А. П. Баранов, Ю. А. Баранов, Аппроксимация моментов произвольных целых порядков обобщенными факториальными степенями, *Дискрет. матем.*, 2005, том 17, выпуск 1, 50–67

DOI: 10.4213/dm87

Дискретная математика

том 17 выпуск 1 * 2005

УДК 519.2

Аппроксимация моментов произвольных целых порядков обобщенными факториальными степенями

© 2005 г. А. П. Баранов, Ю. А. Баранов

Для неотрицательных целочисленных случайных величин ξ рассматривается возможность построения аппроксимаций моментов $\mathsf{E}\xi^m$, где m — целые, в том числе отрицательные, величины. Находится оценка разности

$$\mathsf{E}\xi^m - \sum_{k=0}^{\varsigma} \left\{ {m \atop m-k} \right\} \mathsf{E}\xi^{\underline{m-k}},$$

где величины $\left\{ {m \atop m-k} \right\}$ являются продолжениями на все целые величины m чисел Стирлинга 2-го рода, а функции $x^{\underline{m}}$ — обобщенными факториальными степенями.

При рассмотрении распределений статистик мощности рассеивания, введенных в [2], в частности, для решения задач принадлежности наблюдений заданному распределению, возникает необходимость изучения моментов целочисленных случайных величин ξ как для положительных, так и для отрицательных степеней m. Для положительных m эта проблема разрешается использованием известного представления степеней функции x^m в виде разложения по факториальным степеням с числами Стирлинга 2-го рода, которые мы, следуя [3], будем обозначать через $\left\{ {m \atop k} \right\}$, то есть

$$x^m = \sum_{k=0}^{m} \left\{ {m \atop k} \right\} x^{\underline{k}}, \tag{1}$$

где

$$x^{\underline{k}} = \frac{x!}{(x-k)!} = x(x-1)\dots(x-k+1). \tag{2}$$

Применяя равенство (1), получаем для целых неотрицательных m разложение

$$\mathsf{E}\xi^m = \sum_{k=0}^{m} \left\{ {m \atop k} \right\} \mathsf{E}\xi^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{m} \left\{ {m \atop k} \right\} \frac{d^k}{dt^k} \Phi(t) \bigg|_{t=1},$$

где $\Phi(t) = \mathsf{E}t^{\xi}$.

Аналогичный подход хотелось бы применить и при вычислении $\mathsf{E}\xi^m$ для отрицательных m. Представление функции x^m для произвольных m получено в [1] в виде ряда

$$x^m = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ {m \atop m-k} \right\} x^{\underline{m-k}}, \qquad x \neq 0, \tag{3}$$

где $\left\{ {m \atop k} \right\}$ — продолжения чисел Стирлинга 2-го рода, в том числе на отрицательную область значений параметров m, k, а $x^{\underline{k}}$ по-прежнему определяется по формуле (2) с определением факториала через стандартную гамма-функцию $\Gamma(x)$ в виде

$$x! = \Gamma(x+1), \qquad x \geqslant 0.$$

Мы не будем здесь углубляться в области определения чисел $\left\{ {m \atop k} \right\}$ и ряда (3), сославшись на [1] и [3]. Нам будет важно, что числа $\left\{ {m \atop k} \right\}$ удовлетворяют рекуррентному равенству

$$\left\{ {m \atop k} \right\} = \left\{ {m-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {m-1 \atop k} \right\} \tag{4}$$

для любых целых $k, m, k < m$, и

$$\left\{ {m \atop 0} \right\} = 0, \qquad m \neq 0,$$

$$\left\{ {m \atop m} \right\} = 1, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

$$\left\{ {-1 \atop k} \right\} = (-k-1)!, \qquad k = -1, -2, \ldots$$

Определим m-кратный оператор $\delta_t^m \Phi(t)$ над функцией $\Phi(t)$ действительного аргумента t при $m < 0$ как m-кратный интеграл

$$\delta_t^m \Phi(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{-m-1}} \Phi(t_{-m})\, dt_{-m} \ldots dt_1.$$

Везде далее мы будем рассматривать только целые m, и очевидно, что

$$\mathsf{E}\xi^{\underline{m}} = \delta_t^m \Phi(t)\big|_{t=1} \tag{5}$$

как для отрицательного m, так и для положительного m, если полагать что

$$\delta_t^m \Phi(t) = \frac{d^m}{dt^m} \Phi(t),$$

когда $m \geqslant 0$.

Свойство (5) делает привлекательным применение равенства (3). Однако при этом появляется несколько трудностей.

Во-первых, $\mathsf{E}\xi^m$ не определено для отрицательных m, если $\mathsf{P}(\xi = 0) > 0$. Мы везде далее будем полагать, что $0^m = 0$ для любых целых m, включая точку $m = 0$. Это определение расходится с обсуждаемыми свойствами степенных функций в точке 0 (см. [1, 3]), где предлагается определять $x^0 = 1$ для любых x. Для наших целей рассмотрения аппроксимации функций x^m в точках целых значений аргумента x такое различие не будет существенно, однако, как мы видим, необходимо для определенности $\mathbf{E}\xi^m$ при $m < 0$.

Во-вторых, аппроксимация рядом (3) весьма затруднительна из-за отсутствия явного представления чисел $\left\{{m \atop k}\right\}$. Имеется лишь возможность вычисления нескольких выражений, например,

$$\begin{aligned}
&\left\{{m \atop m}\right\} = 1,\\
&\left\{{m \atop m-1}\right\} = \sum_{k=1}^{m}(k-1) = \binom{m}{2},\\
&\left\{{m \atop m-2}\right\} = \sum_{k=1}^{m}(k-2)\binom{k-1}{2} = \binom{m}{3}\frac{3m-5}{4},\\
&\left\{{m \atop m-2}\right\} = \sum_{k=1}^{m}(k-3)\binom{k-1}{2}\frac{3k-2}{4} = \binom{m}{4}\frac{(m-2)(m-3)}{2}, \qquad m = 0, 1, 2\dots, \qquad (6)
\end{aligned}$$

которые далее также могут быть продолжены с помощью рекуррентного соотношения (4), но которые не позволяют получить обозримого явного выражения для чисел $\left\{{m \atop m-k}\right\}$ как функции от m и k. Вместе с тем, непосредственно можно убедиться, что равенства (6) для $m = -1, -2, \dots$ также дают числа, удовлетворяющие рекуррентному соотношению (4) и, следовательно, также относятся к продолжению чисел Стирлинга 2-го рода, введенному в [1]. Таким образом, имеется лишь возможность вычисления, то есть явного получения конечных сумм

$$S_s(m) = \sum_{k=0}^{s}\left\{{m \atop m-k}\right\}\mathbf{E}\xi^{\underline{m-k}} = \sum_{k=0}^{s}\left\{{m \atop m-k}\right\}\delta_t^{m-k}\Phi(t)\Big|_{t=1}. \qquad (7)$$

Отсюда, при фиксированных $s = 1, 2, \dots$ возникает задача оценки для $m < 0$ разности

$$R_s(m) = \mathbf{E}\xi^m - S_s(m) + \sum_{k=0}^{s}\left\{{m \atop m-k}\right\}\frac{\mathbf{P}(\xi = 0)}{(k-m)!}.$$

Мы будем решать эту задачу, получив сначала явное выражение для разности

$$R_s(m, x) = x^m - S_s(m, x), \qquad (8)$$

где

$$S_s(m, x) = \sum_{k=0}^{s}\left\{{m \atop m-k}\right\}x^{\underline{m-k}}.$$

Предварительно рассмотрим один полезный пример, полагая $m = -1$ и $\xi \sim \Pi(\alpha)$, то есть, что случайная величина ξ распределена по закону Пуассона со средним α.

