

В. Г. Журавлев, А. А. Юдин

## СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДЕНИЯ НА ПЛОСКИХ КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИХ ГРУППАХ

### Введение

1. Первоначально математическая постановка задачи о случайном блуждании – физической задачи о диффузии – броуновском движении – относилась к блужданиям по простой кубической решетке  $\mathbb{Z}^d$  размерности  $d$ . Только для малых размерностей  $d \leq 2$  блуждания оказались возвратными: с вероятностью 1 точка возвращается в начало и при этом бесконечно много раз (проблема По́йа).

2. Для общей группы  $G$  (необязательно коммутативной) задача формулируется следующим образом. Пусть  $\mu$  – вероятностная мера на счетной группе  $G$  и  $Y_1, Y_2, \dots$  – независимые одинаково  $\mu$ -распределенные случайные величины со значениями из  $G$ . Последовательность  $X_0 = g_0, X_1 = Y_1 g_0, \dots, X_n = Y_n \cdots Y_1 g_0, \dots$  называется случайным блужданием на группе  $G$  с началом в точке  $g_0 \in G$ . Блуждание возвратное, если с вероятностью 1 какое-то из  $X_1, \dots, X_n \dots$  окажется равным  $X_0$ . Избегая тривиальных случаев, предполагаем, что исходная группа  $G$  совпадает с порождаемой  $\text{supp } \mu$  подгруппой  $G_\mu$ , т.е. любой элемент из  $G_\mu$  есть произведение конечного числа элементов из носителя меры  $\mu$ .

Когда группа  $G$  возвратная или, другими словами, когда  $G$  допускает возвратное блуждание?

3. Ближе всего к  $\mathbb{Z}^d$  находятся кристаллографические группы  $G = G^d$  (см. [2–4] для  $d = 2, 3$  и  $d \geq 4$ ; также см. книгу для физиков [5]). Они содержат нормальные подгруппы трансляций  $G_{tr}$ , абстрактно (без использования метрики) изоморфные  $\mathbb{Z}^d$  с конечными фактор-группами  $F = G/G_{tr}$ . Это свойство позволяет факторизовать блуждания по кристаллографической группе на

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант No. 99-01-00070).

блуждания 1) по трансляционной группе  $G_{tp} \approx \mathbb{Z}^d$  и 2) по конечной точечной группе  $F$ . В предлагаемой работе приводится метод, последовательно использующий характеристические функции и матрицы вероятностей перехода из теории конечных цепей Маркова. Возникает резольвента

$$R(z, a) = (E - zT(a))^{-1}, \quad |z| \leq 1, \quad a \in [0, 1), \quad (1)$$

где

$$T(a) = \sum_{i=1}^s p_i T_{g_i}(a)$$

– порождающий оператор,  $g_1, \dots, g_s$  – образующие группы  $G$ ,  $\mu = \{p_i\}_{i=1}^s$  – распределение вероятностей,  $T_{g_i}(a)$  – функциональные аналоги матриц перехода. Если обозначить  $F_i$  вероятность возвращения в точку  $g_i$ , то выполняется формула

$$\text{diag}(F_1, \dots, F_s) = E - \left[ \text{diag} \int_0^1 \dots \int_0^1 R(1, a) da \right]^{-1}. \quad (2)$$

Свойство группы  $G$  быть возвратной зависит от локального поведения резольвенты (1) в окрестности  $a = 0$  при  $z = 1$ .

**4.** Применение формулы (2) к двумерным кристаллографическим группам  $G = G_{kp}^2$  [2], [3] (из них только  $p1 \approx \mathbb{Z}^2$  коммутативная, см. таблицу 1) показывает, что все они возвратные. В последнем столбце таблицы 1 указано зависит или нет возвратность случайного блуждания по группе  $G$  от выбора вероятностной меры  $\mu = \{p_i\}_{i=1}^s$  при условии  $G = G_\mu$ .

