Ю. И. Кожухова, Потенциально простые справа конечные полугруппы, *Чебышевский сб.*, 2011, том 12, выпуск 1, 120–123

https://www.mathnet.ru/cheb64

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Посвящается 65-ой годовщине со дня рождения
профессора Сергея Михайловича Воронина

Том 12 Выпуск 1 (2011)

---

УДК 512.533.74 + 512.531.2

# Потенциально простые справа конечные полугруппы

Ю.И.Кожухова (г. Москва)

**Аннотация**

Доказано, что в конечной полугруппе, если каждый элемент делится справа на любой другой элемент в потенциальном смысле, то каждый элемент делится на каждый справа и в обычном смысле.

**Abstract**

It is proved that in any finite semigroup, if every element is divided by every one on the right in potential sense then every element is divided by every one in usual sense too.

Ключевые слова: конечная полугруппа, потенциальная делимость элементов полугруппы, простая справа полугруппа

Key words and phrases: finite semigroup, potential divisibility of elements of a semigroup, right simple semigroup

Пусть $a, b$ – элементы полугруппы $S$. Мы говорим, что $a$ делится на $b$ справа, если $a = bx$ при некотором $x \in S^1$. Этот факт записывается так: $a \leqslant_r b$. Очевидно, $a \leqslant_r b \Leftrightarrow a \in bS^1 \Leftrightarrow aS^1 \subseteq bS^1$.

Если $a \leqslant_r b$ и $b \leqslant_r a$, то $(a, b) \in \mathcal{R}$, где $\mathcal{R}$ – отношение Грина на полугруппе $S$ (см. [1, гл. 2]). Таким образом, $(a, b) \in \mathcal{R}$ в том и только в том случае, если $a$ и $b$ делятся друг на друга справа.

Будем говорить, что имеет место потенциальная делимость $a$ на $b$ справа (см. [2, гл. 10]), если существует надполугруппа $T \supseteq S$ такая, что $a \in bT$. Потенциальная делимость обозначается так: $a \leqslant_r^* b$. В случае, когда $a \leqslant_r^* b$ и $b \leqslant_r^* a$, мы пишем $(a, b) \in \mathcal{R}^*$ и называем $\mathcal{R}^*$ обобщённым отношением Грина (см. [3]). Внутреннюю характеризацию потенциальной делимости, полученную Э.Г.Щутовым, даёт условие (2) следующей леммы.

Лемма 1 (2, гл. 10). *Для любых элементов $a, b$ полугруппы $S$ эквивалентны условия:*

*(1)* $a \leqslant_r^* b$;

*(2)* $\forall x, y \in S^1$ $(xb = yb \Rightarrow xa = ya)$.

Доказательство. Очевидно, для любых элементов полугруппы обычная делимость влечёт потенциальную: $a \leqslant_r \Rightarrow a \leqslant_r^* b$. Отсюда следует, что всегда $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}^*$. □

Используя лемму 1, нетрудно показать, что если $b$ – регулярный элемент полугруппы $S$ (т.е. $b \in bSb$), то $a \leqslant_r b \Leftrightarrow a \leqslant_r^* b$. Таким образом, в регулярной полугруппе $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}$. Кроме того, существуют и нерегулярные полугруппы с условием $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}$. Например, конечная моногенная полугруппа (в этой полугруппе $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}$, но в общем случае $a \leqslant_r^* b \not\Rightarrow a \leqslant_r b$). В работе [4] было доказано, что полугруппа бинарных отношений на произвольном множестве $X$ обладает тем свойством, что в ней $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}$ (и даже $a \leqslant_r^* b \Rightarrow a \leqslant_r b$).

В конечной полугруппе $\mathcal{R}^*$ и $\mathcal{R}$ необязательно совпадают, как показывает пример, приводимый ниже. Цель данной работы – показать, что в конечной полугруппе $S$ имеет место эквивалентность $\mathcal{R}^* = S \times S \Leftrightarrow \mathcal{R} = S \times S$, т.е. если каждый элемент конечной полугруппы делится на любой другой потенциально, то он делится на него и в обычном смысле.