Как отмечается в [1] на стр. 413, еще в 1730 году Стирлингом получена формула

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= \sum_{k=1}^{s+1}\frac{(k-1)!}{(x+1)\dots(x+k)} + \frac{(s+1)!}{x(x+1)\dots(x+s+1)}\\
&= \sum_{k=0}^{s}\left\{{-1 \atop -1-k}\right\}x^{\underline{-k-1}} + \frac{(s+1)!}{x}x^{\underline{-s-1}}, \qquad x \neq 0. \qquad (9)
\end{aligned}$$

Тем самым

$$R_s(-1,x) = \frac{(s+1)!}{x} x^{\underline{-s-1}}. \tag{10}$$

Используя (5), легко убедиться, что

$$\mathbf{E}\xi^{\underline{-k}} = \alpha^{-k}\mathbf{P}(\xi \geqslant k), \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{11}$$

поэтому

$$S_s(-1) = \mathbf{E}S_s(-1,\xi) = \sum_{k=0}^{s} k!\,\alpha^{-k-1}\mathbf{P}(\xi \geqslant k+1),$$

$$\mathbf{E}\xi^{-1} = \sum_{k=0}^{s} k!\,(\alpha^{-k-1}\mathbf{P}(\xi \geqslant k+1) - e^{-\alpha}/(k+1)!) + (s+1)!\,\mathbf{E}(\xi^{-1}\xi^{\underline{-s-1}}). \tag{12}$$

Отметим, что (см. [4], стр. 602)

$$\begin{aligned} S_s(-1) - e^{-\alpha}\sum_{k=0}^{s}\frac{1}{k+1} &= \sum_{k=0}^{s} k!\,\alpha^{-k-1}\mathbf{P}(\xi \geqslant k+2) \\ &= e^{-\alpha}\left(\sum_{k=0}^{s}\frac{\alpha}{(k+1)(k+2)} + \frac{\alpha^2}{(k+1)(k+2)(k+3)}\dots\right) \\ &= e^{-\alpha}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha^j}{j}\left(\frac{1}{j!} - \frac{1}{(s+2)\dots(s+j+1)}\right) \leqslant 1, \end{aligned} \tag{13}$$

и последняя оценка имеет место при любых s.

Отметим также, что при фиксированном s и $\alpha \to \infty$ из (13) вытекает оценка

$$S_s(-1) - e^{-\alpha}\sum_{k=0}^{s}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=0}^{s} k!\,\alpha^{-k-1} + O(e^{-\alpha}).$$

Теперь видно, что для получения асимптотического при $\alpha \to \infty$ разложения $\mathbf{E}\xi^{-1}$ в (12) остается оценить $\mathbf{E}\xi^{-1}\xi^{\underline{-s-1}}$. Ниже из общей формулы аппроксимации $\mathbf{E}\xi^{-m}$ мы получим и оценку остаточного члена в (12).

Лемма 1. *Для целых отрицательных m и целых $s \geqslant 0$ разность $R_s(m,x)$ при $x \neq 0, -1, \dots, m-s$ имеет вид*

$$R_s(m,x) = \sum_{r=0}^{-m-1}\frac{s-r-m}{x^{r+1}} x^{\underline{r+m-s}}\left\{ {r+m \atop r+m-s} \right\}. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть

$$\delta_s(m,x) = R_s(m,x) - \frac{1}{x}R_s(m+1,x).$$

Тогда имеет место очевидное равенство

$$R_s(m,x) = \delta_s(m,x) + \frac{1}{x}\delta_s(m+1,x) + \dots + x^{m+1}\delta_s(-1,x), \tag{15}$$

в правой части которого $-m$ слагаемых так же, как и в первой части доказываемого равенства (14). Непосредственно из формулы (8) вытекает равенство

$$\delta_s(m,x) = \sum_{k=0}^{s} x^{-1} x^{\underline{m-k}} \left(x(m-k+1) \left\{ \begin{matrix} m \\ m-k+1 \end{matrix} \right\} - (m-k) \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ m+1-k \end{matrix} \right\} \right) \tag{16}$$

и, если справедливо (14), то

$$\delta_s(m,x) = x^{-1} x^{\underline{m-s}} (s-m) \left\{ \begin{matrix} m \\ m-s \end{matrix} \right\}. \tag{17}$$

Докажем справедливость (17) индукцией по s, полагая m любым целым отрицательным числом и $x \neq 0, -1, \dots, m-s, \dots$ Непосредственно из (16) следует, что

$$\delta_0(m,x) = R_0(m,x) - \frac{1}{x} R_0(m+1,x) = (-m) x^{-1} x^{\underline{m}},$$

и это выражение соответствует (17) при $s = 0$, если учесть имеющее место для любых целых m равенство

$$\left\{ \begin{matrix} m \\ m+1 \end{matrix} \right\} = 0.$$

Отметим, что равенство для $\delta_0(-1,x)$ совпадает с равенством (10), если иметь в виду, что $R_0(0,x) = 0$.

Используя (16), представим $\delta_{s+1}(m,x)$ в виде

$$\delta_{s+1}(m,x) = \delta_s(m,x) + x^{-1} x^{\underline{m-s-1}} \left(x(m-s) \binom{m}{m-s} - (m-s-1) \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ m-s \end{matrix} \right\} \right).$$

В последнее равенство подставим выражение для $\delta_s(m,x)$, соответствующее предположению (17), и применим рекуррентное соотношение (4) в виде

$$\left\{ \begin{matrix} m+1 \\ m-s \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} m \\ m-s-1 \end{matrix} \right\} + (m-s) \left\{ \begin{matrix} m \\ m-s \end{matrix} \right\}.$$

Проводя приведение подобных членов, получаем, что

$$\begin{aligned}
\delta_{s+1}(m,x) &= x^{-1} \left(x^{\underline{m-s}} (s-m) \left\{ \begin{matrix} m \\ m-s \end{matrix} \right\} + x(m-s) x^{\underline{m-s-1}} \left\{ \begin{matrix} m \\ m-s \end{matrix} \right\} \right) \\
&\quad + x^{-1} x^{\underline{m-s-1}} \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ m-s \end{matrix} \right\} (s+1-m) \\
&= x^{-1} x^{\underline{m-s-1}} \left\{ \begin{matrix} m \\ m-s \end{matrix} \right\} (x - x + m - s - 1) + x^{-1} x^{\underline{m-s-1}} \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ m-s \end{matrix} \right\} (s+1-m) \\
&= x^{-1} x^{\underline{m+s-1}} (s+1-m) \left(\left\{ \begin{matrix} m+1 \\ m-1 \end{matrix} \right\} - (m-s) \left\{ \begin{matrix} m \\ m-s \end{matrix} \right\} \right) \\
&= x^{-1} x^{\underline{m-s-1}} (s+1-m) \left\{ \begin{matrix} m \\ m-s-1 \end{matrix} \right\}.
\end{aligned}$$

Последнее выражение соответствует $\delta_{s+1}(m,x)$, вычисленному по формуле (17), что и заканчивает индуктивное доказательство леммы.

Лемма 1 продолжает формулу Стирлинга (9) на функции x^m, $m = -1, -2, \ldots$, поскольку (10) является частным случаем (14) при $m = -1$.

Нашей целью является аппроксимация моментов целочисленных случайных величин отрицательных и положительных порядков. Этой цели служит следующая теорема.

Теорема 1. *Для любых целых m, s, $s \geqslant 0$, и положительных целых x существует постоянная $C(m,s)$, зависящая только от m и s, при которой имеет место неравенство*

$$\left| x^m - \sum_{k=0}^{s} \left\{ m \atop m-k \right\} x^{\underline{m-k}} \right| < x^{m-s-1} C(m, s). \tag{18}$$

Доказательство. Действительно, для $m \geqslant 0$ и целых $x > 0$

$$x^{\underline{m}} = x(x-1)\ldots(x-m+1) < x^m.$$

Вместе с тем, для $m < 0$ и $x > 0$

$$x^{\underline{m}} = \frac{1}{(x+1)\ldots(x-m)} < x^m.$$

Поэтому справедливость (18) и существование постоянной $C(m, s)$ вытекает для $m \geqslant 0$ из (1), а для $m < 0$ из (14).

