

УДК 533.6.011.55 © 1992 г.

А. И. Бородин, С. В. Пейгин, С. В. Тимченко

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ОБТЕКАНИЕ ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛ
НЕРАВНОМЕРНЫМ ГИПЕРЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ВЯЗКОГО ГАЗА

В рамках модели тонкого вязкого ударного слоя исследуется обтекание трехосных эллипсоидов потоком от сверхзвукового сферического источника под углами атаки и скольжения. Получено численное решение задачи в широком диапазоне изменения определяющих параметров задачи: числа Рейнольдса, параметра неравномерности набегающего потока, геометрических характеристик течения.

Данная задача рассматривалась в работах [1–5]. При этом в [1–3, 5] исследовалось влияние эффектов неравномерности на течение около осесимметричных тел, а в [4] было изучено течение в окрестности пространственной критической точки.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу обтекания затупленного тела потоком вязкого газа из сверхзвукового сферического источника, центр которого отстоит от критической точки тела (точки максимума давления) на расстоянии Rd . Данное течение будем изучать в рамках модели гиперзвукового пространственного вязкого ударного слоя [6], уравнения которого в системе координат $\{x^i\}$ (x^α выбраны некоторым образом на поверхности тела, а x^3 отсчитывается по нормали к ней) имеют следующий безразмерный вид [7]:

$$\frac{\partial}{\partial x^3} \left(\rho u^i \sqrt{\frac{a}{a_{(ii)}}} \right) = 0,$$

$$\rho (Du^\alpha + A_{3\alpha} u^3 u^\alpha) = - \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} a^{2\beta} \sqrt{a_{(\alpha\alpha)}} \frac{\partial p}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\mu}{K} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha} \right), \quad (1)$$

$$\rho DT = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} D^0 p + \frac{\mu}{K} \Psi_{\alpha\beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\mu}{\sigma K} \frac{\partial T}{\partial x^\alpha} \right),$$

$$p = \rho T, \quad K = \varepsilon \text{Re}, \quad \varepsilon = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad \text{Re} = \frac{\rho_\infty V_\infty^0 R}{\mu(T_0)},$$

$$D = D^0 + u^3 \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad D = \frac{u^\alpha}{\sqrt{a_{(\alpha\alpha)}}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \quad T_0 = T_\infty^0 (\gamma-1) M_\infty^2,$$

$$\Psi_{\alpha\beta} = \frac{a_{\alpha\beta}}{\sqrt{a_{(\alpha\alpha)} a_{(\beta\beta)}}}, \quad M_\infty^2 = \frac{(V_\infty^0)^2 \rho_\infty^0}{\gamma p_\infty^0}.$$

Здесь индекс i принимает значения 1, 2, 3, а греческие индексы $\alpha, \beta, \delta = 1, 2$; все линейные размеры отнесены к характерному размеру R , а нормальная координата — к εR ; $V_\infty^0 u^\alpha, V_\infty^0 \varepsilon u^3$ — физические компоненты вектора скорости в направлениях x^α, x^3 соответственно; $p_\infty^0 \varepsilon^{-1} T_\infty^0 / T_\infty^0, \varepsilon^{-1} \rho_\infty^0 \rho, T_0 T, \mu_0 \mu$ — давление, плотность, температура, коэффициент вязкости; $\sigma = \text{const}$ — число Прандтля; $a_{\alpha\beta}$ — компоненты первой квадратич-

ной формы поверхности. Величины $A_{\alpha\beta}^i$ известным образом зависят от формы поверхности и приведены [7].

