathrm{Re}\,(-i\mu_3)$, $P_3(t,\tau,\lambda) = \mathrm{diag}(-\varepsilon(\tau,t), \varepsilon(t,\tau))$ *при* $\mathrm{Re}\,i\mu_3 \ge \mathrm{Re}\,(-i\mu_3)$.

6. ТЕОРЕМА РАВНОСХОДИМОСТИ

1. В силу лемм 8, 11, 14 для решения $w(t,\lambda)$ системы (6)–(7) получаем следующую формулу:

$$w(t,\lambda) = -\Phi(t,\lambda)U^{-1}(\lambda)U(g_\lambda F) + g_\lambda F, \tag{42}$$

где $\Phi(t,\lambda) = \mathrm{diag}(X(t,\lambda), Y(t,\lambda), Z(t,\lambda))$, $g_\lambda F = \int\limits_0^1 g(t,\tau,\lambda)F(\tau)\,d\tau$, $g(t,\tau,\lambda) = \mathrm{diag}(g_1(t,\tau,\lambda), g_2(t,\tau,\lambda), g_3(t,\tau,\lambda))$, $U(\lambda) = U(\Phi(t,\lambda)) = P\Phi(0,\lambda) + Q\Phi(1,\lambda)$, $U(g_\lambda F) = Pg_\lambda F|_{t=0} + Qg_\lambda F|_{t=1}$.

Введем следующие обозначения: $G_j(t,\lambda) = g_{j\lambda}F_j$, $G_j(t,\lambda) = (G_{j1}(t,\lambda), G_{j2}(t,\lambda))^T$, $G(t,\lambda) = (G_1^T(t,\lambda), G_2^T(t,\lambda), G_3^T(t,\lambda))^T$. Тогда $g_\lambda F = G(t,\lambda)$, $U(g_\lambda F) = PG(0,\lambda) + QG(1,\lambda)$. В дальнейшем нам нужна лишь пятая компонента $w_5(t,\lambda)$ решения $w(t,\lambda)$ системы (6)–(7). В силу (42) имеет место

Лемма 16. *Справедлива формула*

$$w_5(t,\lambda) = -\sum_{j=1}^{6} S_j(t,\lambda) + G_{31}(t,\lambda), \tag{43}$$

где $S_1(t,\lambda) = \eta_1(t,\lambda)G_{12}(0,\lambda)$, $S_2(t,\lambda) = \eta_2(t,\lambda)G_{21}(0,\lambda)$, $S_3(t,\lambda) = \eta_3(t,\lambda)(G_{31}(0,\lambda) - G_{11}(1,\lambda))$, $S_4(t,\lambda) = \eta_4(t,\lambda)(G_{32}(0,\lambda) - G_{12}(1,\lambda))$, $S_5(t,\lambda) = \eta_5(t,\lambda)(G_{21}(1,\lambda) - G_{31}(1,\lambda))$, $S_6(t,\lambda) = \eta_6(t,\lambda)(G_{22}(1,\lambda) - G_{32}(1,\lambda))$, $\eta(t,\lambda) = (\eta_1(t,\lambda),\ldots,\eta_6(t,\lambda))$ — *пятая строка матрицы-функции* $\Phi(t,\lambda)U^{-1}(\lambda)$.

2. В дальнейшем считаем, что $-\frac{\pi}{2} \le \arg(-\lambda) \le 0$. Тогда $\arg\lambda \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ и $(-\lambda)^{\nu_1} = \lambda^{\nu_1}e^{-\pi\nu_1 i}$. Получим асимптотические формулы для компонент $X(t,\lambda)$, $Y(t,\lambda)$, $Z(t,\lambda)$ при $t=0$ и $t=1$.