Нетрудно также видеть, что как для случая $m \geqslant 0$, так и для $m < 0$, постоянная $C(m, s)$ может быть определена в, так сказать, конечном виде, с использованием либо формулы (1), либо леммы 1.

Неравенство (18), по нашему мнению, имеет один недостаток при его применении к аппроксимации момента $\mathbf{E}\xi^m$. Остаточный член аппроксимации

$$\mathbf{E}\xi^m \approx \sum_{k=0}^{s} \left\{ m \atop m-k \right\} \mathbf{E}\xi^{\underline{m-k}}$$

имеет форму $O(\mathbf{E}\xi^{m-s-1})$, и опять для оценки точности аппроксимации требуется оценка нефакториальных моментов, тогда как факториальные моменты можно эффективно вычислять посредством взятия оператора $\delta_t^m \Phi(t)$, как это хорошо видно на примере закона Пуассона и формулы (11). Исправлению этого недостатка служит теорема 2.

Теорема 2. *Для любых целых m и s, $s \geqslant 0$, и положительных целых x существует постоянная $C_1(m, s)$, зависящие только от m и s, при которой имеет место неравенство*

$$\left| x^m - \sum_{k=0}^{s} \left\{ m \atop m-k \right\} x^{\underline{m-k}} \right| < C_1(m, s)(x^{\underline{m-s-1}} + I(x < m-s-1)) \tag{19}$$

(здесь $I(A)$ — индикатор события A).

Доказательство. В теореме 1 мы использовали неравенство $x^{\underline{m}} < x^m$ для целых m и x, $x > 0$. Теперь мы используем другое неравенство для факториальной степенной функции от целочисленного положительного аргумента

$$x^m \leqslant C(m)(x^{\underline{m}} + I(x < m)), \tag{20}$$

где $C(m)$ — постоянная, зависящая только от m, m и x — целые числа, $x > 0$.

Действительно, для $m = 0$, очевидно, (20) выполнено при $C(0) = 1$. Пусть $m > 0$. Тогда достаточно положить $C(m) = m^m$. Действительно, при $0 < x < m$ функция $x^m < m^m$, а при $x \geqslant m$ функция $x < xm - km$, $k = 0, \dots, m-1$.

Поэтому

$$\begin{aligned} x^m &< xm(xm-m)\dots(xm-m^2+m) + mI(x<m) \\ &= m^m(x(x-1)\dots(x+m-1) + I(x<m)). \end{aligned}$$

Пусть $m < 0$. Тогда достаточно выбрать $C(m) = (1-m)^{-m}$, поскольку при $x \geqslant 1$

$$x^{-1} \leqslant (1-m)(x-k)^{-1}, \qquad k = -1, \dots, m.$$

Таким образом, неравенство (20) в условиях теоремы 2 доказано, и оценка (19) следует из теоремы 1. При этом достаточно положить $C_1(m,s) = C(m,s)C(m-s-1)$. Отметим, что и в этом случае постоянная $C_1(m,s)$ может быть выписана в явной форме.

Теорема 2 немедленно приводит нас к возможности применения аппроксимации (19) для вычисления положительных или отрицательных моментов $\mathsf{E}\xi^m$ с учетом принятого нами ранее соглашения, что $0^m = 0$ для всех целых m:

$$\left|\mathsf{E}\xi^m - \sum_{k=0}^{s}\left\{{m \atop m-k}\right\}\left(\mathsf{E}\xi^{\underline{m-k}} - \frac{I(m<0)}{(k-m)!}\mathsf{P}(\xi=0)\right)\right| \leqslant C_1(m,s)(\mathsf{E}\xi^{\underline{m-s-1}} + \mathsf{P}(\xi < m-s-1)). \quad (21)$$

Возвращаясь к рассмотренному нами ранее примеру $\xi \sim \Pi(\alpha)$, получаем в формуле (12) оценку остаточного члена

$$\left|\mathsf{E}\xi^{-1} - \sum_{k=0}^{s} k!\,\alpha^{-k-1}\mathsf{P}(\xi \geqslant k+2)\right| \leqslant C_1(-1,s)\alpha^{-s-2}\mathsf{P}(\xi \geqslant s+2),$$

которая при $\alpha \to \infty$ может быть приведена к виду

$$\mathsf{E}\xi^{-1} = \sum_{k=0}^{s} k!\,\alpha^{-k-1} + O(\alpha^{-s-2}).$$

В качестве дальнейшей иллюстрации формулы (21) отметим, что при условии $\alpha \to \infty$, $\xi \sim \Pi(\alpha)$ для любого фиксированного целого m

$$\mathsf{E}\xi^m = \sum_{k=0}^{s}\left\{{m \atop m-k}\right\}\alpha^{m-k} + O(\alpha^{m-s-1}). \quad (22)$$

Рассмотрим теперь возможность применения изложенной выше идеи аппроксимации моментов $\mathsf{E}\xi^m$ факториальными моментами $\mathsf{E}\xi^{\underline{k}}$ к аппроксимации смешанных моментов вида

$$\mu_{m,\bar{k}} = \mathsf{E}\xi^m \prod_{i=1}^{r} \xi_i^{k_i},$$

где $\xi_1, \dots, \xi_r$ — независимые неотрицательные целочисленные случайные величины, $\xi = \xi_1 + \dots + \xi_r$, а параметры $m, k_1, \dots, k_r$ суть целые числа, $k = k_1 + \dots + k_r$, $\bar{k} = (k_1, \dots, k_r)$. По-прежнему, для определенности, будем полагать, что $0^m = 0$ для любого m. Воспользуемся формулой (19) из теоремы 2 для построения аппроксимации функции

$$f(\bar{x}) = x^m \prod_{i=1}^{r} x_i^{k_i}$$

от целочисленных аргументов $x_1, \dots, x_r \geqslant 0$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_r)$, $x = x_1 + \dots + x_r$. Пусть

$$M(\bar{x}) = \left(\sum_{j=0}^{s} \left\{ {m \atop m-j} \right\} x^{\underline{m-j}} \right) \prod_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{s} \left\{ {k_i \atop k_i - j} \right\} x_i^{\underline{k_i - j}},$$

$$R(\bar{x}) = x^m \prod_{i=1}^{r} x_i^{k_i} - M(\bar{x}).$$

Тогда

$$M(\bar{x}) = \sum_{0 \leqslant j_0 < \dots < j_r \leqslant s} x^{\underline{m-j_0}} x_1^{\underline{k_1 - j_1}} \dots x_r^{\underline{k_r - j_r}} \left\{ {m \atop m - j_0} \right\} \prod_{i=1}^{r} \left\{ {k_i \atop k_i - j_i} \right\},$$

и для $R(\bar{x})$ справедливо представление

$$\begin{aligned} R(\bar{x}) &= \prod_{j=0}^{r} (a_j + b_j + I_j) - \prod_{j=0}^{r} a_j \\ &= I_0 I_1 \dots I_r + \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{0 \leqslant j_0 < \dots < j_n \leqslant r} I_{j_0} \dots I_{j_n} \prod_{i \notin \{j_0, \dots, j_n\}} (a_i + b_i) + a_{j_0} \dots a_{j_n} \prod_{i \notin \{j_0, \dots, j_n\}} b_i, \end{aligned}$$

где

$$a_0 = \sum_{j=0}^{s} x^{\underline{m-j}}, \quad b_0 = x^{m-s-1}, \quad I_0 = I(x < m - s - 1),$$

$$a_i = \sum_{j=0}^{s} x^{\underline{k_i - j}}, \quad b_i = x_i^{k_i - s - 1}, \quad I_i = I(x_i, k - s - 1), \quad i = 1, \dots, r.$$

Нетрудно видеть, что сумма факториальных степеней всех аргументов $x, x_1, \dots, x_r$ в произведениях вида $a_{j_1} \dots a_{j_n} \prod_{i \notin \{j_1, \dots, j_n\}} b_i$ после перемножения в них сумм $a_{j_1}, \dots, a_{j_n}$ не превосходят $m - s - 1 + \sum_{j=1}^{r} k_j$ при $0 \leqslant n \leqslant r - 1$.

