

О ГОМОМОРФИЗМЕ НЕКОТОРЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ,
ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ИЗУЧЕНИИ РЕШЕТОК ПРОЦЕССОВ В ГРАФАХ

В [I] при изучении решеток процессов в графах возник вопрос о гомоморфности некоторого отображения. Ниже приводятся необходимые и достаточные условия (НДУ) гомоморфности этого и сопутствующего ему отображения. Результаты формулируются в терминах, независимых от графов.

Ниже мы будем пользоваться следующими обозначениями:

L - дистрибутивная решетка,

e, e' - произвольные элементы L ;

\mathfrak{A}_L - решетка фильтров решетки L ,

I_L - решетка идеалов решетки L .

f_e, F_e - отображения L на $(e]_L$ задаваемые соответствиями $e' \rightarrow e' \wedge e, e' \rightarrow e' \vee e$ соответственно (f_e, F_e - решеточные гомоморфизмы [I]),

θ_e, Θ_e - ядерные конгруэнции гомоморфизмов f_e, F_e (конгруэнции Θ_e очевидным образом совпадают с конгруэнциями по идеалу с единицей, рассмотренными в [I])

$\mathcal{K}_{e'}, K_{e'}$ - классы θ_e, Θ_e , содержащие элемент e' соответственно,

$\mathcal{E}_{e'}, \mathcal{K}_{e'}$ - сужение на $\mathcal{K}_{e'}$ канонического гомоморфизма L на L/θ_e и образ $\mathcal{K}_{e'}$ относительно $\mathcal{E}_{e'}$ соответственно.

\mathcal{F} - отображение L/θ_e в \mathfrak{A}_L^d , задаваемое соответствием

$K \rightarrow K \wedge e$, где \mathfrak{A}_L^d - решетка, двойственная к \mathfrak{A}_L , т.е., получена из \mathfrak{A}_L заменой \wedge на \vee и наоборот (для любого

$K \in L/\theta_e$, $K \wedge e$ - фильтр в L [I]),

\mathcal{F} - сужение на $(e] = \bigcup f_e$ отображения L в I_L/θ_e , задаваемое соответствием $e' \rightarrow \mathcal{K}_{e'}$ (см. ниже теорему 2).

K_1, K_2 - произвольные, но фиксированные классы Θ_e .

$K_0 = K_1 \circ K_2, o \in \{\wedge, \vee\}$,

$\Pi_0 = K_0 \wedge e, o \in \{1, 2, \wedge, \vee\}$ (фильтры в L).

Рассмотрим условия

$$\forall K_1, K_2 \in L/\theta_e: K_1 \wedge K_2 = \{k_1 \wedge k_2: k_1 \in K_1, k_2 \in K_2\} \quad (\wedge)$$

$$\forall \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \in L/\theta_e: \mathcal{K}_1 \vee \mathcal{K}_2 = \{k_1 \vee k_2: k_1 \in \mathcal{K}_1, k_2 \in \mathcal{K}_2\} \quad (\vee)$$

ТЕОРЕМА I. Если L дистрибутивна, то условие (\wedge) есть НДУ того, что \mathcal{F} - гомоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим предварительно, что

$$\Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{D}_L \implies \Pi_1 \vee \Pi_2 = [\Pi_1 \cup \Pi_2] \quad (a)$$

$$\Pi_\lambda \supseteq \Pi_1 \cup \Pi_2 \quad (b)$$

В самом деле, ввиду $K_\lambda \subseteq K_1, K_2$ и антиизотонности $\mathcal{F}[1]$,
 $\Pi_\lambda \supseteq \Pi_1$, $\Pi_\lambda \supseteq \Pi_2$.

$$\sigma \in [S] \iff \exists \text{ конечное } M_\sigma, M_\sigma \in S : \wedge M_\sigma \leq \sigma; \quad (c)$$

(c) - двойственно к утверждению I.3.I, (ii) [2]; здесь $[S]$ - фильтр, порожденный S .

$$\forall K \in \Theta_e, \mathcal{K} \in \Theta_e : f_e|_K([1], F_e|_K) - \text{вложения.} \quad (d)$$

Действительно, $\forall K \in \Theta_e, \mathcal{K} \in \Theta_e : |K \cap \mathcal{K}| \leq 1$, ибо противное означало бы наличие диаманта в L , что противоречит дистрибутивности L .

$$\{K_1 \wedge K_2 : K_1 \in K_1, K_2 \in K_2\} \in \mathcal{D}_{K_\lambda} \quad (e)$$

Действительно, L - дистрибутивна и фильтр - подрешетка, замкнутая относительно внешнего " \vee ".