Лемма 17. *Имеют место формулы*

$$x_{1j}(0) = a_{1j}\lambda^{\nu_1-1}, \quad x_{2j}(0) = a_{2j}\lambda^{-\nu_1} \quad (j=1,2),$$

где

$$a_{11} = \frac{ia(\nu_1)(2q_1)^{1-\nu_1}e^{-2\pi\nu_1 i}\delta^{-1/2}}{\Gamma(\nu_1)\sin\pi\nu_1}, \qquad a_{12} = \frac{i\overline{a(\nu_1)}(2q_1)^{1-\nu_1}\delta^{-1/2}}{\Gamma(\nu_1)\sin\pi\nu_1},$$

$$a_{21} = b(\nu_1)(2q_1)^{\nu_1}\delta^{-1/2}e^{\pi\nu_1 i}, \qquad a_{22} = \overline{b(\nu_1)}(2q_1)^{\nu_1}\delta^{-1/2}e^{\pi\nu_1 i}.$$

Доказательство. Имеем

$$x_{11}(0) = \frac{1}{\lambda\delta}w_{21}'(0) = \frac{1}{\lambda\delta}\left(\frac{d}{dt}\sqrt{t}\varphi_1(\mu_1 t^{q_1},\nu_1)\right)_{|t=0} = \frac{a(\nu_1)}{\lambda\delta}q_1\mu_1\left(t^{q_1-\frac12}H^{(1)}_{\nu_1-1}(\mu_1 t^{q_1})\right)_{|t=0}.$$

Так как $\nu_1 - 1 < 0$, то отсюда в силу леммы 3 получаем, что $x_{11}(0) = a_{11}\lambda^{\nu_1-1}$. Далее, в силу теоремы 3 $x_{21}(0) = w_{21}(0) = \left(\sqrt{t}\varphi_1(\mu_1 t^{q_1},\nu_1)\right)_{|t=0} = a_{21}\lambda^{-\nu_1}$.

Аналогично получаются формулы для $x_{12}(0)$ и $x_{22}(0)$.

Лемма 18. *Имеют место асимптотические формулы:*

$$x_{j1}(1) = \frac{b_{j1}}{\lambda^{1/2}}e^{i\mu_1}[1], \quad x_{j2}(1) = \frac{b_{j2}}{\lambda^{1/2}}e^{-i\mu_1}[1],$$

где $[1] = 1 + O(\lambda^{-1})$, $b_{11} = -\delta^{-\frac12+\frac{\alpha}{4}}q_1^{\frac12}$, $b_{21} = -i\delta^{-\frac12-\frac{\alpha}{4}}q_1^{\frac12}$, $b_{12} = -b_{11}$, $b_{22} = b_{21}$.

Утверждение леммы — простое следствие леммы 7.

Так же, как леммы 17 и 18, получаются

Лемма 19. *Имеют место формулы:*

$$y_{1j}(0) = c_{1j}\lambda^{\nu_2-1}, \quad y_{2j}(0) = c_{2j}\lambda^{-\nu_2} \quad (j=1,2),$$

где

$$c_{11} = -\frac{ia(\nu_2)(2q_2)^{\nu_2-1}e^{-2\pi\nu_2 i}\delta^{\beta}(\alpha+1)^{\frac{\beta\nu_2}{2}}}{\Gamma(\nu_2)\sin\pi\nu_2}, \qquad c_{12} = -\frac{i\overline{a(\nu_2)}(2q_2)^{1-\nu_2}\delta^{\beta}(\alpha+1)^{\frac{\beta\nu_2}{2}}}{\Gamma(\nu_2)\sin\pi\nu_2},$$

$$c_{21} = b(\nu_2)(2q_2)^{\nu_2}\delta^{-\frac{1}{\alpha+1}}(\alpha+1)^{-\frac{\beta\nu_2}{2}}e^{\pi\nu_2 i}, \qquad c_{22} = \overline{b(\nu_2)}(2q_2)^{\nu_2}\delta^{-\frac{1}{\alpha+1}}(\alpha+1)^{-\frac{\beta\nu_2}{2}}e^{\pi\nu_2 i}.$$