**5.** Моделью в статье выбрана некоммутативная группа  $G = pgg$ , порождаемая двумя перпендикулярными скользящими отражениями  $O, P$  с кодом

$$(P * O)^2 = (P^{-1} * O)^2 = E.$$

Ее фактор-группа  $F = pgg/G_{tp}$  имеет порядок 4 (см. таблицу 1). Геометрически случайное блуждание на группах  $G = G_{kp}^d$  удобно представлять как блуждание на ориентированных графах. Для группы  $pgg$  вершины графа суть вершины решетки  $\mathbb{Z}^2$ . Из каждой вершины выходят горизонтальное  $O$ -ребро и вертикальное

$P$ -ребро. В начале координат, отвечающему единичному элементу  $E$ , ребра представляют обычный репер. Движение на один шаг вдоль любого ребра меняет направление другого на противоположное. Пусть частица совершает случайные блуждания по графу группы  $rgg$  с вероятностями перехода  $p_1$  по  $O$ -ребру и  $p_2$  по  $P$ -ребру.

Таблица 1

№.	Обозначение группы	Сингония	Коммутативность	Порядок группы $F$	Количество образующих	Зависимость от $\mu$
1	$p1$	общая	комм.	1	4	зависит
2	$p2$	—” —	некомм.	2	3	не зав.
3	$pt$	прям.	—” —	2	4	зависит
4	$pg$	—” —	—” —	2	4	—” —
5	$st$	—” —	—” —	2	3	—” —
6	$ptt$	—” —	—” —	4	4	не зав.
7	$ptg$	—” —	—” —	4	3	—” —
8	$pgg$	—” —	—” —	4	2	—” —
9	$stt$	—” —	—” —	4	3	—” —
10	$p4$	квадр.	—” —	4	2	—” —
11	$p4$	—” —	—” —	8	3	—” —
12	$p4g$	—” —	—” —	8	2	—” —
13	$p3$	гекс.	—” —	3	3	—” —
14	$p3t1$	—” —	—” —	6	3	—” —
15	$p31t$	—” —	—” —	6	2	—” —
16	$p6$	—” —	—” —	6	2	—” —
17	$p6t$	—” —	—” —	12	3	—” —

В п. 2.5 доказана следующая теорема:

**Теорема.** *Случайное блуждание по графу группы  $rgg$  возвратно тогда и только тогда, когда его вероятности перехода удовлетворяют условию  $p_1 > 0$  и  $p_2 > 0$  или, что равносильно, условию  $rgg = rgg_\mu$  для меры  $\mu = \{p_1, p_2\}$ .*

На матрицах утверждение о возвратности случайного блуждания принимает следующую формулировку. Пусть  $Y_1, \dots, Y_n, \dots$

независимо принимают значения

$$O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

с вероятностями  $p_1$  и  $p_2$ ,  $p_1 + p_2 = 1$ . Если  $p_1 > 0$  и  $p_2 > 0$ , то в последовательности матриц  $X_1 = Y_1, \dots, X_n = Y_n \cdots Y_1, \dots$  с вероятностью 1 встречается единичная матрица  $E$ , причем это происходит бесконечно часто.

**6.** Используемый для группы  $G = pgg$  метод матричных характеристических функций непосредственно распространяется на кристаллографические группы  $G = G_{kp}^d$  любой размерности  $d$  [4]. Он позволяет выразить формулой (3) вероятности возвращения через резольвенту  $R(z, a)$  (2). Однако применение формулы (3), скажем, к 230 трехмерным пространственным группам  $G_{kp}^3$  возможно только для нескольких исключительных простых групп, близких к группе  $G \approx \mathbb{Z}^3$ . Дальнейшее продвижение видится на пути диагонализации резольвенты  $R(z, a)$  с использованием неприводимых представлений федоровских групп [6], но это задача уже другой статьи.

Авторы благодарят профессора В. Г. Рау, привлечшего их внимание к кристаллографическим группам.

