УДК 517.946 МАТЕМАТИКА

А.С. МАКИН

О БАЗИСНОСТИ СРЕДНИХ АБЕЛЯ–ПУАССОНА СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ, ОТВЕЧАЮЩИХ СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОМУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ ОПЕРАТОРУ

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 1 VII 1982)

В.А. Ильин [1] установил необходимые и достаточные условия базисности спектральных разложений, отвечающих обыкновенному дифференциальному оператору. В работах [2, 3] В.А. Ильиным получены точные по порядку оценки антиаприорного типа, связывающие L_2-нормы собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора и общего эллиптического оператора второго порядка, при определенных ограничениях на область изменения спектрального параметра λ.

В настоящей работе рассматривается вопрос о суммируемости средними Абеля–Пуассона спектральных разложений, отвечающих сильно эллиптическому оператору произвольного порядка, в случае нарушения необходимых условий базисности самих спектральных разложений. Установлены также соотношения между нормами собственных и присоединенных функций сильно эллиптического оператора, справедливые при любом значении спектрального параметра λ.

1. Рассмотрим линейный дифференциальный оператор с частными производными

$$(1)\qquad Lu = \sum_{|k| \leqslant m} A_k(x) D^k u,$$

заданный в произвольной области G пространства R^N.

Следуя В.А. Ильину, под **собственной функцией оператора** (1), **отвечающей комплексному собственному значению** λ, понимается любая, не равная тождественно нулю комплекснозначная функция $\overset{0}{u}(x)$ из класса $L_2(G)$, которая внутри G принадлежит классу $C^{(m)}$ и является регулярным решением уравнения (2)

$$(2)\qquad L\overset{0}{u} + \lambda \overset{0}{u} = 0.$$

Аналогично под **присоединенной функцией порядка** i, $i = 1, 2, \ldots$, **отвечающей тому же** λ **и собственной функции** $\overset{0}{u}$, понимается любая комплекснозначная функция $\overset{i}{u}(x)$ из класса $L_2(G)$, которая внутри G принадлежит классу $C^{(m)}$ и является регулярным решением уравнения (3)

$$(3)\qquad L\overset{i}{u} + \lambda \overset{i}{u} = \overset{i-1}{u}.$$

Краевые условия, которым удовлетворяют собственные и присоединенные функции, совершенно произвольны.

Пусть $\{u_n\}$ – полная в $L_2(G)$ и минимальная система собственных и присоединенных функций оператора (1), λ_n – соответствующие собственные значения (при нумерации собственных значений мы допускаем их совпадение). Для такой системы $\{u_n\}$ существует и притом единственная (см. [4]) биортогонально сопряженная к ней в $L_2(G)$ система $\{v_n\}$. В дальнейшем всегда будем считать, что числа λ_n не имеют конечных точек сгущения.

Как и в работе [1], все множество собственных и присоединенных функций $\{u_n\}$ разобьем на отдельные цепочки, в каждую из которых входит одна собственная и все отвечающие ей присоединенные функции. Любые две функции u_k и u_m принадлежат либо одной цепочке, либо двум разным цепочкам. Договоримся обозначать символом $u_k \sim u_m$ тот факт, что функции u_k и u_m принадлежат одной цепочке.

Перенумеруем все λ_n в порядке неубывания $|\lambda_n|$, причем нумерацию чисел λ_n, отвечающих элементам u_n одной цепочки, будем вести, начиная от собственной функции по возрастанию порядка присоединенных функций.

Определение. Будем говорить, что модифицированные средние Абеля–Пуассона спектрального разложения по системе $\{u_n\}$ обладают свойством базисности в области G, если для любой функции $f(x)$ из класса $L_2(G)$ и любого компакта K области G

$$\lim_{t\to+0} \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} (f, v_n)_G \sum_{\substack{k\geq 0\\ u_{n-k}\sim u_n}} \frac{t^k}{k!}\, u_{n-k}(x) - f(x) \Big\|_{L_2(K)} = 0.$$

2. Формулировка результатов. Пусть оператор L является сильно эллиптическим оператором порядка $2p$ на любом компакте области G. Функции $\overset{i}{u}$, $i = 0, 1, \ldots$, удовлетворяют уравнениям (2), (3).

Теорема 1. *Если коэффициенты $A_k(x)$ оператора L принадлежат классу $C^{(r)}(G)$, где $r = 2p - 1$, сверх того, коэффициенты $A_k(x)$ при $2p-1 \leqslant |k| \leqslant 2p$ принадлежат классам $C^{(|k|+\alpha)}(G)$, $0<\alpha<1$, то для любого λ, любого h такого, что $0\leqslant |h| \leqslant 2p-1$, и любых компактов K, K' области G, первый из которых лежит строго внутри второго, справедливы следующие оценки:*

$$\|D^h \overset{0}{u}\|_{L_2(K)} \leqslant C(K,K')\,(|\operatorname{Re}\lambda|^{|h|/2p}+1)\,\|\overset{0}{u}\|_{L_2(K')}, \tag{4}$$

$$\|D^h \overset{0}{u}\|_{C(K)} \leqslant C(K,K')\,(|\operatorname{Re}\lambda|^{(2|h|+N)/4p}+1)\,\|\overset{0}{u}\|_{L_2(K')} \tag{5}$$

Если в условии теоремы $r = 2p$, то оценки (4), (5) справедливы также при $|h| = 2p$.