Лемма 20. *Имеют место асимптотические формулы:*

$$y_{j1}(1) = \frac{d_{j1}[1]}{\lambda^{1/2}} e^{i\mu_2}, \quad y_{j2}(1) = \frac{d_{j2}[1]}{\lambda^{1/2}} e^{-i\mu_2} \quad (j = 1, 2),$$

$d_{11} = \delta^{-\frac{1}{2}+\frac{\beta}{4}}(\alpha+1)^{\frac{\beta}{4}} q_2^{\frac{1}{2}}$, $d_{12} = d_{11}$, $d_{21} = -i\delta^{-\frac{1}{2}-\frac{\beta}{4}}(\alpha+1)^{-\frac{\beta}{4}} q_2^{\frac{1}{2}}$, $d_{22} = d_{21}$.

Наконец, из лемма 13 получается

Лемма 21. *Имеют место асимптотические формулы:*

$$\begin{aligned}
&z_{11}(0) = i\sqrt{p(0)}[1], \quad z_{21}(0) = [1], \quad z_{12}(0) = -i\sqrt{p(0)}[1], \quad z_{22}(0) = [1],\\
&z_{11}(1) = i\sqrt{p(1)}p_1(\xi(1))e^{i\mu_3\xi(1)}[1], \qquad z_{21}(1) = p_1(\xi(1))e^{i\mu_3\xi(1)}[1],\\
&z_{12}(1) = -i\sqrt{p(1)}p_1(\xi(1))e^{-i\mu_3\xi(1)}[1], \qquad z_{22}(1) = p_1(\xi(1))e^{-i\mu_3\xi(1)}[1].
\end{aligned}$$

3. Для определителя $\Delta(\lambda) = \det U(\lambda)$ имеем формулу

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix}
x_{21}(0) & x_{22}(0) & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & y_{11}(0) & y_{12}(0) & 0 & 0\\
-x_{11}(1) & -x_{12}(1) & 0 & 0 & z_{11}(0) & z_{12}(0)\\
-x_{21}(1) & -x_{22}(1) & 0 & 0 & z_{21}(0) & z_{22}(0)\\
0 & 0 & y_{11}(1) & y_{12}(1) & -z_{11}(1) & -z_{12}(1)\\
0 & 0 & y_{21}(1) & y_{22}(1) & -z_{21}(1) & -z_{22}(1)
\end{vmatrix}.$$

В нашем случае $\operatorname{Re} i\mu_1 \geq 0$, $\operatorname{Re} i\mu_2 \geq 0$, $\operatorname{Re} i\mu_3 \leq 0$. Используя леммы 17–21 для $\Delta(\lambda)$ получаем следующую асимптотическую формулу:

$$\Delta(\lambda) = \lambda^{\nu_2-\nu_1-2} e^{i(\mu_1+\mu_2-\mu_3\xi(1))} \left(a_0 + \sum_{j=1}^{7} a_j e^{i\lambda\gamma_j} + O(\lambda^{-1}) \right), \tag{44}$$

где a_j — константы, причем $a_0 \neq 0$, γ_j — положительные константы.

Удалим из рассматриваемого сектора $\frac{\pi}{2} \leq \arg\lambda \leq \pi$ нули определителя $\Delta(\lambda)$ вместе с окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ_0. Получившуюся область обозначим S_{δ_0}.

Лемма 22. *В S_{δ_0} при достаточно больших $|\lambda|$*

$$|\Delta(\lambda)| \geq C|\lambda|^{\nu_2-\nu_1-2}|e^{i(\mu_1+\mu_2-\mu_3\xi(1))}|.$$

Утверждение леммы следует из формулы (44) и свойств нулей квазимногочленов [12, с. 438].