### §1. Кристаллографическая группа $pgg$

**1.1.** Рассуждение проведем для группы  $G = pgg$ . В обозначении  $g$  – от английского слова “glide” – скольжение. Она порождается тремя матрицами (см. [3, с. 119, 120])

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 1/2 \\ 0 & -1 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 \end{pmatrix},$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \vdots & 1/2 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

и подгруппой трансляций  $G_{tp}$ , состоящей из матриц

$$t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & t_1 \\ 0 & 1 & \vdots & t_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 \end{pmatrix}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Группа  $G$  действует на точки  $(x_1, x_2)$  плоскости  $\mathbb{R}^2$  по формуле

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{M} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{для } M \in G.$$

$G_{tp}$  можно отождествить с образами  $(0, 0)$  – квадратной решеткой  $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}[(1, 0), (0, 1)]$ . Матрицы (1.1) задают:  $u_1$  – центральную симметрию относительно  $(0, 0)$ ,  $u_2$  – скользящее отображение вдоль оси  $ox_1$  на вектор  $(1/2, 0)$ ,  $u_3$  – осевую симметрию относительно прямой  $x_1 = 1/2$ . Группа  $G = pgg$  под No. 8 из Таблицы 1 относится к прямоугольной сингонии (фундаментальная область  $\mathcal{F}_{tp}$  для  $G_{tp}$  – прямоугольник). Избегая дробей в (1.1), удобно считать  $\mathcal{F}_{tp}$  квадратом со стороной длины 2, сдвинуть начало координат в  $(1, 0)$  и заменить  $u_3$  на

$$u'_2 = u_2 u_1 \begin{pmatrix} 1 & \vdots & 0 \\ & 1 & \vdots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь  $O = u_2$  и  $P = u'_2$  становятся скользящими отображениями на 1 вдоль осей координат.

На рис. 1а заштрихована фундаментальная область  $\mathcal{F}$  всей группы  $G$ , а  $\mathcal{F}_{tp}$  состоит из 4-х экземпляров  $\mathcal{F}$ . Если знать разбиение плоскости  $\mathbb{R}^2$ , представленное на рис. 1а, то сразу можно получить матрицы (3) для  $O$  и  $P$ .

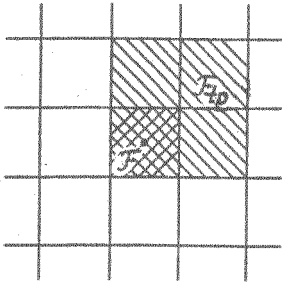


Рис. 1а

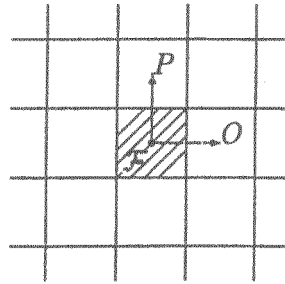


Рис. 1б.

1.2. Связь между случайными блужданиями на группе  $G$  и плоскости  $\mathbb{R}^2$  становится очевидной при рассмотрении графа группы. Если оси симметрий для  $O$  и  $P$  оставить неподвижными, то граф получится запутанным, т.к. вершины графа, соединенные ребрами, будут удалены друг от друга. Поэтому переходим к пассивным преобразованиям, когда вместо точек двигается система координат, и на месте  $(0, 0)$  – жирная точка на рис. 1 – поместим единицу  $E$  из  $G$ .

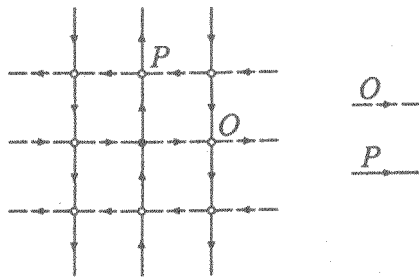


Рис. 2.