Граничные условия для системы (1) имеют вид

$$\begin{aligned} &\text{для } x^3=0 \quad u^i=0, \quad T=T_w(x^1, x^2), \\ &\text{для } x^3=x_\infty^3(x^1, x^2) \quad \rho(u^3-D^0x_\infty^3)=\rho_\infty u_\infty^3, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\rho_\infty u_\infty^3 \left(T - \frac{1}{2} ((u_\infty^3)^2 + \psi_{\alpha\beta} (u^\alpha - u_\infty^\alpha) (u^\beta - u_\infty^\beta)) \right) = \frac{\mu}{\sigma K} \frac{\partial T}{\partial x^3},$$

$$\rho_\infty u_\infty^3 (u^\alpha - u_\infty^\alpha) = \frac{\mu}{K} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^3}, \quad P = \frac{1+\varepsilon}{2} \rho_\infty (u_\infty^3)^2.$$

Здесь и далее индексы w, ∞, s соответствуют значениям переменных на поверхности тела, в набегающем потоке, за поверхностью ударной волны, а индекс 0 относится к размерным значениям параметров перед ударной волной на оси симметрии набегающего потока.

В сферической системе координат соотношения, неявным образом связывающие параметры газа в области между источником и ударной волной, имеют вид

$$V = \left(\frac{d}{z} \right)^2 A^{-1/(\gamma-1)}, \quad \rho = A^{1/(\gamma-1)}, \quad (3)$$

$$A = 1 + 0,5(\gamma-1) (M_\infty^0)^2 (1-V^2)$$

где $V_\infty^0 V$, $\rho_\infty^0 \rho$, $p_\infty^0 p$, zR — скорость, плотность, давление газа в набегающем потоке и расстояние от центра источника до текущей точки. Неравномерность набегающего потока определяется двумя параметрами: d и M_∞^0 . При этом, как показывает анализ, численное значение второго параметра при $M_\infty^0 \gg 1$ несущественно.

При решении задачи система координат выбиралась аналогично [8]. Она являлась системой координат типа полярной, причем маршевая координата x^1 нормировалась таким образом, что на линии $x^1=1$ нормаль к поверхности была перпендикулярна вектору скорости набегающего потока в критической точке. Для удобства численного решения и разрешения особенностей в критической точке в (1), (2) производился переход к следующим переменным:

$$\xi = x^1, \quad \eta = x^2, \quad \zeta = \frac{1}{\Delta} \int_0^{\zeta^2} \rho dx^3, \quad \Delta = \int_0^{\zeta^2} \rho dx^3, \quad (4)$$

$$u = \frac{u^1}{u_\infty^1}, \quad w = \frac{u^2}{x_1}, \quad \theta = \frac{2T}{(u_\infty^3)^2},$$

$$P_1 = \frac{1}{x^1} \frac{\partial p}{\partial x^1}, \quad P_2 = \frac{1}{(x^1)^2} \frac{\partial p}{\partial x^2}.$$

Полученная таким образом начально-краевая задача решалась численно с использованием алгоритма, изложенного в [9], являющегося обобщением [10] и позволяющего проводить расчеты при отсутствии в течении плоскостей симметрии с порядком аппроксимации $(\Delta \xi)^4 + (\Delta \eta)^2 + (\Delta \xi)$.

2. Обсуждение результатов расчетов. В качестве примера рассматривалось обтекание трехосных эллипсоидов под углом атаки α и углом скольжения β . Уравнение поверхности в декартовой системе координат (z^1, z^2, z^3) записывалось в виде

$$(z^1-1)^2 + (z^2/e) + (z^3/f) = 1 \quad (5)$$

В процессе расчета определялись профили составляющих вектора скорости, температуры и давления поперек ударного слоя, а также коэффициенты трения и теплообмена на поверхности. Выражение для коэффициента теплообмена имеет вид

$$q = \frac{2\mu}{\varepsilon\sigma\sqrt{\text{Re}}} \frac{\partial T}{\partial x^3}, \quad C_q = \frac{q(\xi, \eta)}{q(0, \eta)}. \quad (6)$$

Определяющие параметры варьировались в следующих пределах: $e=0,1$; $\omega=0,5$; $\sigma=0,71$; $10 \leq \text{Re} \leq 10^5$; $0,05 \leq \theta_\omega \leq 0,5$; $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$; $0 \leq \beta \leq 90^\circ$, $0,3 \leq f \leq 3$; $0,3 \leq e \leq 3$. Ниже везде, кроме специально оговоренных случаев, $f=0,7$, $e=0,3$.