4. Приступаем к оценке $S_j(t,\lambda)$ в формуле (43). Сначала оценим $G_{ij}(0,\lambda)$ и $G_{ij}(1,\lambda)$. Пусть $i = 1$. Имеем $X^{-1}(t,\lambda) = \dfrac{1}{D_1}\begin{pmatrix} x_{22}(t) & -x_{12}(t)\\ -x_{21}(t) & x_{11}(t)\end{pmatrix}$, где $D_1 = D_1(1,\lambda)$. Поэтому

$$G_{11}(t,\lambda) = \frac{1}{D_1}\int_0^1 \Big\{ -\left(x_{11}(t)\varepsilon(\tau,t)x_{22}(\tau) + x_{12}(t)\varepsilon(t,\tau)x_{21}(\tau)\right) f_1(\tau) +$$

$$+ \left(x_{11}(t)\varepsilon(\tau,t)x_{12}(\tau) + x_{12}(t)\varepsilon(t,\tau)x_{11}(\tau)\right) f_2(\tau) \Big\}\, d\tau, \tag{45}$$

$$G_{12}(t,\lambda) = \frac{1}{D_1}\int_0^1 \Big\{ -\left(x_{21}(t)\varepsilon(\tau,t)x_{22}(\tau) + x_{22}(t)\varepsilon(t,\tau)x_{21}(\tau)\right) f_1(\tau) +$$

$$+ \left(x_{21}(t)\varepsilon(\tau,t)x_{12}(\tau) + x_{22}(t)\varepsilon(t,\tau)x_{11}(\tau)\right) f_2(\tau) \Big\}\, d\tau. \tag{46}$$

Лемма 23. *Имеет место оценка:*

$$G_{12}(0,\lambda) = O(\lambda^{\frac{1}{2}-\nu_1}\|\tilde f\|_1), \tag{47}$$

где $\tilde f(t) = f(t)(1-t)^\beta$, $\beta = -\dfrac{\alpha}{\alpha+1}$, $\|\cdot\|_1$ — *норма в* $L[0,1]$.

Доказательство. Из (46) при $t=0$ имеем

$$G_{12}(0,\lambda) = \frac{x_{21}(0)}{D_1}\int\limits_0^1 (-x_{22}(\tau)f_1(\tau) + x_{12}(\tau)f_2(\tau))\, d\tau. \tag{48}$$

Оценим интеграл $J = \int\limits_0^1 x_{22}(\tau)f_1(\tau)\,d\tau$. Имеем $J = J_1+J_2$, где $J_1 = \int\limits_0^\xi x_{22}(\tau)f_1(\tau)\,d\tau$ и $\xi = |\mu|^{-1/q_1}$. По лемме 7

$$J_1 = O\left(\lambda^{-\nu_1}\int\limits_0^\xi |f_1(\tau)|\,d\tau\right) = O\left(\lambda^{-\nu_1}\int\limits_0^\xi |f(\theta(\delta\tau))|\tau^\alpha\,d\tau\right) = O\left(|\lambda|^{-\nu_1}\xi^\alpha\int\limits_0^\xi |f(\theta(\delta\tau))|\,d\tau\right) =$$

$$= O\left(\lambda^{-\nu_1-\frac{\alpha}{q_1}}\int\limits_0^\xi |f(\theta(\delta\tau))|\,d\tau\right) = O\left(\lambda^{-1/2}\int\limits_0^\xi |f(\theta(\delta\tau))|\,d\tau\right).$$

Но

$$\int\limits_0^\xi |f(\theta(\delta\tau))|\,d\tau = \int\limits_0^\xi \left|f\left(1-\frac{(\theta\tau)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)\right|\,d\tau = O\left(\int\limits_0^1 |f(\eta)|(1-\eta)^\beta\,d\eta\right).$$

Поэтому

$$J_1 = O\left(\lambda^{-1/2}\|\tilde f\|_1\right). \tag{49}$$

Далее, по лемме 7

$$J_2 = O\left(\lambda^{-1/2}\int\limits_\xi^1 \tau^{\frac{1-q_1}{2}+\alpha}|f(\theta(\delta\tau))|\,d\tau\right) = O\left(\lambda^{-1/2}\int\limits_\xi^1 |f(\theta(\delta\tau))|\,d\tau\right) = O\left(\lambda^{-1/2}\|\tilde f\|_1\right). \tag{50}$$