На графе (см. рис. 2) кружочки изображают элементы группы  $G$  ( $\bullet$  – единица  $E$ , ближайшие  $\circ$  – элементы  $O, P$ ), а направленные ребра – умножение слева на соответствующий элемент  $O$  или  $P$ . Из рис. 2 видно, что  $G$  порождается двумя скользящими отображениями  $O$  и  $P$ . Кратчайшие к  $E$  циклы задают код

группы  $G = pgg$

$$(PO)^2 = (P^{-1}O)^2 = E. \quad (1.2)$$

Таким образом, задача о случайном блуждании на группе  $G$  или в матричном виде – задача из п. 5. введения – сведена к ориентированному блужданию на двумерной решетке  $\mathbb{Z}^2$ . Код (1.2) задает эволюцию случайных траекторий с помощью двух простейших преобразований



**1.3.** Таблица 1 содержит основные характеристики всех семнадцати плоских кристаллографических групп. Сингония – это форма фундаментальной области  $\mathcal{F}_{tp} = \mathbb{R}^2/G_{tp}$  подгруппы трансляций  $G_{tp}$  из  $G$ . Порядок точечной группы  $F \approx G/G_{tp}$  указывает на сколько фундаментальных областей  $\mathcal{F} = \mathbb{R}^2/G$  разбивается область  $\mathcal{F}_{tp}$ . Он же совпадает с количеством трансляционно различных вершин графа  $G$ . Для группы  $G = pgg$  порядок  $|F|$  равен 4 (см. рис. 1а и рис. 2).

Таблица 1 показывает, что условие  $|F| \geq 2$  равносильно некоммутативности группы  $G$ .

В шестом столбце указано количество образующих группы  $G$ . Так, для изоморфной  $\mathbb{Z}^2$  группы  $G = p1$  образующих 4:  $g_1 = (1, 0)$ ,  $g_2 = g_1^{-1} = (-1, 0)$ ,  $g_3 = (0, 1)$ ,  $g_4 = g_3^{-1} = (0, -1)$ ; код  $g_1g_2 = g_3g_4 = E$ ,  $g_1g_3 = g_3g_1$ ; любой элемент  $g \in G$  представим в виде произведения элементов  $g_1, \dots, g_4$ . Для группы  $G = pgg$  образующие – две скользящие симметрии  $O$  и  $P$  (см. рис. 2). Следовательно, по определению, для образующих  $g_1, \dots, g_s \in G$  допускаются только неотрицательные степени  $g_i^m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Наконец, поясним зависимость от распределения вероятностей  $\mu = \{p_i\}_{i=1}^s$ ,  $p_1 + \dots + p_s = 1$ ,  $p_i > 0$ . Как сказано в п. 5. введения, свойство возвратности случайного блуждания на группе  $G = pgg$  не зависит от выбора распределения  $\mu$ . Напротив, чтобы для группы  $G = p1$  блуждание было возвратным необходима и достаточна симметричность  $\mu : p_1 = p_2$  и  $p_3 = p_4$ . Граф  $G = p1$  получается из графа группы  $G = pgg$  (рис. 2) заменой всех ребер на двунаправленные. Поэтому становится понятным, что симме-

тричность  $\mu$  исключает дрейф траекторий. Доказательству же первого утверждения посвящается следующий параграф.

§2. БЛУЖДЕНИЕ ПО РЕШЕТКАМ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ  
РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПЕРЕХОДА

**2.1.** Частица совершает случайные блуждания на графе группы  $G = pgg$  (см. рис. 2). Из каждой вершины возможны два исхода, отвечающие отображениям  $O$  и  $P$  с вероятностями  $p_1$  и  $p_2$  соответственно,  $p_1 + p_2 = 1$ . Ограничение  $p_1 > 0$  и  $p_2 > 0$  пока не предполагается. Подгруппе трансляций  $G_{tp} \subset G$  отвечает подрешетка

$$M = 2 \cdot \mathbb{Z}^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 : x_i \equiv 0 \pmod{2}\} \quad (2.1)$$

основной решетки  $L = \mathbb{Z}^2$  из вершин графа  $G$ .