**Пример**. Пусть $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ – элементы полугруппы $T_3$ всех отображений $\varphi : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ с умножением $x(\varphi\psi) = (x\varphi)\psi$; и пусть $S = \langle \alpha, \beta \rangle$ (подполугруппа, порождённая элементами $\alpha$ и $\beta$). Тогда $S$ – конечная полугруппа, в которой $\mathcal{R}^* \neq \mathcal{R}$.

Действительно, нетрудно проверить, что $S = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, где $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ и $\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, а таблица умножения в $S$ выглядит так:

| | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $\alpha$ | $\gamma$ | $\gamma$ | $\delta$ |
| $\beta$ | $\delta$ | $\gamma$ | $\gamma$ | $\delta$ |
| $\gamma$ | $\delta$ | $\gamma$ | $\gamma$ | $\delta$ |
| $\delta$ | $\delta$ | $\gamma$ | $\gamma$ | $\delta$ |

Очевидно, $\alpha S^1 \neq \beta S^1$, поэтому $(\alpha, \beta) \notin \mathcal{R}$. Однако, $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}^*$, так как в полугруппе $T_3$ имеют место равенства $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Напомним, что полугруппа $S$ называется простой справа, если $aS = S$ при всех $a \in S$, и простой слева, если $Sa = S$ при всех $a \in S$. Ясно, что условие $\mathcal{R} = S \times S$ равносильно тому, что $S$ – простая справа полугруппа.

Далее мы будем считать, что $S$ – конечная полугруппа, в которой $\mathcal{R}^* = S \times S$. Наша цель – показать, что тогда $\mathcal{R} = S \times S$.

Лемма 2. *Любой идемпотент полугруппы $S$ является её левой единицей.*

Доказательство. Пусть $e^2 = e \in S$. Тогда в $S^1$ мы имеем: $1 \cdot e = e \cdot e$. Так как $\mathcal{R}^* = S \times S$, то по лемме 1 получаем: $1 \cdot a = e \cdot a$ для всех $a \in S$. Это означает, что $e$ – левая единица. $\square$

Напомним, что полугруппой правых нулей называется полугруппа, удовлетворяющая тождеству $xy = y$, полугруппа левых нулей определяется тождеством $xy = x$. Далее, правая группа – это полугруппа,изоморфная прямому произведению $G \times R$ группы и полугруппы правых нулей. Прямое произведение $L \times G$ полугруппы левых нулей $L$ и группы $G$ – это левая группа. Хорошо известно (см.[1,теор. 1.27]), что простая справа полугруппа, имеющая хотя бы один идемпотент, является правой группой, а простая слева полугруппа с идемпотентом – левая группа.

Теорема 1. *Пусть $S$ – конечная полугруппа, в которой $\mathcal{R}^* = S \times S$. Тогда $S$ – правая группа (а значит, $\mathcal{R} = S \times S$).*

Доказательство. Пусть $\rho = \{(x, y) \in S \times S \mid \exists a \in S\ (xa = ya)\}$. Заметим, что ввиду леммы 1 и условия $\mathcal{R}^* = S \times S$, равенства $xa = ya$ и $xb = yb$ равносильны при любых $a, b \in S$. Нетрудно проверить, что $\rho$ – конгруэнция полугруппы $S$.

Положим $\overline{S} = S/\rho$ и обозначим через $\overline{a}$ класс конгруэнции $\rho$, содержащий элемент $a$. Проверим, что $S$ – полугруппа с правым сокращением. Действительно, пусть $\overline{x}\,\overline{a} = \overline{y}\,\overline{a}$ при некоторых $x, y, a \in S$. Тогда $\overline{xa} = \overline{ya}$, т.е. $(xa, ya) \in \rho$. Отсюда получаем, что $xab = yab$ при всех $b \in S$. Так как $\mathcal{R}^* = S \times S$, то $(ab, s) \in \mathcal{R}^*$ при всех $s \in S$. Отсюда по лемме 1 $xab = yab \Leftrightarrow xs = ys$. Итак, $xs = ys$ при всех $s \in S$. Следовательно, $(x, y) \in \rho$, а значит, $\overline{x} = \overline{y}$.