Так как $x_{21}(0)D_1^{-1} = O(\lambda^{1-\nu_1})$, то из (49) и (50) получаем, что

$$x_{21}(0)D_1^{-1}J = O\left(\lambda^{1/2-\nu_1}\|\tilde f\|_1\right). \tag{51}$$

Наконец, по следствию леммы 7

$$\int\limits_0^1 x_{12}(\tau)f_2(\tau)\,d\tau = O\left(\lambda^{-1/2}\int\limits_0^1 \delta|f(\delta\tau)|\,d\tau\right) = O\left(\lambda^{-1/2}\|f\|_1\right). \tag{52}$$

Из (48), (51) и (52) следует (47).

Лемма 24. *Имеют место оценки*

$$G_{1j}(1,\lambda) = O(\|\tilde f\|_1) \quad (j=1,2). \tag{53}$$

Доказательство. Из (45)–(46) заключаем, что

$$G_{11}(1,\lambda) = \frac{1}{D_1}\int\limits_0^1 \Big(x_{12}(1)x_{21}(\tau)f_1(\tau) + x_{12}(1)x_{11}(\tau)f_2(\tau)\Big)\,d\tau,$$

$$G_{12}(1,\lambda) = \frac{1}{D_1}\int\limits_0^1 \Big(x_{22}(1)x_{21}(\tau)f_1(\tau) + x_{22}(1)x_{11}(\tau)f_2(\tau)\Big)\,d\tau.$$

По леммам 6 и 18 имеем

$$x_{12}(1)D_1^{-1}\int\limits_0^1 x_{21}(\tau)f_1(\tau)\,d\tau = O\left(\lambda^{-1/2}e^{-i\mu_1}\int\limits_0^1 x_{21}(\tau)f_1(\tau)\,d\tau\right).$$

Далее, точно так же, как и для J, в доказательстве леммы 23, получаем оценку

$$e^{-i\mu_1}\int\limits_0^1 x_{21}(\tau)f_1(\tau)\,d\tau = O\left(\lambda^{-1/2}\|\tilde f\|_1\right).$$

На основании лемм 6 и 18, как и при доказательстве леммы 23, имеем

$$x_{12}(1)D_1^{-1}\int\limits_0^1 x_{11}(\tau)f_2(\tau)\,d\tau = O\left(\lambda^{1/2}e^{-i\mu_1}\int\limits_0^1 x_{11}(\tau)f_2(\tau)\,d\tau\right) = O\left(\|\tilde f\|_1\right).$$

Тем самым оценка (53) при $j=1$ получена. Для $G_{12}(1,\lambda)$ оценка (53) получается аналогично.

Лемма 25. *Если $f(t)=\chi(t)$есть характеристическая функция какого-нибудь отрезка $[a,b]$ из $(0,1)$, то*

$$G_{12}(0,\lambda)=O(\lambda^{-\frac12-\nu_1}),\qquad G_{1j}(1,\lambda)=O(\lambda^{-1})\quad (j=1,2). \tag{54}$$

Доказательство. Интеграл J из доказательства леммы 23 есть $J=\int\limits_{a_1}^{b_1} x_{22}(\tau)f_1(\tau)\,d\tau$, где $[a_1,b_1]\subset(0,1)$. Значит, $|\mu\tau^{q_1}|\ge 1$, и поэтому, используя лишь асимптотику $x_{22}(t)$ из леммы 7 при $|\mu t|^{q_1}\ge 1$ и гладкость $f_1(\tau)$, легко получаем, что $J=O(\lambda^{-3/2})$. Точно так же и $\int\limits_0^1 x_{12}(\tau)f_2(\tau)\,d\tau = O(\lambda^{-3/2})$. Тем самым оценка (54) для $G_{12}(0,\lambda)$ установлена. В силу этих же соображений получаются оценки (54) и для $G_{1j}(1,\lambda)$ $(j=1,2)$.