Теорема 2. *Если коэффициенты $A_k(x)$ оператора L принадлежат классу $C^{(r)}(G)$, где $r = 2p(i+1)-1$, $i\geqslant 1$, то для любого λ, любого h такого, что $0 \leqslant |h| \leqslant 2p-1$, и любых компактов K, K' области G, первый из которых лежит строго внутри второго, справедливы следующие оценки:*

$$\|\overset{i-1}{u}\|_{L_2(K)} \leqslant C(K,K',i)\,(|\operatorname{Re}\lambda| + \ln^{2p-1}(|\lambda|+2))\,\|\overset{i}{u}\|_{L_2(K')}; \tag{6}$$

$$\|D^h \overset{i}{u}\|_{L_2(K)} \leqslant C(K,K',i)\,(|\operatorname{Re}\lambda|^{|h|/2p} + \ln^{q_1}(|\lambda|+2))\,\|\overset{i}{u}\|_{L_2(K')}, \tag{7}$$

где $q_1 = (2p-1)|h|/2p$;

$$\|D^h \overset{i}{u}\|_{C(K)} \leqslant C(K,K',i)\,(|\operatorname{Re}\lambda|^{(2|h|+N)/4p} + \ln^{q_2}(|\lambda|+2))\,\|\overset{i}{u}\|_{L_2(K')}, \tag{8}$$

где $q_2 = (2p-1)(2|h|+N)/4p$.

Если в условии теоремы $r = 2p(i+1)$, то оценки (7), (8) справедливы также при $|h| = 2p$.

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *при всех $n > n_0$*

$$\operatorname{Re}\lambda_n > 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln|\lambda_n|}{\operatorname{Re}\lambda_n} = 0;$$

2) *существуют такие $c_1>0$, $s_1>0$, что $\sum_{|\lambda_n|\leqslant\lambda} 1 \leqslant c_1(|\lambda|+1)^{s_1}$ для любого $\lambda>0$;*

3) *в системе $\{u_n\}$ существует не более конечного числа собственных функций, кратность которых превосходит $\widetilde{m}$;*

4) *существует такое* $s \geqslant 0$, *что*

$$\|u_n\|_{L_2(K)} \cdot \|v_n\|_{L_2(G)} \leqslant C(K)(|\lambda_n|+1)^s$$

для любого компакта K *области* G;

5) *коэффициенты* $A_k(x)$ *принадлежат классу* $C^{(r)}(G)$, $r = 2p(M+1) - 1$, *где* M – *наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству* $M > s + s_1 + \max(\tilde{m} - 2, 0)$.

Тогда модифицированные средние Абеля–Пуассона обладают свойством базисности в области G.

Следствие. *Если дополнительно известно, что функция* $f(x) \in L_p(G)$, $p > 2$, *или* $f(x) \in C(G)$, *то для любого компакта* K *области* G *модифицированные средние Абеля–Пуассона при* $t \to 0$ *сходятся к функции* $f(x)$ *соответственно в норме* $L_p(K)$ *или в норме* $C(K)$.

Аналогичные результаты можно получить для операторов, некоторые итерации которых являются сильно эллиптическими операторами на любом компакте области G. Пусть коэффициенты $A_k(x)$ оператора (1) принадлежат классу $C^{(l)}(G)$, где $l = m(j-1) + \max(mj+1, mj/2 + [N/2] + 1)$, $j \geqslant 2$, где $mj = 2\tilde{p}$, $\tilde{p}$ – целое число. Тогда определен оператор

$$L^j u = \tilde{L}u = \sum_{|k| \leqslant 2\tilde{p}} A_k(x) D^k u.$$

Потребуем, чтобы оператор $\tilde{L}$ был сильно эллиптическим на любом компакте области G. Пусть функции $\overset{i}{u}$, $i = 0, 1 \ldots$, удовлетворяют уравнениям (2), (3).