Во всех остальных слагаемых в представлении $R(\bar{x})$ в качестве сомножителя присутствует индикаторная функция. Эти слагаемые при всех целых $x, x_1, \dots, x_r \geqslant 0$ допускают оценки выражениями $x^{\underline{y}} x_1^{\underline{y_1}} \dots x_r^{\underline{y_r}} I(x_i < a)$, $i = 1, \dots, r$, или $x^{\underline{y}} x_1^{\underline{y_1}} \dots x_r^{\underline{y_r}} I(x < a)$, где $a, y, y_1, \dots, y_r$ — некоторые целые числа.

Заметим, что из (20) и неравенства $(x^{\underline{y}})^2 \leqslant x^{2y}$, верного для любого целого y и $x > 0$, вытекает неравенство

$$(x^{\underline{y}})^2 < C(2m)(x^{\underline{2y}} + I(x < 2y),$$

где $C(2m)$ определено в (20).

Последнее неравенство может быть использовано при оценке слагаемых с множителем, являющимся индикаторной функцией. Например,

$$\mathsf{E}\xi^{\underline{y}} I(\xi_1 < a) < \left(C(2y)(\mathsf{E}\xi^{\underline{2y}} + I(\xi < 2y) + \frac{I(y<0)}{(-y)!}\sqrt{\mathsf{P}\{\xi = 0\}} \right) \mathsf{P}\{\xi_1 < a\}.$$

Из определения функции $M(\bar{x})$ и оценки для $R(\bar{x})$ видно, что важную роль в аппроксимации смешанного момента $\mu_{m,\bar{k}}$ играют смешанные факториальные моменты вида

$$\mu(m, \bar{k}) = \mathsf{E}\xi^{\underline{m}} \prod_{i=1}^{r} \xi_i^{\underline{k_i}}.$$

Общий способ вычисления $\mu(m, \bar{k})$ базируется на применении операторов δ_t^m к производящей функции

$$\Phi(z_0, z_1, \ldots, z_r) = \mathsf{E}z_0^{\xi} \prod_{i=1}^{r} z_i^{\xi_i} = \prod_{i=1}^{r} \mathsf{E}(z_0 z_i)^{\xi_i}.$$

Очевидно, что

$$\mu(m, \bar{k}) = \delta_{z_0}^m \delta_{z_1}^{k_1} \ldots \delta_{z_r}^{k_r} \, \Phi(z_0, z_1, \ldots, z_r)|_{z_0 = z_1 = \ldots = z_r = 1}$$

для сходящихся в круге $|z| \leqslant 1$ производящих функций $\Phi_i(z) = \mathsf{E}z^{\xi_i}$, $i = 1, \ldots, r$. Поэтому

$$\mu(m, \bar{k}) = \delta_{z_0}^m z_0^k \left(\prod_{i=1}^{r} \delta_{z_i}^{k_i} \, \Phi_i(z_i)|_{z_i = z_0} \right) \Bigg|_{z_0 = 1}. \tag{23}$$

Вычисление (23) для $m \geqslant 0$ и любых k_i, $i = 1, \ldots, r$, не вызывает трудностей, поскольку известна формула Лейбница m-кратного дифференцирования

$$\frac{d^m}{dz^m} z^k f(z) \Bigg|_{z=1} = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} k^{\underline{j}} \, \frac{d^{m-j}}{dz^{m-j}} f(z) \Bigg|_{z=1}, \tag{24}$$

если $f(z)$ — нужное число раз дифференцируемая функция.

Однако, для $m < 0$ общей формулы m-кратного интегрирования произведения двух функций неизвестно. Поэтому далее смешанные моменты $\mu(m, \bar{k})$ мы будем вычислять с учетом конкретного вида $f(z)$ для определенных типов случайных величин ξ_i и полагать

$$\xi_i \sim \Pi(\alpha_i), \qquad i = 1, \ldots, r.$$

Начнем рассмотрение с наиболее простого, но, как будет видно далее, весьма показательного случая $r = 2$, $k_2 = 0$. В этом случае

$$\bar{k} = k, \quad \mu(m, k) = \mathsf{E}\xi_1^{\underline{k}}(\xi_1 + \xi_2)^{\underline{m}}, \quad \Phi_1(z) = e^{\alpha_1(z-1)}, \quad \Phi_2(z) = e^{\alpha_2(z-1)}.$$

При $k \geqslant 0$ взятие оператора $\delta_z^k \Phi_1(z)$ очевидно:

$$\delta_z^k \Phi_1(z) = \alpha_1^k e^{\alpha_1(z-1)}.$$

При $k < 0$, проводя $(-k)$-кратное интегрирование, получаем, что

$$\delta_z^k \Phi_1(z) = \int_0^z \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{-k-1}} \Phi(t_{-k})\, dt_{-k} dt_{-k-1} \ldots dt_1$$
$$= \alpha_1^k \left(e^{\alpha_1(z-1)} - \sum_{j=0}^{-k-1} \frac{(\alpha_1 z)^j}{j!} e^{-\alpha_1} \right).$$

Объединяя два последних представления $\delta_z^k \Phi_1(z)$, полагая $\sum_{j=0}^{k} = 0$ при $k < 0$, получаем, что

$$\mu(m,k) = \alpha_1^k e^{-\alpha} \delta_z^m z^k \left(e^{\alpha_1 z} - \sum_{j=0}^{-k-1} \frac{(\alpha_1 z)^j}{j!} \right) e^{\alpha_2 z} \Bigg|_{z=1}, \tag{25}$$

где $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.

Исследование выражения (25) при произвольных m, k и α_1, α_2 весьма затруднительно, и, как мы укажем далее, его удается провести только для случая $m \geqslant 0$, $k \geqslant 0$. Поэтому мы ограничимся получением асимптотического приближения факториального момента $\mu(m,k)$ только при $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \to \infty$.

Рассмотрим взятие оператора δ_z^m для функции

$$f(z) = \left(e^{\alpha_1 z} - \sum_{j=0}^{-k-1} \frac{(\alpha_1 z)^j}{j!} \right) z^k e^{\alpha_2 z}. \tag{26}$$

Теорема 3. *Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \to \infty$ таким образом, что существуют постоянные C_1, C_2, при которых*

$$0 < C_1 < \alpha_1 \alpha^{-1} < C_2 < 1.$$

Тогда для произвольных целых m, k, s, $s \geqslant 0$, и для функции $f(z)$, определенной в (26),

$$\delta_z^m f(z)\big|_{z=1} = \sum_{i=0}^{s} \binom{m}{i} \alpha^{m-i} e^{\alpha} k^{\underline{i}} + O(\alpha^{m-s-1} e^{\alpha}). \tag{27}$$

Доказательство. Рассмотрим наиболее простой случай $m \geqslant 0$ при произвольном k. С этой целью воспользуемся равенством (24) и получим, что

$$\frac{d^m}{d^m z} f(z)\Bigg|_{z=1} = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} k^{\underline{i}} \frac{d^{m-i}}{d^{m-i} z} e^{\alpha z}\Bigg|_{z=1} - \sum_{j=0}^{-k-1} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (k+j)^{\underline{i}} \frac{\alpha_1^j}{j!} \frac{d^{m-i}}{d^{m-i} z} e^{\alpha_2 z}\Bigg|_{z=1}$$
$$= e^{\alpha} \sum_{i=0}^{s} \binom{m}{i} k^{\underline{i}} (\alpha_1 + \alpha_2)^{m-i} + O((\alpha_1 + \alpha_2)^{m-s-1} e^{\alpha})$$
$$+ O(\alpha_2^m \alpha_1^{-k-1} I(k < 0) e^{\alpha_2}),$$