С помощью лемм 9, 10, 13, 14 аналогично получаются следующие факты.

Лемма 26. *Имеют место оценки:*

$$G_{21}(0,\lambda)=O(\lambda^{\nu_2-\frac12}\|\tilde f\|_1),\qquad G_{2j}(1,\lambda)=O(\|\tilde f\|_1)\quad (j=1,2).$$

Если $f(x)=\chi(x)$, то

$$G_{21}(0,\lambda)=O(\lambda^{-\frac32+\nu_2}),\qquad G_{2j}(1,\lambda)=O(\lambda^{-1})\quad (j=1,2).$$

Лемма 27. *Имеют место оценки:*

$$G_{3j}(0,\lambda)=O(\|f\|_1),\qquad G_{3j}(1,\lambda)=O(\|f\|_1)\quad (j=1,2).$$

Если $f(x)=\chi(x)$, то

$$G_{3j}(0,\lambda)=O(\lambda^{-1}),\qquad G_{3j}(1,\lambda)=O(\lambda^{-1})\quad (j=1,2).$$

Приступаем теперь к оценкам пятой строки $\eta(t,\lambda)=(\eta_1(t,\lambda),\dots,\eta_6(t,\lambda))$ матрицы $\Phi(t,\lambda)U^{-1}(\lambda)$.

Лемма 28. *В S_{δ_0} при больших $|\lambda|$ имеют место оценки:*

$$\eta_1(t,\lambda)=O(\lambda^{\nu_1-\frac12}e^{-i\mu_1}),\quad \eta_2(t,\lambda)=O(\lambda^{\frac12-\nu_2}e^{-i\mu_2}),$$

$$\eta_j(t,\lambda)=O(e^{i\mu_3\xi(t)})\quad (j=3,4),$$

$$\eta_j(t,\lambda)=O(e^{i\mu_3(\xi(1)-\xi(t))})\quad (j=5,6).$$

Доказательство. Имеем

$$\eta_j(t,\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}(z_{11}(t)A_{j5}+z_{12}(t)A_{j6})\quad (j=1,\dots,6), \tag{55}$$

где A_{jk} — алгебраические дополнения элементов определителя $\Delta(\lambda)$. Из явного вида A_{jk} и леммы 22 следуют оценки:

$$A_{15} = O(\lambda^{\nu_2-\frac{5}{2}}e^{i(\mu_2-\mu_3\xi(1))}), \qquad A_{16} = O(\lambda^{\nu_2-\frac{5}{2}}e^{i(\mu_2+\mu_3\xi(1))}), \tag{56}$$

$$A_{2j} = O(\lambda^{-\nu_1-\frac{3}{2}}e^{i\mu_1}) \quad (j=5,6), \tag{57}$$

$$A_{j5} = O(\lambda^{\nu_2-\nu_1-2}e^{i(\mu_1+\mu_2-\mu_3\xi(1))}), \quad A_{j6} = O(\lambda^{\nu_2-\nu_1-2}e^{i(\mu_1+\mu_2+\mu_3\xi(1))}) \quad (j=3,4) \tag{58}$$

$$A_{sj} = O(\lambda^{\nu_2-\nu_1-2}e^{i(\mu_1+\mu_2)}) \quad (s,j=5,6). \tag{59}$$

Из (55)–(59) по лемме 13 получаем утверждение леммы.

Наконец, мы приступаем к получению оценок для $S_j(t,\lambda)$.

Лемма 29. *В S_{δ_0} при больших $|\lambda|$ имеют место оценки:*

$$S_j(t,\lambda) = O(e^{-i\mu_j}\|\tilde f\|_1) \quad (j=1,2), \tag{60}$$

$$S_j(t,\lambda) = O(e^{i\mu_3\xi(t)}\|\tilde f\|_1) \quad (j=3,4), \tag{61}$$

$$S_j(t,\lambda) = O(e^{i\mu_3(\xi(1)-\xi(t))}\|\tilde f\|_1) \quad (j=5,6). \tag{62}$$

Если $f(x)=\chi(x)$, то в оценках (60)–(62) следует $\|\tilde f\|_1$ заменить на λ^{-1}.