Теорема 4. *Если коэффициенты* $\tilde{A}_k(x)$ *оператора* $\tilde{L}$ *принадлежат классу* $C^{(r)}(G)$, *где* $r = 2\tilde{p}(i+1) - 1$, *то для любого достаточно большого по модулю* λ, *любого* h *такого, что* $0 \leqslant |h| \leqslant 2\tilde{p} - 1$, *и любых компактов* K, K' *области* G, *первый из которых лежит строго внутри второго, справедливы следующие оценки:*

$$\|\overset{i-1}{u}\|_{L_2(K)} \leqslant C(K, K', i)|\lambda| \, \|\overset{i}{u}\|_{L_2(K')}; \tag{9}$$

$$\|D^h \overset{i}{u}\|_{L_2(K)} \leqslant C(K, K', i)|\lambda|^{|h|/m} \|\overset{i}{u}\|_{L_2(K')}; \tag{10}$$

$$\|D^h \overset{i}{u}\|_{C(K)} \leqslant C(K, K', i)|\lambda|^{(2|h|+N)/2m} \|\overset{i}{u}\|_{L_2(K')}. \tag{11}$$

Если в условии теоремы $r = 2\tilde{p}(i+1)$, *то оценки* (10), (11) *справедливы также при* $|h| = 2\tilde{p}$.

Пусть $\{u_n\}$ – полная в $L_2(G)$ и минимальная система собственных и присоединенных функций оператора L, λ_n – соответствующие собственные значения.

Теорема 5. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *при всех* $n > n_0$

$$\operatorname{Re}(-\lambda_n)^j < 0, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{\ln|\lambda_n|}{\operatorname{Re}\lambda_n^j} = 0;$$

2) *существуют такие* $c_1 > 0$, $s_1 > 0$, *что* $\sum_{|\lambda_n| \leqslant \lambda} 1 \leqslant c(|\lambda|+1)^{s_1}$ *для любого* $\lambda \geqslant 0$;

3) *в системе* $\{u_n\}$ *существует не более конечного числа собственных функций, кратность которых превосходит* $\tilde{m}$;

4) *существует такое* $s \geqslant 0$, *что*

$$\|u_n\|_{L_2(K)} \cdot \|v_n\|_{L_2(G)} \leqslant C(K)(|\lambda_n|+1)^s$$

для любого компакта K *области* G;

5) *коэффициенты* $\widetilde{A}_k(x)$ *принадлежат классу* $C^{(r)}(G)$, *где* $r = 2\widetilde{p}(M+1) - 1$, *где* M – *наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству* $M > (s + s_1)/j + \max(\widetilde{m} - 2, 0)$.

Тогда существует линейное преобразование, переводящее систему $\{u_n\}$ *в такую систему* $\{\widetilde{u}_n\}$, *что для любой функции* $f(x) \in L_2(G)$ *и любого компакта* K *области* G *имеет место равенство*

$$\lim_{t \to +0} \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} e^{(-\lambda_n)^j t}(f, \widetilde{v}_n)_G \sum_{\substack{k \geqslant 0 \\ \widetilde{u}_{n-k} \sim \widetilde{u}_n}} \frac{t^k}{k!} \widetilde{u}_{n-k}(x) - f(x) \Big\|_{L_2(K)} = 0$$

($\{\widetilde{v}_n\}$ – *система функций, биортогонально сопряженная к* $\{\widetilde{u}_n\}$ *в* $L_2(G)$).

З а м е ч а н и е. В данной ситуации справедливо следствие, аналогичное следствию к теореме 3.

Теоремы 1–3 легко переносятся на случай сильно эллиптических систем дифференциальных уравнений.

Автор выражает глубокую благодарность проф. В.А. Ильину за постановку задачи и руководство работой и проф. Е.И. Моисееву за внимание к работе.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Поступило 7 VII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильин В.А.* – Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 6, с. 980–1009. 2. *Ильин В.А.* – Там же, № 5, с. 771–794. 3. *Ильин В.А.* – Там же, 1982, т. 18, № 1, с. 30–37. 4. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М.: Физматгиз, 1958.

УДК 513.811 МАТЕМАТИКА

Г.Г. МИХАЙЛИЧЕНКО

О ГРУППОВОЙ И ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЯХ В ГЕОМЕТРИИ

(Представлено академиком А.Д. Александровым 1 III 1982)

Геометрия метрических пространств дает пример бинарной структуры на одном множестве $\mathfrak{M}$. Задание метрики, понимаемой в самом общем смысле как некоторая функция a: $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R$, определяет геометрию пространства $\mathfrak{M}$. По известной метрике можно найти полную группу преобразований $\mathfrak{M}$, относительно которой метрика является двухточечным инвариантом. Групповая же симметрия лежит в основе "Эрлангенской программы" Клейна (1872), согласно которой геометрия есть теория инвариантов данной группы преобразований $\mathfrak{M}$ [1]. Если двухточечный инвариант в некотором смысле единствен, то метрическое и групповое задание геометрии будут эквивалентны. С другой стороны, в геометрии проявляется так называемая феноменологическая симметрия, на которую впервые особое внимание обратил Ю.И. Кулаков [2]. Сущность феноменологической симметрии, ставшей основным принципом теории физических структур Ю.И. Кулакова [3], состоит в данном случае в том, что в пространстве между всеми взаимными расстояниями для определенного числа произвольных точек имеется функциональная связь. В данной работе устанавливается, что в n-мерной геометрии рас-