Характерной особенностью исследуемого течения является наличие в набегающем потоке отрицательного градиента полного давления. Как показали численные расчеты, это приводит к увеличению интенсивности растекания газа в ударном слое и, как следствие, к увеличению теплового потока и компонент напряжения трения на поверхности тела. Кроме того, более сильный продольный градиент давления в возмущенной области течения, по сравнению со случаем равномерного обтекания, приводит к более раннему отрыву ударного слоя, связанного с появлением на поверхности тела линии с нулевым давлением.

При течениях в окрестности критической точки решение зависит от двух геометрических параметров: d и $k \leq 1$, где k — отношение радиусов главных кривизн тела в точке торможения. В этом случае анализ исходной системы уравнений показывает, а численные расчеты подтверждают, что величина q теплового потока в критической точке может с хорошей точностью быть определена по следующей формуле:

$$q(\text{Re}, k, d) = \sqrt{1+d^{-1}} q^0(\text{Re}^*, k^*),$$

$$\text{Re}^* = \frac{\text{Re} d}{1+d}, \quad k^* = \frac{kd+1}{d+1}, \quad (7)$$

где q^0 — тепловой поток в критическую точку тела, обтекаемого равномерным потоком газа. Величина q^0 может быть получена либо из численного решения, либо по аппроксимационной формуле из [9].

Некоторые результаты проведенного сравнения приведены в таблице. Здесь в верхней строке даны значения теплового потока из численных расчетов и в нижней строке — полученные по формуле (7). Предложенная формула при $d \geq 1$ позволяет определить величину q с погрешностью 1–3%.

Re	$\frac{k=0,1}{d=1}$	$\frac{k=0,1}{d=2}$	$\frac{k=0,1}{d=3}$	$\frac{k=0,5}{d=1}$	$\frac{k=1,0}{d=1}$
10	$\frac{0,823}{0,826}$	$\frac{0,749}{0,753}$	$\frac{0,713}{0,717}$	$\frac{0,844}{0,849}$	$\frac{0,868}{0,875}$
	$\frac{1,08}{1,09}$	$\frac{0,876}{0,885}$	$\frac{0,798}{0,806}$	$\frac{1,15}{1,17}$	$\frac{1,24}{1,27}$
100	$\frac{0,984}{0,991}$	$\frac{0,807}{0,815}$	$\frac{0,742}{0,750}$	$\frac{1,07}{1,05}$	$\frac{1,14}{1,19}$
	$\frac{0,941}{0,940}$	$\frac{0,780}{0,786}$	$\frac{0,722}{0,729}$	$\frac{1,02}{1,00}$	$\frac{1,09}{1,14}$