что соответствует (27), так как $\binom{m}{s} = 0$ при $s > m$ и $\alpha_2 < (1 - C_1)\alpha$. Доказательство для случая $m < 0$ более громоздко и проводится методом индукции по m для любого фиксированного k. Индуктивное доказательство построим для несколько более общей формулы

$$\delta_z^m f(z) = e^{\alpha z}\sum_{i=0}^{s}\binom{m}{i}\alpha^{m-i}k^{\underline{i}}z^{k-i} + O(\alpha^{m-s-1}e^{\alpha z}) + O(\alpha^{|k|}e^{\varepsilon z}), \tag{28}$$

где $0 < \varepsilon \leqslant z \leqslant 1$, ε — некоторая постоянная, $1 - C_1 < \varepsilon < 1$. Обычно понимаемый символ $O(\cdot)$ для функции $\Psi(\alpha, z)$ в записи $y(\alpha, z) = O(\Psi(\alpha, z))$ будет нами использоваться в смысле существования некоторой постоянной C, не зависящей от α и z, при которой

$$y(\alpha, z) < C\Psi(\alpha, z)$$

в области $\varepsilon \leqslant z \leqslant 1$ и $\alpha \to \infty$. Постоянная C может зависеть от вида функции $\Psi(\alpha, z)$.

Рассмотрим случай $m = -1$, представив область интегрирования в виде двух частей

$$\delta_z^{-1} f(x) - \int_\varepsilon^z f(t)\,dt = \int_0^\varepsilon f(t)\,dt = \sum_{j=\max(-k,0)}^{\infty}\frac{\alpha_1^j}{j!}\int_0^\varepsilon t^{j+k}e^{\alpha_2 t}dt \leqslant \varepsilon^k e^{\varepsilon\alpha}. \tag{29}$$

Тогда

$$\int_\varepsilon^z f(t)\,dt - \int_\varepsilon^z t^k e^{\alpha t}dt = O\left(\sum_{j=0}^{-k-1}\frac{\alpha_1^j}{j!}\int_\varepsilon^z t^{j+k}e^{\alpha_2 t}dt\right) + O(\alpha^{|k|}e^{\varepsilon z}). \tag{30}$$

Теперь возьмем $s+1$ раз по частям интеграл:

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^z t^k e^{\alpha t}dt &= \frac{t^k}{\alpha}e^{\alpha t}\Big|_\varepsilon^z - \frac{k}{\alpha}\int_\varepsilon^z t^{k-1}e^{\alpha t}dt = \dots \\ &= \frac{e^{\alpha z}}{\alpha}\sum_{i=0}^{s}\binom{-1}{i}\alpha^{-i}k^{\underline{i}}z^{k-i} + O(\alpha^{-s-2}e^{\alpha z}).\end{aligned} \tag{31}$$

Объединяя (29), (30) и (31), получаем (28) при $m = -1$.

Предполагая справедливость (28) для $m \leqslant -1$, докажем справедливость (28) при $m-1$. Пусть

$$S = S_\alpha(k, z) = \sum_{i=0}^{s}\binom{m}{i}\alpha^{m-i}k^{\underline{i}}\int_\varepsilon^z t^{k-i}e^{\alpha t}dt. \tag{32}$$

Тогда

$$\delta_z^{m-1} f(z) = \int_0^z \delta_t^m f(t)\,dt = S + O\left(\int_0^\varepsilon \delta_t^m f(t)dt\right) + O\left(\alpha^{m-s-1}\int_\varepsilon^z e^{\alpha z}dt\right)$$

и достаточно рассмотреть S с оценкой интеграла

$$\int_0^\varepsilon \delta_t^m f(t)\,dt = \int_0^\varepsilon\int_0^{t_1}\dots\int_0^{t_{-m-1}} f(t_{-m})\,dt_{-m}\dots dt_1, \tag{33}$$

где $0 < t_j \leqslant \varepsilon$, $j = 1, \dots, t_{-m-1}$.

Разложением в ряд Тейлора и сравнением слагаемых правой и левой частей неравенства

$$e^x - \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \leqslant x^{n+1} e^x \tag{34}$$

легко убедиться в его справедливости при $n \geqslant 0$ и $x \geqslant 0$. Следовательно, при отрицательном k из (34) при $0 \leqslant t_{-m-1} \leqslant \varepsilon$ вытекает, что

$$\int_0^{t_{-m-1}} f(t_{-m})\,dt_{-m} = \int_0^{t_{-m-1}} \left(e^{\alpha_1 t_{-m}} - \sum_{i=0}^{-k-1} \frac{(\alpha_1 t_{-m})^i}{i!} \right) t_{-m}^{\underline{k}} e^{\alpha_2 t_{-m}} dt_{-m}$$

$$\leqslant \int_0^{t_{-m-1}} (\alpha, t_{-m})^{-k} t_{-m}^{\underline{k}} e^{\alpha t_{-m}} dt_{-m} = O(\alpha_1^{-k} e^{\alpha\varepsilon}).$$

Поскольку интегрирование в (33) берется $(-m)$-раз по областям размера не более ε, для отрицательного k и $\varepsilon \leqslant z \leqslant 1$

$$\int_0^{\varepsilon} \delta_t^m f(t)\,dt = O(\alpha_1^{-k} e^{\alpha\varepsilon}). \tag{35}$$

Для неотрицательного k и $0 < 1 - C_1 < \varepsilon \leqslant z$

$$\int_0^{\varepsilon} \delta_t^m f(t)\,dt \leqslant \int_0^{\varepsilon} \cdots \int_0^{t_{-m-1}} t_{-m}^{\underline{k}} e^{\alpha t_{-m}} e\, dt_{-m} \ldots dt_1 \leqslant e^{\alpha\varepsilon} - 1 = O(e^{\alpha\varepsilon}).$$

Следовательно, оценка (35) имеет место для интеграла (33) при любом целом k.

Используя равенства

$$\binom{-1}{j}\binom{m}{i} = (-1)^j(-1)^i \binom{-m+i-1}{i},$$

$$k^{\underline{i}}(k-i)^{\underline{j}} = \frac{k!}{(k-i-j)!} = k^{\underline{i+j}},$$

применим формулу (31) к сумме

$$S = \sum_{i=0}^{s} \binom{m}{i} \alpha^{m-i} k^{\underline{i}} \frac{e^{\alpha z}}{\alpha} \sum_{j=0}^{s} \binom{-1}{j} \alpha^{-j} (k-i)^{\underline{j}} z^{k-i-j} + O(\alpha^{m-s-2} e^{\alpha z})$$

$$= e^{\alpha z} \sum_{i=0}^{s} \sum_{j=0}^{s} \binom{-m+i-1}{i} (-1)^{i+j} \alpha^{m-i-j-1} z^{k-i-j} k^{\underline{i+j}} + O(\alpha^{m-s-2} e^{\alpha z}).$$

Сделаем замену индексов суммирования $i + j = \gamma$ и, учитывая, что $m < 0$, получим равенства

$$S = e^{\alpha z} \sum_{\gamma=0}^{2s} (-1)^{\gamma} \alpha^{m-\gamma-1} z^{\gamma} k^{\underline{\gamma}} \sum_{i=0}^{\gamma} \binom{-m+i-1}{i} + O(\alpha^{m-s-2} e^{\alpha z})$$

$$= e^{\alpha z} \sum_{\gamma=0}^{s} (-1)^{\gamma} \alpha^{m-\gamma-1} z^{\gamma} k^{\underline{\gamma}} \binom{-m+\gamma}{\gamma} + O(\alpha^{m-s-2} e^{\alpha z})$$

$$= e^{\alpha z} \sum_{\gamma=0}^{s} \alpha^{m-\gamma-1} z^{\gamma} k^{\underline{\gamma}} \binom{m-1}{\gamma} + O(\alpha^{m-s-2} e^{\alpha z}).$$

Последнее выражение для S вместе с (35) приводит к (28) для $\delta_z^{m-1} f(z)$. Этим индуктивное по m доказательство заканчивается.