Распределение  $\mu = \{p_1, p_2\}$  задает переходную функцию случайного блуждания

$$p^1(x, y) = p(x, y),$$

равную вероятности перехода за 1 шаг из точки  $x \in L$  в точку  $y \in L$  и периодическую  $\text{mod } L$ :

$$p(x + m, y + m) = p(x, y) \quad \text{для любого } m \in M. \quad (2.2)$$

Фактор-группа  $L/M = L(\text{mod } M)$  состоит из четырех представителей

$$i = (i_1, i_2) : \bar{1} = (0, 0), \bar{2} = (1, 0), \bar{3} = (0, 1), \bar{4} = (1, 1). \quad (2.3)$$

Ввиду периодичности (2.2) функции  $p(x, y)$ , она полностью определяется значениями вероятностей переходов

$$p(i, i + ((-1)^{i_2}, 0)) = p_1, \quad p(i, i + (0, (-1)^{i_1})) = p_2 \quad (2.4)$$

для всех  $i$  из (2.3). Если  $j$  не совпадает ни с одним из (2.3), то  $p(i, j) = 0$ .

**2.2.** Введем еще  $p^n(x, y)$  – вероятности перехода за  $n$  шагов из  $x \in L$  в  $y \in L$ . Они удовлетворяют разностному уравнению

$$p^n(x, y) = p_1 p^{n-1}(x, y - ((-1)^{y_2}, 0)) + p_2 p^{n-1}(x, y - (0, (-1)^{y_1})) \quad (2.5)$$

для  $n \geq 1$ , а для  $n = 0$

$$p^0(x, y) = \delta_{xy} \text{ – символ Кронекера.} \quad (2.6)$$

Для  $p^n(x, y)$  определим преобразование Фурье

$$p^n(i, j; a) = \sum_{\substack{y \in L \\ y \equiv j \pmod{M}}} p^n(i, y) e(ay) \quad (2.7)$$

– аналог характеристической функции. Сравнение  $y \equiv j \pmod{M}$  означает, что  $y$  принадлежит классу смежности  $j + M$ ,  $e(x) = \exp(2\pi i x)$ ,  $ay = a \cdot y = a_1 y_1 + a_2 y_2$  – скалярное произведение  $a = (a_1, a_2)$  и  $y = (y_1, y_2)$  из  $\mathbb{R}^2$ . Сумма в (2.7) конечная и проблемы со сходимостью не возникает. Используя разностное уравнение (2.5) для  $n \geq 1$  имеем

$$\begin{aligned} p^n(i, j; a) &= p_1 \sum_{\substack{y \in L \\ y \equiv j \pmod{M}}} p^{n-1}(i, y - ((-1)^{j_2}, 0)) e(ay) + \\ &+ p_2 \sum_{\substack{y \in L \\ y \equiv j \pmod{M}}} p^{n-1}(i, y - (0, (-1)^{j_1})) e(ay) = \\ &= p_1 e(a((-1)^{j_2}, 0)) \sum_{\substack{y' \in L \\ y' \equiv j' \pmod{M}}} p^{n-1}(i, y') e(ay') + \\ &+ p_2 e(a(0, (-1)^{j_1})) \sum_{\substack{y'' \in L \\ y'' \equiv j'' \pmod{M}}} p^{n-1}(i, y'') e(ay''), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} j' &= j + (1, 0), & j' &\equiv j - ((-1)^{j_2}, 0) \pmod{M}, \\ j'' &= j + (0, 1), & j'' &\equiv j - (0, (-1)^{j_1}) \pmod{M}. \end{aligned}$$

Отсюда и из определения преобразований Фурье (2.7) для  $p^n(i, j; a)$  вытекает разностное уравнение

$$\begin{aligned} p''(i, j; a) &= p_1 e(a((-1)^{j_2}, 0)) p^{n-1}(i, j'; a) + \\ &+ p_2 e(a(0, (-1)^{j_1})) p^{n-1}(i, j''; a) \end{aligned} \quad (2.8)$$