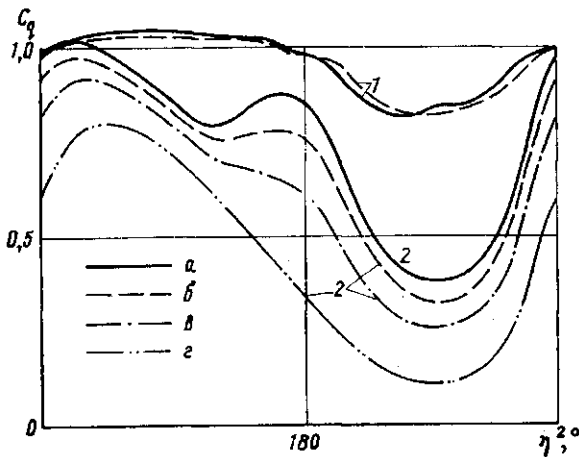


Рис. 1

Анализ формулы (7) позволяет сделать два важных вывода. Во-первых, поскольку $Re^* < Re$, то в данном случае наличие неравномерности в набегающем потоке приводит к тому, что пограничная асимптотика исходных уравнений сдвигается в область больших чисел Рейнольдса. Во-вторых, так как $k^* > k$, то ослабляется влияние несимметричности течения в ударном слое. Этот вывод подтверждается и расчетами течения около боковой поверхности, некоторые результаты которых приведены на рис. 1–5. Влияние параметра d на относительный тепловой поток иллюстрирует рис. 1, на котором приведено распределение C_q при $Re = 10^3$, $\theta_w = 0,25$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$ для $\xi = 0,067$ и $0,233$ (соответственно линии 1 и 2), $d = 10; 2; 1; 0,5$ (линии a – z). Видно, что усиление неравномерности приводит к значительному изменению C_q по величине и сглаживанию этого распределения по координате η (исчезает локальный максимум в окрестности $\eta = 180^\circ$). В то же время влияния неравномерности потока на характер зависимости величин C_q от числа Re не обнаружено — так же, как и для равномерного потока, распределения C_q при $Re \geq 10^2$ от числа Re зависят достаточно слабо.

Неравномерность набегающего потока приводит также и к более сильному влиянию на тепловой поток вдоль поверхности и температуры тела. Характер этой зависимости хорошо виден на рис. 2, где приведены распределения C_q от координаты η в случае $\alpha = \beta = 45^\circ$, $Re = 10^3$ для различных ξ , θ_w и d ($\theta_w = 0,5$, $d = 1$ — линии a ; $\theta_w = 0,05$, $d = 1$ — линии b ; $\xi = 0,1$ — линии 1; $\xi = 0,267$ — линии 2). Для сравнения здесь приведена зависимость C_q для равномерного обтекания при $\theta_w = 0,5$ (линия c).

Хорошее представление об общей картине распределения теплового потока вдоль поверхности тела дает картина изолиний C_q . Как показано в [11] для равномерного обтекания, качественный характер этой картины в основном определяется формой тела и значениями углов атаки и скольжения. В частности, при нулевом угле атаки критическая точка может быть, в зависимости от соотношений между осями эллипсоида f и e , либо точкой максимума C_q , либо точкой минимума, либо седловой точкой в распределении теплового потока. В случае обтекания тел неравномерным потоком от сверхзвукового сферического источника влияние формы тела на распределения C_q в значительной степени ослабевает, что в свою очередь ведет в ряде случаев к качественному изменению картины изолиний C_q даже для достаточно умеренного значения