Отметим, что равенство для неопределенных m-кратных интегралов действительного аргумента z

$$\int \dots \int z^k e^{\alpha z} dz = \frac{e^{\alpha z}}{\alpha^m} \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{\alpha^i} \binom{i+m-1}{i} k^{\underline{i}} z^{k-i} + c_{m-1}(z) \tag{36}$$

при $m \geqslant 0$, $k \geqslant 0$ и произвольного полинома $c_{m-1}(z)$ степени $m-1$ получено И. В. Харламовым и сообщено автору в частной беседе. Этот результат имеет самостоятельный интерес, в значительной степени он натолкнул нас на разложение, приведенное в теореме 3.

Следствие 1. *Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \to \infty$ таким образом, что существуют постоянные C_1, C_2, при которых*

$$0 < C_1 < \alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} < C_2 < 0.$$

Тогда для произвольных m, k, s, $s \geqslant 0$, смешанные факториальные моменты могут быть аппроксимированы выражением

$$\mu(m,k) = \alpha_1^k \alpha^m \sum_{i=0}^{s} \binom{m}{i} \alpha^{-i} k^{\underline{i}} + O(\alpha^{m+k-s-1}). \tag{37}$$

Равенство (37) следует из (25) и (27).

Наличие аппроксимации факториальных моментов $\mu(m,k)$ позволяет построить аналогичную аппроксимацию обычных моментов

$$\begin{aligned} \mu_{m,k} &= \mathbf{E}\xi_1^k(\xi_1+\xi_2)^m \\ &= \sum_{e=0}^{s} \sum_{0\leqslant i,j\leqslant 1, i+j=l} \left\{ {k \atop k-i} \right\} \left\{ {m \atop m-j} \right\} \mu(m-j, k-i) + O(\alpha^{m+k-s-1}), \end{aligned} \tag{38}$$

что вытекает из определения функции $M(x,y,z)$ и оценки разности $R(x,y,z)$. Вместе с тем, следует отметить, что получение явного выражения для (38) уже весьма громоздко даже для случая $r = 2$. Однако, применение символьных преобразований с использованием равенств (6) и ЭВМ делает эту задачу вполне решаемой.

Мы предполагаем ниже продемонстрировать возможность применения формулы (38) для вычисления конкретных моментов при значениях $s = 3$. Для $s = 2$, $r = 2$, $k_2 = 0$ эту работу удается сделать вручную, без применения ЭВМ:

$$\begin{aligned}
\mu_{m,k} &= \mu(m,k) + \left\{ {m \atop m-1} \right\} \mu(m-1,k) + \left\{ {k \atop k-1} \right\} \mu(m,k-1) \\
&+ \left\{ {m \atop m-2} \right\} \mu(m-2,k) + \left\{ {k \atop k-2} \right\} \mu(m,k-2) \\
&+ \left\{ {m \atop m-1} \right\} \left\{ {k \atop k-1} \right\} \mu(m-1,k-1) + O(\alpha^{k+m-3}) \\
&= \alpha_1^k \alpha^m + \alpha_1^k \alpha^{m-1} mk + \left\{ {m \atop m-1} \right\} \alpha_1^k \alpha^m - 1 + \left\{ {k \atop k-1} \right\} \alpha_1^k \alpha^m \\
&+ \alpha_1^k \alpha^{m-2} \binom{m}{2} k(k-1) + \left\{ {m \atop m-2} \right\} \alpha_1^k \alpha^{m-2} + \left\{ {k \atop k-2} \right\} \alpha_1^{k-2} \alpha^m \\
&+ \binom{m}{2} \binom{k}{2} \alpha_1^{k-1} \alpha^{m-1} + \binom{m}{2} (m-1) k \alpha_1^k \alpha^{m-2} \\
&+ \binom{k}{2} m(k-1) \alpha_1^{k-1} \alpha^{m-1} + O(\alpha^{k+m-3}) \\
&= \alpha_1^k \alpha^m + \alpha_1^k \alpha^{m-1} \left(\binom{m}{2} + mk \right) + \binom{k}{2} \alpha_1^{k-1} \alpha^m \\
&+ \alpha_1^k \alpha^{m-2} \binom{m}{2} \left(k(k-1) + \frac{(m-2)(3m-5)}{12} \right) + \binom{k}{3} \frac{3k-5}{4} \alpha_1^{k-2} \alpha^m \\
&+ \binom{k}{2} \alpha_1^{k-1} \omega^{m-1} \left(\binom{m}{2} + m(k-1) \right) + O(\alpha^{k+m-3}).
\end{aligned} \tag{39}$$

Нетрудно видеть, что, как и должно быть, (39) при $m = 0$ или $k = 0$ превращается в формулу (22) при $s = 2$.

Продолжим рассмотрение возможности аппроксимации смешанных факториальных моментов более сложного вида $\mu(m, \bar{k})$, через которые выражаются нефакториальные моменты $\mu_{m,\bar{k}}$

Пусть

$$\varphi(z) = \prod_{i=1}^{r} f_i(\alpha_i, z), \tag{40}$$

где

$$f_i(\alpha_i, z) = z^{k_i} \left(e^{\alpha_i z} - \sum_{j=0}^{-k_i-1} \frac{(\alpha_i z)^j}{j!} \right), \qquad i = 1, \ldots, r.$$

Тогда равенство (23) для случайных величин $\xi_i \sim \prod(\alpha_i)$, $i = 1, \ldots, r$, принимает вид

$$\mu(m, \bar{k}) = \alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_r^{k_r} e^{-\alpha} \delta_z^m \varphi(z)|_{z=1}. \tag{41}$$

Нетрудно видеть, что, как и следовало ожидать, выражение (41) при $r = 2, k_2 = 0$ сводится к (25).

Теорема 4. *Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \to \infty$ таким образом, что существуют не зависящие от $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ постоянные c_1, c_2, при которых*

$$0 < c_1 < \alpha_i \alpha^{-1} < c_2 < 1.$$

Тогда для произвольных целых s, m, k_i, $i = 1, \dots, r$, $s > 0$, и функций $\varphi(z)$, определенных равенством (40),

$$\delta_z^m \varphi(z)|_{z=1} = \sum_{i=0}^{s} \binom{m}{i} \alpha^{m-i} e^{\alpha} \underline{k}^{\underline{i}} + O(\alpha^{m-s-1} e^{\alpha}). \tag{42}$$

Доказательство. В идейном плане и во многих технических деталях доказательство теоремы 4 повторяет доказательство теоремы 3 с соответствующим усложнением записей. Мы рассмотрим лишь моменты, где появляется определенная новизна.

Случай $m \geqslant 0$ рассматривается аналогично с помощью (24).

Справедливость (42) для $m < 0$ доказывается индуктивно по m для произвольных $k_1, \dots, k_r$, как следствие аппроксимации

$$\delta_z^m \varphi(z) = e^{\alpha z} \sum_{i=0}^{s} \binom{m}{i} \alpha^{m-i} \underline{k}^{\underline{i}} z^{k-i} + O(\alpha^{m-s-1} e^{\alpha z}) + O(\alpha^{\max|k_i|} e^{\varepsilon z}) \tag{43}$$

при $\varepsilon \leqslant z \leqslant 1$ и некоторой фиксированной величине ε, $1 - c_1 < \varepsilon < 1$.