для  $n \geq 1$ . Если же  $n = 0$  и  $i, j$  из списка (2.3), то в силу (2.6)

$$p^0(i, j; a) = \delta_{ij} e(ai). \quad (2.9)$$

Уравнение (2.8) и формула вероятностей переходов (2.4) побу-

ждают ввести матрицы

$$T_1(a) = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon(a(1, 0)) & \vdots & \\ \epsilon(a(1, 0)) & 0 & \vdots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & \vdots & 0 & \epsilon(a(-1, 0)) \\ & & \vdots & \epsilon(a(-1, 0)) & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

$$T_2(a) = \begin{pmatrix} & & \vdots & \epsilon(a(0, 1)) & 0 \\ & & \vdots & 0 & \epsilon(a(0, -1)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \epsilon(a(0, 1)) & 0 & \vdots & & \\ 0 & \epsilon(a(0, -1)) & \vdots & & \end{pmatrix}.$$

Обозначим  $P^n(a) = (p^n(i, j; a))$  квадратную матрицу четвертого порядка, элементы которой пронумерованы согласно соглашению (2.3). Теперь разностное уравнение (2.8) переписется в компактной матричной форме

$$P^n(a) = P^{n-1}(a) \cdot T(a), \quad n \geq 1, \tag{2.11}$$

с матрицей

$$T(a) = p_1 T_1(a) + p_2 T_2(a). \tag{2.12}$$

При  $n = 0$

$$P^0(a) = E(a) = \text{diag}(\epsilon(a(0, 0)), \dots, \epsilon(a(1, 1))) \tag{2.13}$$

– диагональная матрица. Теперь, как принято в теории случайных блужданий по решеткам [7], построим производящую (матричную) функцию

$$P(a, z) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(a) z^n, \quad |z| < 1.$$

Из (2.11) и (2.13) для нее выведем явную формулу

$$P(a, z) = P^0(a) \cdot R(a, z), \quad \text{где } R(a, z) = (E - zT(a))^{-1} \tag{2.14}$$

– резольвента матрицы  $T(a)$ ,  $E$  – единичная матрица четвертого порядка.

**2.3.** Повторим все построения для  $f^n(x, y)$  – вероятности перехода из  $x$  в  $y$  впервые на  $n$ -ом шаге. Считаем  $f^0(x, y) = 0$ . Эти вероятности связаны с  $p^n(i, y)$  соотношениями

$$p^n(i, y) = \sum_{0 \leq l \leq n} f^l(i, y) p^{n-l}(y, y), \quad n \geq 1,$$

или в терминах характеристических функций (2.7)

$$p^n(i, j; a) = \sum_{0 \leq l \leq n} f^l(i, j; a) p^{n-l}(j, j), \quad n \geq 1, \quad (2.15)$$

при этом полагаем

$$f^n(i, j; a) = \sum_{\substack{y \in L \\ y \equiv j \pmod{M}}} f^n(i, y) e(ay), \quad n \geq 1,$$

и  $f^0(i, j; a) = 0$ . Продолжая по аналогии, введем квадратные матрицы размера четыре  $F^n(a) = (f^n(i, j; a))$  и диагональные матрицы

$$P^n = (\delta_{ij} p^n(j, j)), \quad n \geq 1, \quad P^0 = E$$

(см. (2.6)) с нумерацией элементов (2.3). Соотношение (2.15) суть координатная запись матричного уравнения типа свертки

$$P^n(a) = \sum_{0 \leq l \leq n} F^l(a) \cdot P^{n-l}, \quad n \geq 1,$$

где  $F^0(a) = 0$ . Умножим его на  $z^n$  и просуммируем по  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Получим

$$P(a, z) - P^0(a) = F(a, z) \cdot P(z) \quad (2.16)$$

– произведение производящих функций

$$F(a, z) = \sum_{l=1}^{\infty} F^l(a) z^l, \quad P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n z^n.$$

Из (2.16) вытекает следующее представление

$$F(a, z) = (P(a, z) - P^0(a)) \cdot P(z)^{-1}, \quad |z| < 1. \quad (2.17)$$

**2.4.** Для обеих частей из (2.17) вычислим обратные преобразования Фурье. Используя обозначение (2.13), можем записать

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 F(a, z) E(-a) da &= \int_0^1 \int_0^1 (P(a, z) - P^0(a)) P(z)^{-1} E(-a) da = \\ &= \left[ \int_0^1 \int_0^1 P(a, z) E(-a) da - E \right] P(z)^{-1} \end{aligned}$$