Разобьем доказательство на три части - доказательства шп.

I-3: 1) $\Pi_\vee = \Pi_1 \cap \Pi_2 [1]$, 2) $\Pi_\lambda \supseteq [\Pi_1 \cup \Pi_2]$, 3) $(\wedge) \iff \Pi_\lambda \in [\Pi_1 \cup \Pi_2]$.

2. Установим $\Pi_\lambda \supseteq [\Pi_1 \cup \Pi_2]$. Итак, пусть $\sigma \in [\Pi_1 \cup \Pi_2]$, $M_\sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ и $\sigma' = \wedge M_\sigma \leq \sigma$. Заметим, что из $M \subseteq \Pi_1 \cup \Pi_2$ следует $\sigma' \in \Pi_\lambda$. Действительно, ввиду (b) достаточно убедиться в этом для случая, когда M не принадлежит целиком ни одному из множеств Π_1, Π_2 . Для последнего случая, однако, имеем $\sigma' = (K_1 \wedge K_2) \wedge e \in (K_1 \cap K_2) \wedge e = \Pi_\lambda$ для некоторых $K_1 \in K_1, K_2 \in K_2$. Но Π_λ - фильтр и потому $\sigma \in \Pi_\lambda$.

3. \implies . Рассмотрим произвольный $\sigma = k \wedge e \in \Pi_\lambda$ для некоторого $k \in K_\lambda$. Ввиду (a), существуют K_1, K_2 такие, что $\sigma = (K_1 \wedge K_2) \wedge e = \sigma_1 \cap \sigma_2, \sigma_i = K_i \wedge e \in \Pi_i, 1 \leq i \leq 2$, т.е. $\sigma \in [\Pi_1 \cup \Pi_2]$. Рассмотрим любой $k \in K_\lambda$ и $\sigma = k \wedge e \in \Pi_\lambda$. Пусть $\sigma \in [\Pi_1 \cup \Pi_2]$.

Возможны варианты: 1) соответствующее M_σ содержится в одном из Π_1, Π_2 , 2) противоположный случай.

Рассмотрим возможности.

I. Существует $i, 1 \leq i \leq 2$ такое, что $\sigma' (= \wedge M_\sigma) \in \Pi_i$. Однако $\Pi_j, 1 \leq j \leq 2$ - фильтры и потому $\sigma \in \Pi_j$, т.е.,

$\sigma = K_i \wedge e$ для некоторого $K_i \in K_i$. Но для любого $e', e \leq e', e'$ - единица $K_e' [1]$ и $\sigma = K_i \wedge e = K_i \wedge e = K_i \wedge (E_{K_j} \wedge e) = K_i \wedge e$,

где E_K - единица класса K и $k' = k_i \wedge E_{K_j} \in K_\wedge, j \neq i, 1 \leq j \leq 2$. Заметим, наконец, что для любого K отображение $f_e|_K$ - вложение (d). В итоге, $k = k'$.

2. Итак, существуют $i, j, 1 \leq i, j \leq 2$, такие, что $b_i \in \Pi_1, b_j \in \Pi_2$. Тогда b' имеет вид $(k_1 \cap k_2) \wedge e$ для некоторых $k_1 \in K_1, k_2 \in K_2$. В силу того, что $f_e|_{K_\wedge}$ - сложение, $k_1 \wedge k_2 \leq k$. Наконец, ввиду (e) $k = k'_1 \wedge k'_2$ для некоторых $k'_1 \in K_1, k'_2 \in K_2$.