Рассмотрим случай $m = -1$. Представим функции $f_i(\alpha_i, z)$ в виде

$$f_i(\alpha_i, z) = z^{k_i} \sum_{j=\max(-k_i,0)}^{\infty} \frac{(\alpha_i z)^j}{j!}$$

Тогда для любых фиксированных $\bar{k}$ и s

$$\begin{aligned}
\delta_z^{-1}(\varphi(z)) - \int_{\varepsilon}^{z} \varphi(t)\,dt &= \int_0^{\varepsilon} \varphi(t)\,dt = \int_0^{\varepsilon} \prod_{i=1}^{r} \sum_{j=\max(-k_i,0)}^{\infty} \frac{(\alpha_i t)^j}{j!} dt \\
&= \sum_{j_1=\max(-k_1,0)}^{\infty} \dots \sum_{j_2=\max(-k_r,0)}^{\infty} \frac{\alpha_1^{j_1} \dots \alpha_r^{j_r}}{j_1! \dots j_r!} \int_0^{\varepsilon} t^{j_1+\dots+j_r+k} dt \\
&= O(e^{\varepsilon\alpha}).
\end{aligned} \tag{44}$$

Теперь аналогично (30) для произвольных фиксированных $\bar{k}$, s, z, $\varepsilon \leqslant z \leqslant 1$, получаем соотношение

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon}^{z} \varphi(t)\,dt - \int_{\varepsilon}^{z} t^k e^{\alpha t} dt &= \int_{\varepsilon}^{z} t^k e^{\alpha t} \left(\prod_{i=1}^{r} \left(1 - \sum_{j=0}^{-k_i-1} \frac{(\alpha_i t)^j}{j!} e^{-\alpha_i t} \right) - 1 \right) dt \\
&= O\left(\int_{\varepsilon}^{z} t^k e^{\alpha t} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{-k_i-1} \frac{(\alpha_i t)^j}{j!} e^{-\alpha_i t} dt \right) = O(\alpha^{\max|k_i|} e^{\varepsilon z}).
\end{aligned}$$

Интеграл $\int_{\varepsilon}^{z} t^k e^{\alpha t} dt$ удовлетворяет равенству (31), что приводит к соотношению (42) при $m = -1$ и любом фиксированном k.

Используя соотношение (32), получаем, что

$$\begin{aligned}
\delta_z^{m-1} \varphi(z) &= \int_0^{z} \delta_t^m \varphi(t)\,dt \\
&= S_\alpha(k, z) + O\left(\int_0^{\varepsilon} \delta_t^m \varphi(t)\,dt \right) + O\left(\alpha^{m-s-1} \int_{\varepsilon}^{z} e^{\alpha t} dt \right).
\end{aligned}$$

Напомним, что, в отличие от (32), $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_r$ и $k = k_1 + \ldots + k_r$. Применим полученную при рассмотрении случая $m = -1$ оценку (44). Тогда для фиксированных $\varepsilon, m < 0, \varepsilon \leqslant z \leqslant 1$

$$\int_0^\varepsilon \delta_t^m \varphi(t)\,dt \leqslant \int_0^\varepsilon \ldots \int_0^\varepsilon \varphi(t_{-m})\,dt_{-m}\ldots dt \leqslant \varepsilon^{-m+1}\int_0^\varepsilon \varphi(t)\,dt = O(\alpha^{\max|k_i|}e^{\varepsilon z}),$$

и мы получаем оценку, аналогичную (35), хотя и использовали (44) вместо неравенства (34), как при выводе оценки (35).

Остается преобразовать сумму $S_\alpha(k,z)$, применяя формулу (31), как это было продемонстрировано при окончании доказательства теоремы 3. Указанные преобразования приводят к выражению (43) при $m-1$, чем и заканчивается индуктивное доказательство теоремы 4.

Следствие 2. *Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \to \infty$ таким образом, что существуют постоянные c_1, c_2, при которых*

$$0 < c_1 < \alpha_i\alpha^{-1} < c_2 < \infty, \qquad i = 1, \ldots, r. \tag{45}$$

Тогда для произвольных фиксированных наборов целых чисел $\bar{k}$, m, s, $s \geqslant 0$, смешанные факториальные моменты аппроксимируются выражением

$$\mu(m,\bar{k}) = \alpha_1^{k_1}\ldots\alpha_r^{k_r}\alpha^m\sum_{i=0}^{s}\binom{m}{i}\alpha^{-i}k^{\underline{i}} + O(\alpha^{m+k-s-1}). \tag{46}$$

Аппроксимация (46) непосредственно следует из (41) и (42).

Отметим, что в условиях (45) оценка остатка $O(\alpha^{m+k-s-1})$ по порядку малости меньше, чем наименьший из, так сказать, содержательных членов разложения (46).

Наличие аппроксимации факториальных моментов позволяет аналогично (38) построить аппроксимацию обычных моментов

$$\mu_{m,\bar{k}} = \mathbf{E}(\xi_1 + \ldots + \xi_r)^m\prod_{i=1}^{r}\xi_i^{k_i} = \mathbf{E}M(\bar{\xi}) + \mathbf{E}R(\bar{\xi}).$$

Из данного ранее определения функций $M(\bar{x})$ вытекает равенство

$$\mathbf{E}M(\bar{\xi}) = \sum_{0\leqslant j_0,\ldots,j_r\leqslant s}\mu(m-j_0,\bar{k}-\bar{j})\left\{{m \atop m-j_0}\right\}\prod_{i=1}^{r}\left\{{k_i \atop k_i-j_i}\right\}, \tag{47}$$

где $\bar{j} = (j_1, \ldots, j_r)$.

Оценка величины $\mathbf{E}R(\bar{\xi})$ для $\xi \sim \Pi(\alpha_i)$, $i = 1, \ldots, r$, при ограничениях (45) имеет вид

$$\mathbf{E}R(\bar{\xi}) = O(\alpha^{m+k-s-1}),$$

что непосредственно следует из оценки функции $R(x)$ и (46).

Следствие 3. *Пусть $\alpha \to \infty$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ удовлетворяют* (45) *при $i = 1, \ldots, r$. Тогда для произвольных фиксированных наборов целых чисел $\bar{k}$, m, s, $s \geqslant 0$, смешанные моменты аппроксимируются выражением*

$$\mu_{m,\bar{k}} = \mathbf{E}M(\bar{\xi}) + O(\alpha^{m+k-s-1}), \tag{48}$$

где $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_r$ и $\mathbf{E}M(\bar{\xi})$ имеет представление (47).

Нетрудно видеть, что выражение (38) является частным случаем (48) при $r = 1$. Ранее представление (39) для $\mu_{m,k}$ продемонстрировало техническую сложность вычисления вручную разложений для $\mu_{m,k}$. Представление (47) еще более громоздко. Однако, для его вычисления не требуется делать сколько-нибудь оригинальных вычислений. Вся проблема состоит в громоздкости проведения простых алгебраических преобразований — подстановки в (47) разложений (46) и явных представлений для чисел Стирлинга 2-го рода, вычисленных, например, по формулам (6), и их продолжений. После проведения замены переменных следует провести приведение подобных членов и выписать результат в порядке убывания малости степеней α. Тем не менее, как показал опыт получения (39), эта работа вручную возможна только при малых $s = 2$, $r = 1$ значениях параметров.

Мы поручили эту рутинную работу ЭВМ, используя пакет прикладных программ MAPLE V6. Однако, даже с применением ЭВМ не удается явно выписать представление для произвольных s и r.