Утверждения леммы следуют из лемм 16, 23–28.

5. Нули $\Delta(\lambda)$ совпадают с характеристическими значениями оператора A. Мы изучили асимптотическое поведение $\Delta(\lambda)$ при $\arg\lambda \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$. Главная часть этой асимптотики есть экспоненциальный многочлен по λ. Аналогичное исследование можно провести и при других значениях λ. Из полученной асимптотики, как известно из работы [12, с. 435–438], заключаем, что характеристические значения расположены в некоторых полосах, причем в любом прямоугольнике (две стороны — на границе полосы) каждой полосы одинаковой ширины число характеристических чисел не превосходит одного и того же числа (зависящего лишь от ширины прямоугольника). Теперь мы через S_{δ_0} обозначим область, получающуюся удалением из λ-плоскости всех нулей $\Delta(\lambda)$, вместе с окрестностями одного итого же достаточно малого радиуса δ_0. Пусть

$$\Omega_r(t;f) = \int\limits_{|\lambda|=r} \Omega(t,\lambda;f)\,d\lambda,$$

где $\Omega(t,\lambda;f)$ — пятая компонента вектора $\Phi(t,\lambda)U^{-1}(\lambda)U(g_\lambda F)$ и $|\lambda|=r$ целиком находится в S_{δ_0}.

Лемма 30. *Если $\tilde f(x) = f(x)(1-x)^\beta \in L[0,1]$, то*

$$\lim_{r\to\infty}\|\Omega_r(t;f)\|_{[\varepsilon,1-\varepsilon]} = 0, \quad \varepsilon>0. \tag{63}$$

Доказательство. Лемму 29 мы получили при $\arg\lambda \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$. Аналогичными рассуждениями получаем подобный результат и при произвольных значениях $\arg\lambda$. Тогда имеем

$$\|\Omega_r(t;f)\|_{[\varepsilon,1-\varepsilon]} \le C\|\tilde f\|_1, \tag{64}$$

где $C>0$ и не зависит от r. Формула справедлива, если $f(x)=\chi(x)$ — характеристическая функция отрезка из $(0,1)$. Пусть $\varphi(x)$ — ступенчатая функция, обращающаяся в ноль в окрестности концов отрезка $[0,1]$. Тогда из (64) имеем

$$\|\Omega_r(t;f)\|_{[\varepsilon,1-\varepsilon]} \le \|\Omega_r(f-\varphi)\| + \|\Omega_r\varphi\| \le C\|\tilde f-\tilde\varphi\|_1 + \|\Omega_r(\varphi)\|.$$

Но

$$\|\tilde f-\tilde\varphi\|_1 \le \int\limits_0^\varepsilon |f(x)|(1-x)^\beta\,dx + \int\limits_{1-\varepsilon}^1 |f(x)|(1-x)^\beta\,dx + \varepsilon^\beta\int\limits_\varepsilon^{1-\varepsilon}|f(x)-\varphi(x)|\,dx.$$

Значит, $\|\tilde f-\tilde\varphi\|_1$ за счет выбора $\varphi(x)$ можно сделать сколь угодно малым, и тогда утверждение леммы легко следует из теоремы Банаха – Штейнгауза.