Так как $\overline{S}$ – полугруппа с правым сокращением, то при любом фиксированном $\overline{a} \in \overline{S}$ элементы $\overline{x}\,\overline{a}$ $(\overline{x} \in \overline{S})$ все разные, поэтому (ввиду конечности полугруппы $\overline{S}$) $\overline{S}\,\overline{a} = \overline{S}$. Таким образом, $\overline{S}$ – простая слева полугруппа, а ввиду конечности $\overline{S}$ – левая группа. Можно считать, что $\overline{S} = L \times G$, где $L$–полугруппа левых нулей, а $G$ – группа.

Заметим, что если $\overline{a}$ – идемпотент полугруппы $\overline{S}$, то $\overline{a}$, рассматриваемое как подмножество полугруппы $S$, является подполугруппой. Так как $S$ конечна, то в полугруппе $\overline{a} \subseteq S$ есть идемпотент. Докажем,что $|L| = 1$. Предположим, что $|L| \geqslant 2$. Тогда можно найти идемпотенты $e_1, e_2 \in S$ такие, что $\overline{e}_1 \neq \overline{e}_2$ (два различных элемента из $L$). Так как $L$ – полугруппа левых нулей, то $\overline{e}_1\overline{e}_2 = \overline{e}_1$. Но по лемме 2 $e_1e_2 = e_2$. Отсюда $\overline{e}_1 = \overline{e}_2$, что противоречит выбору элементов $e_1, e_2$. Таким образом, доказано, что $|L| = 1$. Следовательно, $\overline{S} = G$.

Обозначим через $E$ множество идемпотентов полугруппы $S$. Пусть $e$ – какой-либо идемпотент. Так как $\overline{e}^2 = \overline{e}$, то $\overline{e}$ – единица группы $\overline{S} = G$. Следовательно, $E \subseteq \overline{e}$. Пусть $x \in \overline{e}$. Тогда $x^2 \in \overline{e}$. Это влечёт, что $(x, x^2) \in \rho$, а значит, $xe = x^2e$.

Имеем: $1 \cdot xe = x \cdot xe$. Так как $\mathcal{R}^* = S \times S$, то $1 \cdot a = x \cdot a$ при всех $a \in S$. Взяв $a = x$, получим: $x = x^2$. Итак, $E = \overline{e}$. Ввиду леммы 1 $E$ – полугруппа правых нулей.

Пусть $a, b_1, b_2 \in S$ и $(b_1, b_2) \in \rho$. Предположим, что $ab_1 = ab_2$. Положим $\overline{c} = \overline{a}^{-1}$ (в группе $G$). Тогда $ca \in E$. Имеем: $cab_1 = cab_2$. Так как $ca$ – левая единица, то $b_1 = b_2$. Таким образом, $|a\overline{b}| \leqslant |\overline{ab}|$ (здесь $\overline{b}, \overline{ab}$ рассматриваются как подмножества полугруппы $S$). Отсюда следует, что $|\overline{x}| = |\overline{y}| = |E|$ при любых $x, y \in S$.

Пусть теперь $a, b$ – произвольные элементы из $S$. Так как $\overline{S}$ – группа, то $\overline{a}\,\overline{x} = \overline{b}$ при некотором $x \in S$. Имеем: $a \cdot \overline{x} = \overline{b}$. Следовательно, $ay = b$ при некотором $y \in S$. Это означает, что $S$ – простая справа полугруппа. Теорема доказана. $\square$

В заключение заметим, что для бесконечных полугрупп $S$ условия $\mathcal{R} = S \times S$ и $\mathcal{R}^* = S \times S$ не равносильны, так как в любой полугруппе с сокращениями $\mathcal{R}^* = S \times S$, но далеко не все из них просты справа.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1. М.: Мир, 1972.

[2] Ляпин Е.С. Полугруппы. М.: Физматлит, 1960.

[3] Fountain J. B. Abundant semigroups // Proc. London Math. Soc. 1982. V. 44, No. 3. P. 103-129.

[4] Кожухов И.Б., Ярошевич В.А. О потенциальной делимости матриц над дистрибутивными решётками // Дискрет. матем. 2010. Т. 22, вып. 2. С. 148-159.

Поступило 5.05.2011