Мы приведем результат описанной рутинной работы на ЭВМ с помощью пакета MAPLE V6 для $s = 3$, $r = 3$, полагая $\alpha_i = x_i\alpha$, $0 < x_i < 1$, $i = 1, 2, 3$, $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. В этих условиях мы получаем разложение для μ_{m,k_1,k_2,k_3} как разложение по степеням α. Приведем полученное разложение по первым трем степеням α:

$$
\begin{aligned}
\mu_{m,k_1,k_2,k_3} = {} & \alpha^{m+k_1+k_2+k_3} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} + (1/2)\alpha^{m+k_1+k_2+k_3} x_1^{(k_1-1)} x_2^{(k_2-1)} x_3^{(k_3-1)} (-m x_1 x_2 x_3 \\
& + k_3^2 x_1 x_2 + m^2 x_1 x_2 x_3 - k_1 x_2 x_3 + 2mk_1 x_1 x_2 x_3 + 2mk_2 x_1 x_2 x_3 + 2mk_3 x_1 x_2 x_3 \\
& + k_2^2 x_1 x_3 - k_2 x_1 x_3 + k_1^2 x_2 x_3 - k_3 x_1 x_2)/\alpha + (1/24)\alpha^{m+k_1+k_2+k_3} x_1^{(k_1-2)} \\
& \times x_2^{(k_2-2)} x_3^{(k_3-2)} (-14k_1^3 x_3^2 x_2^2 - 10m x_3^2 x_1^2 x_2^2 + 3m^4 x_3^2 x_1^2 x_2^2 + 24m^2 k_1 k_2 x_3^2 x_1^2 x_2^2 \\
& + 24m^2 k_1 k_3 x_3^2 x_1^2 x_2^2 + 21k_1^2 x_3^2 x_2^2 + 24m^2 k_2 k_3 x_3^2 x_1^2 x_2^2 - 24mk_1 k_2 x_3^2 x_1^2 x_2^2 \\
& - 24mk_1 k_3 x_3^2 x_1^2 x_2^2 - 14m^3 x_3^2 x_1^2 x_2^2 + 21m^2 x_3^2 x_1^2 x_2^2 + 12m^3 k_1 x_3^2 x_1^2 x_2^2 \\
& + 12m^3 k_2 x_3^2 x_1^2 x_2^2 + 12m^3 k_3 x_3^2 x_1^2 x_2^2 + 12m^2 k_1^2 x_3^2 x_1^2 x_2^2 + 12m^2 k_2^2 x_3^2 x_1^2 x_2^2 \\
& + 12m^2 k_3^2 x_3^2 x_1^2 x_2^2 - 36m^2 k_1 x_3^2 x_1^2 x_2^2 - 36m^2 k_3 x_3^2 x_1^2 x_2^2 - 36m^2 k_2 x_3^2 x_1^2 x_2^2 \\
& - 12mk_1^2 x_3^2 x_1^2 x_2^2 - 12mk_2^2 x_3^2 x_1^2 x_2^2 - 12mk_3^2 x_3^2 x_1^2 x_2^2 + 24mk_3 x_3^2 x_1^2 x_2^2 \\
& + 24mk_1 x_3^2 x_1^2 x_2^2 - 24mk_2 k_3 x_3^2 x_1^2 x_2^2 + 24mk_2 x_3^2 x_1^2 x_2^2 + 12mk_1 k_3^2 x_3 x_1^2 x_2^2 \\
& - 6m^2 k_3 x_3 x_1^2 x_2^2 + 12mk_1^2 k_3 x_3^2 x_1 x_2^2 + 18mk_3 x_3 x_1^2 x_2^2 + 12mk_2 k_3^2 x_3 x_1^2 x_2^2 \\
& - 6m^2 k_2 x_3^2 x_1^2 x_2 - 12mk_1 k_2 x_3^2 x_1^2 x_2 - 30mk_2^2 x_3^2 x_1^2 x_2 - 12mk_1 k_3 x_3^2 x_1 x_2^2 \\
& + 18mk_2 x_3^2 x_1^2 x_2 + 3k_1^4 x_3^2 x_2^2 + 12mk_1 k_2^2 x_3^2 x_1^2 x_2 - 10k_1 x_3^2 x_2^2 - 12mk_2 k_3 x_3^2 x_1^2 x_2 \\
& + 12mk_3^3 x_3 x_1^2 x_2^2 + 12mk_1^3 x_3^2 x_1 x_2^2 + 12mk_2^2 k_3 x_3^2 x_1^2 x_2 - 12mk_2 k_3 x_3 x_1^2 x_2^2 \\
& + 6k_1 k_3 x_3 x_1 x_2^2 + 6m^2 k_2^2 x_3^2 x_1^2 x_2 + 3k_3^4 x_1^2 x_2^2 - 10k_3 x_1^2 x_2^2 - 12mk_1 k_3 x_3 x_1^2 x_2^2 \\
& - 12mk_1 k_2 x_3^2 x_1 x_2^2 - 6k_1 k_3^2 x_3 x_1 x_2^2 - 14k_3^3 x_1^2 x_2^2 + 21k_3^2 x_1^2 x_2^2 - 10k_2 x_3^2 x_1^2 \\
& + 12mk_1^2 k_2 x_3^2 x_1 x_2^2 + 6m^2 k_3^2 x_3 x_1^2 x_2^2 - 30mk_3^2 x_3 x_1^2 x_2^2 + 12mk_2^3 x_3^2 x_1^2 x_2 \\
& + 21k_2^2 x_3^2 x_1^2 - 14k_2^3 x_3^2 x_1^2 + 6m^2 k_1^2 x_3^2 x_1 x_2^2 + 3k_2^4 x_3^2 x_1^2 - 6m^2 k_1 x_3^2 x_1 x_2^2 \\
& - 30mk_1^2 x_3^2 x_1 x_2^2 + 18mk_1 x_3^2 x_1 x_2^2 + 6k_1^2 k_2^2 x_3^2 x_1 x_2 - 6k_2^2 k_3 x_3 x_1^2 x_2 \\
& - 6k_2 k_3^2 x_3 x_1^2 x_2 + 6k_2 k_3 x_3 x_1^2 x_2 - 6k_1 k_2^2 x_3^2 x_1 x_2 + 6k_1^2 k_3^2 x_3 x_1 x_2^2 + 6k_2^2 k_3^2 x_3 x_1^2 x_2 \\
& - 6k_1^2 k_3 x_3 x_1 x_2^2 + 6k_1 k_2 x_3^2 x_1 x_2 - 6k_1^2 k_2 x_3^2 x_1 x_2)/\alpha^2 + O(\alpha^{m+k_1+k_2+k_3-3}).
\end{aligned}
$$

Для контроля правильности полученного выражения можно проверить его на совпадение с (39), полагая $k_3 = k_2 = 0$.

В заключение отметим, что равенство (47) по существу не зависит от распределения случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_r$ и, следовательно, может быть использовано для вычисления смешанных моментов $\mu_{m,\bar{k}}$ для произвольно распределенных случайных величин, принимающих с положительной вероятностью целые неотрицательные значения. При этом для распределений случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_r$, отличных от закона Пуассона, потребуется получение аналогов теорем 3, 4 и оценок для величины $\mathbf{E}R(\bar{\xi})$. Представляется, что подобный результат может быть получен для случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_r$, распределенных по биномиальному закону, отрицательному биномиальному закону, включая геометрический закон распределения, гипергеометрическому распределению, а также по ряду других законов, для которых удается в явном виде получить разложения основного интеграла в (23) вида

$$\int_0^z t^m \prod_{i=1}^{r} \varphi_i(t)\,dt, \tag{49}$$

где $\varphi_i(t)$ получено как следствие применения оператора $\delta_t^{k_i}$ к производящей функции соответствующего закона распределения. В свою очередь, главной трудностью при вычислении оператора $\delta_t^k \Phi(t)$ является k-кратное вычисление интеграла

$$\int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{k-1}} \Phi(t_{-k})\,dt_{-k} \dots dt_1, \tag{50}$$

где $\Phi(t)$ — соответствующая производящая функция, $k < 0$.

Для тех законов распределения, у которых производящая функция допускает явное вычисление (50) и получение разложения для (49), например, аналогичного (42), изложенный метод вычисления смешанных факториальных моментов приемлем с точки зрения получения конкретных разложений.

Список литературы

1. Read T. R. G., Gressie N. A. S., *Goodness-of-fit statistics for discrete multivariate data.* Springer, New York, 1988.
2. Knuth D. E., Two notes on notation. *Amer. Math. Monthly* (1992) **99**, 403–422.
3. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О., *Конкретная математика.* Москва, Мир, 1998.
4. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И., *Интегралы и ряды.* Москва, Наука, 1981.

Статья поступила 20.07.2004.