Теорема 5 (основная). *Пусть* $f(x)(1-x)^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} \in L[0,1]$. *Тогда, если* $0 < \delta < \varepsilon$, *то*

$$\lim_{r\to\infty} \|S_r(x,f) - \sigma_r(\xi, f_1)|_{\xi=\varphi^{-1}(x)}\|_{[\varepsilon,1-\varepsilon]} = 0, \tag{65}$$

где $S_r(x,f)$ — *частичная сумма ряда Фурье по собственным функциям оператора* A *для тех характеристических чисел* λ_k, *для которых* $|\lambda_k| < r$, $\sigma_r(\xi, f_1)$ — *частичная сумма ряда Фурье функции* $f_1(\xi) = f(\varphi(\xi))$ *по системе* $\{e^{2k\pi\gamma^{-1}\xi i}\}_{-\infty}^{+\infty}$ *для тех* k, *для которых* $|2k\pi| < \gamma r$, $\gamma = \int\limits_0^1 \sqrt{-\theta_0'(t)}\,dt$, $\varphi(\xi)$ *определяется из* $\int\limits_0^{\varphi(\xi)} \sqrt{-\theta_0'(t)}\,dt = \xi$, *а* $\theta_0(x)$ — *инволюция такая, что* $\theta_0(x) \in C^3[0,1]$, $\theta_0'(x) < 0$ *для всех* x *из* $[0,1]$, $\theta_0(x) \equiv \theta(x)$ *при* $x \in [\delta, 1-\delta]$.

Доказательство. Введем оператор $A_0 f = \int\limits_0^{\theta_0(x)} f(t)\,dt$ и пусть $R_\lambda^0 = (E - \lambda A_0)^{-1} A_0$ — его резольвента. По теореме 1 при $x \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ $R_\lambda f = w_5(\eta)$, $R_\lambda^0 f = w_5^0(\eta)$, где $\eta = (x-\delta)(1-2\delta)$ и w_5^0 — то же самое, что и w_5, но для оператора A_0. Так как пятые компоненты $g_\lambda F$ и $g_\lambda^0 F^0$ при указанных x совпадают, то по лемме 30

$$\lim_{r\to\infty} \Big\| \int\limits_{|\lambda|=r} [R_\lambda f - R_\lambda^0 f]\,d\lambda \Big\|_{[\varepsilon,1-\varepsilon]} = 0. \tag{66}$$

Но в работе [13] было доказано, что

$$\lim_{r\to\infty} \Big\| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda^0 f\,d\lambda + \sigma_r(\xi, f_1)|_{\xi=\varphi^{-1}(x)} \Big\|_{[\varepsilon,1-\varepsilon]} = 0. \tag{67}$$

Поскольку $S_r(x,f) = -\dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda f\,d\lambda$, то из (66) и (67) получаем (65). Теорема доказана.

Замечание. Здесь мы считаем, что $|\lambda| = r$ целиком находится в S_{δ_0}, где S_{δ_0} есть пересечение областей S_{δ_0}, относящихся к A и A_0.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 06-01-00003) *и гранта Президента РФ* (*проект НШ*-2970.2008.1)

Библиографический список

1. *Хромов А.П.* Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // Мат. заметки. 1998. Т. 64, № 6. С. 932–949.
2. *Ильин В.А.* Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений, II // Диф. уравнения. 1980. Т. 16, № 6. С. 980–1009.
3. *Седлецкий А.М.* Аналитические преобразования Фурье и экспоненциальные апроксимации, II // Современная математика. Фундаментальные направления. М.: Изд-во МАИ. 2003. Т. 6. С. 3–162.
4. *Шкаликов А.А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 1983. Т. 9. С. 190–229.
5. *Корнев В.В., Хромов А.П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50.
6. *Курдюмов В.П., Хромов А.П.* О базисах Рисса из собственных функций интегрального оператора с переменным пределом интегрирования // Мат. заметки. 2004. Т. 76, № 1. С. 97–110.
7. *Хромов А.П.* Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 11. С. 115–142.
8. *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Основы теории специальных функций. М.: Наука, 1974. 303 с.
9. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. М.: Изд-во иностр. лит., 1949.
10. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
11. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.
12. *Беллман Б., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.
13. *Кувардина Л.П., Хромов А.П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегрального оператора с инволюцией // Изв. вузов. Математика. 2008. № 5. С. 67–76.