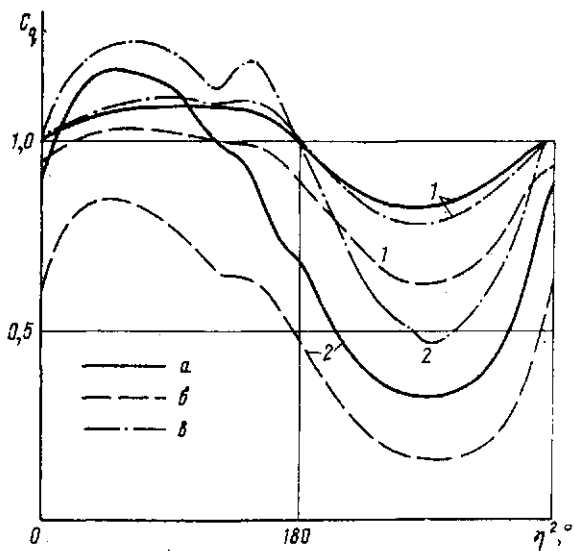


Рис. 2

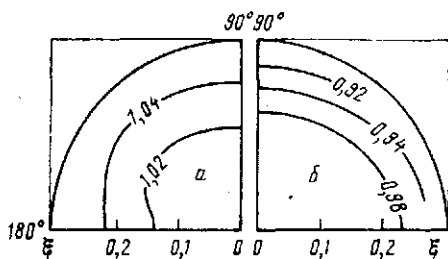


Рис. 3

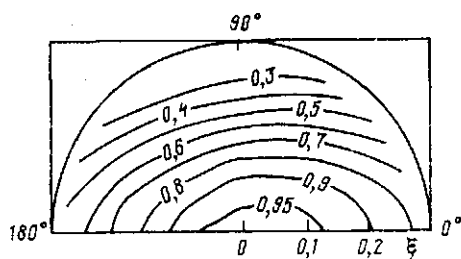


Рис. 4

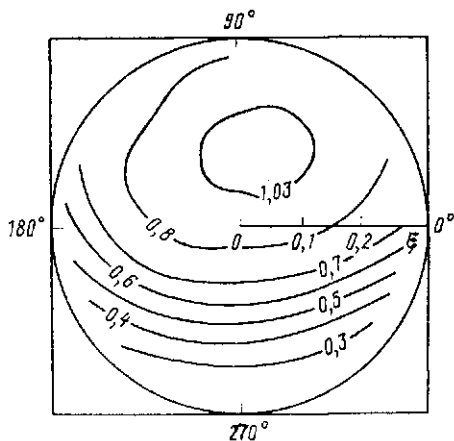


Рис. 5

параметра d . Этот вывод хорошо иллюстрирует рис. 3, на котором приведены сравнения изолиний C_q при $Re=10^3$, $\theta_w=0.25$, $e=3$, $f=2$, $\alpha=\beta=0$ для равномерного (а) и неравномерного (б) обтеканий ($d=5$). Видно, что если для равномерного обтекания C_q имеет в критической точке локальный минимум, то уже при достаточно умеренной неравномерности

набегающего потока ($d=5$) характер распределения C_q меняется и в точке $\xi=0$ реализуется максимум теплового потока.

В заключение приведем данные о влиянии на картину изолиний C_q углов атаки и скольжения. Некоторое представление об этом дают рис. 4 и 5, на которых при $\alpha=45^\circ$, $\beta=0$ и $\alpha=\beta=45^\circ$ соответственно приведены изолинии для $Re=10^3$, $\theta_w=0,25$, $d=1$. Расчеты показали, что так же, как и при равномерном обтекании, в этом случае на боковой поверхности тела возникает характерная конечная по своим размерам область, в которой тепловой поток превышает свое значение в критической точке. В то же время наличие неравномерности приводит к уменьшению размеров этой области, смещению максимума относительно теплового потока в сторону критической точки и некоторому уменьшению его величины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lin T. C., Reeves B. L., Siegelman D. B. // AIAA J. 1977. V. 15. N 8. P. 1130.
2. Еремейцев И. Г., Пулюгин Н. Н. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 4. С. 127.
3. Golovashov Yu. P. // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1985. V. 28. N 6. P. 1165.
4. Пейгин С. В., Тимченко С. В. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 6. С. 136.
5. Пейгин С. В., Тимченко С. В. // ЖПМТФ. 1989. № 5. С. 60.
6. Cheng H. K. // Proc. Heat Transfer and Fluid Mech. Inst. Stanford Press. 1961. P. 161.
7. Гершбейн Э. А. // В кн.: Гиперзвуковые пространственные течения при наличии физико-химических превращений. М., 1981. С. 29.
8. Бородин А. И., Пейгин С. В. // ИФЖ. 1987. Т. 53. № 3. С. 365.
9. Бородин А. И., Пейгин С. В. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 2. С. 150.
10. Петузов И. В. // В кн.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М.: Наука, 1964. С. 304.
11. Бородин А. И., Пейгин С. В. // ИФЖ. 1990. Т. 55. № 2. С. 24.

НИИ прикладной математики и механики
г. Томск

Поступила в редакцию
26.02.91