поскольку матрицы  $P(z)$  и  $E(-a)$  диагональные и  $E(-a) = P^0(a)^{-1}$ . Левая часть равна

$$F(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \left( f^l(i, j) \right)_{4 \times 4} z^l, \quad (2.18)$$

а для вычисления правой части воспользуемся формулой (2.14). Тогда для производящей матричной функции (2.18) получим интегральное представление

$$F(z) = \left[ \int_0^1 \int_0^1 E(a) R(z, a) E(-a) da - E \right] P(z)^{-1}. \quad (2.19)$$

Функцию  $P(z)$  можно записать в виде

$$P(z) = \text{diag} \left[ \int_0^1 \int_0^1 P(a, z) E(-a) da \right]. \quad (2.20)$$

Здесь символ  $\text{diag } A$  обозначает матрицу с диагональными элементами, как у матрицы  $A$ , и с нулевыми остальными элементами. В двух последних формулах участвует один и тот же интеграл

$$J(z) = \int_0^1 \int_0^1 E(a) R(z, a) E(a)^{-1} da. \quad (2.21)$$

Если использовать это обозначение и (2.20), то докажем нужную нам формулу

$$F(z) = (J(z) - E)(\text{diag } J(z))^{-1}. \quad (2.22)$$

Поскольку мы интересуемся вероятностями возвращения частицы в исходную точку, то достаточно рассмотреть только диагональ  $\text{diag } F(z)$ . Взятие диагонали в (2.22) упрощает последнюю формулу

$$\text{diag } F(z) = E - (\text{diag } I(z))^{-1}, \quad (2.23)$$

где

$$I(z) = \int_0^1 \int_0^1 (E - zT(a))^{-1} da. \quad (2.24)$$

**Замечание.** Приведенное доказательство формулы (2.23) носит общий характер и не зависит от выбора кристаллографической группы  $G$ . Более того, даже групповое происхождение и размерность группы для этой формулы несущественно. Она применима к случайным блужданиям по решетке  $L$ , для которых вероятности переходов  $p(x, y)$  периодичны  $\text{mod } M$

$$p(x + m, y + m) = p(x, y) \quad \text{для всех } x, y \in L, m \in M. \quad (2.25)$$

При этом накладывается ограничение, что подрешетка  $M \subset L$  имеет конечный индекс в  $L$ . В случае  $M = L$  формула (2.23) общеизвестна [7]. По аналогии с [7] формулу (2.23) можно было выписать сразу. Формула (2.23) также применима к блужданиям по решетке в присутствии периодически расположенных ловушек [8].

**2.5.** По определению производящей функции  $F(z)$  (2.18) ее первый диагональный элемент равен

$$F_{11}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f^n(\bar{1}, \bar{1}) z^n, \quad (2.26)$$

где согласно соглашению (2.3)  $\bar{1} = (0, 0)$  и  $f^n(\bar{1}, \bar{1})$  – вероятность первого возвращения частицы в изначальную точку  $(0, 0)$  на  $n$ -ом шаге. Интерпретация  $F_{11}(1)$  очевидна:  $F_{11}(1)$  – вероятность того, что частица когда-либо возвратится в  $(0, 0)$ . Вспоминая граф группы  $G = pgg$  (см. рис. 2), нетрудно заметить совпадение вероятностей  $F_{11}(1) = F_{22}(1) = F_{33}(1) = F_{44}(1)$  возвращения во все четыре точки из списка (2.3). Поэтому ограничимся вычислением вероятности  $F_{11}(1)$ .