ТЕОРЕМА 2. Если L дистрибутивна, то условие (v) есть НДУ того, что \mathcal{F} - гомоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, предварительно, что

$$\forall e', e' \leq e : \mathcal{K}_{e'} \in \mathcal{I}_{L/\theta_e} \quad (a)$$

В самом деле, $\mathcal{K}_{e'}$ - класс конгруэнции θ_e и потому является выпуклой подрешеткой L (I.3.7, [2]). Ввиду (b), $\mathcal{K}_{e'}$ - выпуклая подрешетка L/θ_e . Заметим, что e' - нуль решетки $\mathcal{K}_{e'} (e' \leq e)$, $(e'] = K_{2e}$ - нуль решетки L/θ_e и $K_e \in \mathcal{K}_{e'}$. Поэтому для любых $K_1 \in \mathcal{K}_{e'}, K_2 \in L/\theta_e$, имеем $K_e \leq K_\wedge = K_1 \wedge K_2 \leq K_1$. Тем самым, $\mathcal{K}_{e'}$ - идеал в L/θ_e .

$$\forall \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \in L/\theta_e : \mathcal{K}_1 \wedge \mathcal{K}_2 = \{K_1 \wedge K_2 : K_1 \in \mathcal{K}_1, K_2 \in \mathcal{K}_2\} \quad (b)$$

Для любого $k \in \mathcal{K}_1 \wedge \mathcal{K}_2$ в силу дистрибутивности L , имеем $k = k_1 \wedge k_2$, где $k_1 = k \vee e_1 \in \mathcal{K}_1, e_1$ - нуль $\mathcal{K}_1, k_2 = k \vee e_2 \in \mathcal{K}_2, e_2$ - нуль \mathcal{K}_2 .

$$\forall i_1 \in \mathcal{I}_1 \in \mathcal{I}_L, i_2 \in \mathcal{I}_2 \in \mathcal{I}_L : \{i_1 \circ i_2 : i_1 \in \mathcal{I}_1, i_2 \in \mathcal{I}_2\} \in \mathcal{I}_1 \circ \mathcal{I}_2 \in \{\wedge, \vee\} \quad (c)$$

Если $\circ = \wedge$, то $i_1 \wedge i_2 \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_1 \wedge \mathcal{I}_2$. Если же $\circ = \vee$, то (c) следует из I.3.I, (ii) [2] (двойственное к нему - (c) из доказательства теоремы I).

Вернемся к основному утверждению. Разобьем доказательство на четыре части - доказательства шп. I-4.

I. $\mathcal{K}_e \vee \mathcal{K}_{e_2} \in \mathcal{K}_{e_1 \vee e_2}$. Рассмотрим произвольный $K \in \mathcal{K}_e \vee \mathcal{K}_{e_2}$. Поскольку L дистрибутивна, то дистрибутивна и L/θ_e . Кроме того, дистрибутивность L равносильна представлению $\forall \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \in \mathcal{I}_L : \mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2 = \{i_1 \vee i_2 : i_1 \in \mathcal{I}_1, i_2 \in \mathcal{I}_2\}$ (2.I.4, [2]). Поэтому найдутся $K_1 \in \mathcal{K}_1, K_2 \in \mathcal{K}_2$ такие, что $K = K_1 \vee K_2$. Рассмотрим $k_1 = K_1 \varepsilon_{e_1}^{-1} \in \mathcal{K}_{e_1}, k_2 = K_2 \varepsilon_{e_2}^{-1} \in \mathcal{K}_{e_2}$ и $k = k_1 \vee k_2 \in K$. Но $k_1 f_e = e, k_2 f_e = e_2$ и, в силу дистрибутивности $L, (k_1 \vee k_2) f_e = e_1 \vee e_2$, т.е., $k = k_1 \vee k_2 \in \mathcal{K}_{e_1 \vee e_2}$ и $K \in \mathcal{K}_{e_1 \vee e_2}$.

2. Если выполнено (v), то $\mathcal{K}_{e_1} \vee \mathcal{K}_{e_2} \cong \mathcal{K}_{e_1 \vee e_2}$. Пусть

$K \in \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_1 \vee e_2}$, $k = K \varepsilon_{e_1 \vee e_2}^{-1} \in \mathcal{K}_{e_1 \vee e_2} = \mathcal{K}_{e_1} \vee \mathcal{K}_{e_2}$ ($e \in \mathcal{L} = \mathcal{L}_f \cong \mathcal{L}/\theta_e$). В силу (v), найдутся $k_1 \in \mathcal{K}_{e_1}$, $k_2 \in \mathcal{K}_{e_2}$, такие, что $k = k_1 \vee k_2$. Учитывая, что для любого e' , $e' \leq e$, $\varepsilon_{e'}$ - сужение ε_e , имеем $k = k_1 \vee k_2 \in \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_1} \vee \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_2}$ (c) где $K_1 = k_1 \varepsilon_{e_1} \in \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_1}$, $K_2 = k_2 \varepsilon_{e_2} \in \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_2}$.

3. Если $\overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_1} \vee \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_2} \cong \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_1 \vee e_2}$, то (v) выполнено. Пусть $\overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_1} \vee \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_2} \cong \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_1 \vee e_2}$ выполнено и k - произвольный элемент $\overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_1 \vee e_2}$. Подобно п.2, $k \in \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_1 \vee e_2}$. Рассмотрим $K = k \varepsilon_{e_1 \vee e_2} \in \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_1 \vee e_2}$. По предположению, $K \in \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_1} \vee \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_2}$ и, подобно п.1, существуют $K_1 \in \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_1}$, $K_2 \in \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_2}$, такие, что $K = K_1 \vee K_2$. Рассмотрим $k_1 \vee k_2$, где $k_1 = K_1 \varepsilon_{e_1}^{-1} \in \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_1}$, $k_2 = K_2 \varepsilon_{e_2}^{-1} \in \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_2}$. Имеем, подобно п.2, $k_1 \vee k_2 \in \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_1} \vee \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_2} = \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_1 \vee e_2}$ и потому, в силу (d) из доказательства теоремы I, $k = k_1 \vee k_2$.

4. $\overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_1} \wedge \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_2} = \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_1 \wedge e_2}$. Пусть $K \in \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_1} \wedge \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_2} = \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_1} \cap \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_2}$, т.е., $K \in \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_1}$, $K \in \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_2}$. Рассмотрим $k_1 = K \varepsilon_{e_1}^{-1} \in \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_1}$, $k_2 = K \varepsilon_{e_2}^{-1} \in \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_2}$. Далее, $k_1 f_e = e_1$, $k_2 f_e = e_2$ и, в силу дистрибутивности \mathcal{L} , $(k_1 \wedge k_2) f_e = e_1 \wedge e_2$, $k_1 \wedge k_2 \in \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_1 \wedge e_2}$, $K \wedge K = K \in \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_1 \wedge e_2}$. Пусть $K \in \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_1 \wedge e_2}$. Возьмем $k = K \varepsilon_{e_1 \wedge e_2}^{-1} \in \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_1 \wedge e_2} = \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_1} \wedge \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_2}$. По (b) существуют $k_1 \in \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_1}$, $k_2 \in \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_2}$, такие, что $k = k_1 \wedge k_2$. Рассмотрим $K_1 = k_1 \varepsilon_{e_1} \in \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_1}$, $K_2 = k_2 \varepsilon_{e_2} \in \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_2}$. Имеем $K = K_1 \wedge K_2$. Ввиду того, что $\overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_1}, \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_2} \in \mathcal{I}_{\mathcal{L}/\theta_e}$, $K \in \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_1} \wedge \overset{\circ}{\mathcal{K}}_{e_2}$ (c).

Литература

1. Шахбазян К.В., Тушкина Т.А., Лебединская Н.Б., Лебединский М.М. Решетки процессов в графах, Препринт ЛОМИ, Р-4-90, Ленинград, 1990.
2. Гретцер Р. Общая теория решеток, Мир, М., 1982.

Lebedinsky M.M. Homomorphism of some maps arised when studying lattices of processes in graphs.

Necessary and sufficient conditions for homomorphism of some maps arised when studying lattices of processes in graphs are presented. The results are formulated in graph independent form.