Начнем с вычисления определителя  $d(z, a)$  матрицы (см. (2.12) и (2.10))

$$D(z, a) = E - zT(a) = - \begin{pmatrix} -1 & zp_1e(a_1) & zp_2e(a_2) & 0 \\ zp_1e(a_1) & -1 & 0 & zp_2e(-a_2) \\ zp_2e(a_2) & 0 & -1 & zp_1e(-a_1) \\ 0 & zp_2e(-a_2) & zp_1e(-a_1) & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Для определителя  $d(z, a)$  и минора  $d_{11}(z, a)$  имеем

$$d(z, a) = 1 - (p_1^2(\epsilon(2a_1) + \epsilon(-2a_1)) + p_2^2(\epsilon(2a_2) + \epsilon(-2a_2)))z^2 + (p_1^2 - p_2^2)^2 z^4 = 1 - 2(p_1^2c(2a_1) + p_2^2c(2a_2))z^2 + (p_1 - p_2)^2 z^4, \quad (2.28)$$

где использовано сокращение  $c(x) = \cos(2\pi x)$  (см. (2.7)), и

$$d_{11}(z, a) = 1 - (p_1^2\epsilon(-2a_1) + p_2^2\epsilon(-2a_2))z^2. \quad (2.29)$$

Поэтому первый диагональный элемент  $I_{11}(z)$  из (2.24) равен

$$I_{11}(z) = \int_0^1 \int \frac{d_{11}(z, a)}{d(z, a)} da = \int_{-1/2}^{1/2} \int \frac{d_{11}(z, a/2)}{d(z, a/2)} da.$$

Если в  $I_{11}(z)$  положить  $z = 1$ , то видим, что интеграл

$$\begin{aligned} I_{11}(1) &= \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \int \frac{1 - p_1^2\epsilon(-a_1) - p_2^2\epsilon(-a_2)}{p_1^2(1 - c(-a_1)) + p_2^2(1 - c(-a_2))} da_1 da_2 = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \int \frac{1 - (p_1^2c(a_1) + p_2^2c(a_2))}{p_1^2(1 - c(a_1)) + p_2^2(1 - c(a_2))} da_1 da_2 > 0. \end{aligned}$$

расходится тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$p_1 > 0 \text{ и } p_2 > 0. \quad (2.30)$$

Из формулы (2.23) для  $F_{11}(z)$  и  $I_{11}(z)$  вытекает соотношение

$$F_{11}(z) = 1 - \frac{1}{I_{11}(z)}$$

и поэтому  $F_{11}(1) = 1$  равносильно (2.30). Итак доказана

**Теорема.** *Случайное блуждание по графу плоской кристаллографической группы  $G = rdd$  (см. рис. 2) возвратно только и если только вероятности переходов  $p_1$  и  $p_2$  удовлетворяют условию (2.30).*

**Следствие.** *Группа  $G = rdd$  возвратная и свойство возвратности случайного блуждания на данной группе не зависит от распределения вероятностей  $\mu = \{p_1, p_2\}$  с условием  $G_\mu = G$ , т.е. с условием (2.30).*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. H. Kesten, *Contributions to probability theory, II*, Univ. California Press, Berkeley, Calif., 1967.
2. Г. Кокстер, У. Мозер, *Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп*, М., 1980.
3. Н. П. Жидков, Б. М. Шедрин, *Геометрия кристаллического пространства*, Изд-во Московского ун-та, 1988.
4. R. Schwarzenberger, *N-dimensional crystallography*, Pitman, San Francisco-London-Melbourne, 1980.
5. Б. К. Вайнштейн, *Современная кристаллография*, т. 1, М., 1979.
6. О. В. Ковалев, *Неприводимые и индуцированные представления и копредставления федоровских групп*, М., 1986.
7. E. W. Montroll, *Random walks in multidimensional spaces, especially on periodic lattices*, J. Soc. Indust. Appl. Math. **4** (1956), 241–260.
8. E. W. Montroll, *Random walks on lattices*, J. Math. Phys. **10**, No. 5 (1969) 753–767.

Владимирский  
государственный  
педагогический  
университет  
e-mail: zhuravl@vgpu.elcom.ru  
e-mail: aayudin@vgpu.elcom.ru

Поступило 12 февраля 2001 г.