

гда такого рода поведение приводит к потере оптимальности, вскользь упоминаются задачи, относящиеся к неоднородным марковским семействам стратегий.

В отличие от глав 3 и 4, в которых решались проблемы поиска стратегий, максимизирующих функции полезности, определенные на множестве элементарных исходов одного шага игры, в главе 6, озаглавленной «Теоремы аппроксимации», рассматриваются вопросы построения оптимальных стратегий для оптимизации функций полезности, определенных на пространстве подмножеств множества всех бесконечных последовательностей исходов отдельных игр (history space).

В круг такого рода проблем входят, в частности, ситуации, когда игрок желает максимизировать вероятность постоянного нахождения в фиксированном подмножестве пространства выигрышей, или когда максимизации подлежит вероятность посещения некоторого подмножества состояний бесконечное число раз. Основная цель данной главы — показать, что решение такого рода задач может быть получено путем аппроксимации подходящими последовательностями задач, рассматривавшихся в главах 3 и 4.

Глава 7, название которой совпадает со второй частью названия всей книги, «Стохастические игры», содержит довольно подробный анализ свойств стохастических игр двух лиц с нулевой суммой. Приведены условия, обеспечивающие существование значения игры, описаны семейства оптимальных стратегий для конечных игр, для ряда конкретных игр проведено построение оптимальных стратегий, указаны «хорошие» стратегии для бесконечных игр и в качестве примеров разобраны рекурсивные матричные игры, игры на разорение, игра «большой матч» (в терминологии книги [2]) и игра с тремя исходами: выигрыш, ничья или проигрыш.

В целом книга оставляет приятное впечатление и является прекрасным дополнением к монографиям [2]–[3].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dubins L. E., Savage L. G. How to Gamble if You Must: Inequalities for Stochastic Processes. New York: McGraw-Hill, 1965.
2. Пармхасарампи Т., Рагхаван Т. Некоторые вопросы теории игр двух лиц. М.: Мир, 1974, 296 с.
3. Оуэн Г. Теория игр. М.: Мир, 1971, 230 с.

17.II.1997 г.

В. А. Ватутин

Vaart Aad W. van der, Wellner Jon A. **Weak Convergence and Empirical Processes, with Applications to Statistics.** New York et al.: Springer-Verlag, 1996, xi+508 pp.

Рецензируемая монография состоит из трех основных частей.

В первой, относительно небольшой, части «Стохастическая сходимостъ» рассматриваются различные виды сходимости, используемые в теории вероятностей (по распределению, по вероятности, почти наверное), причем особое внимание уделяется разработанным в последнее время понятиям и результатам, позволяющим рассматривать случайные величины, которые не измеримы относительно обычного борелевского  $\sigma$ -поля. Необходимость в рассмотрении таких случайных величин возникает, например, при изучении эмпирических распределений и процессов, рассматриваемых как отображения в пространство Скорохода  $D[0, 1]$  непрерывных справа функций, имеющих пределы слева, с равномерной метрикой. Борелевская  $\sigma$ -алгебра в таком

пространстве оказывается слишком богатой, и прообразы борелевских множеств могут не быть борелевскими. По аналогии с теорией меры вводятся понятия внешнего интеграла от случайной величины  $X$  как нижней грани математических ожиданий по всем измеримым случайным величинам, мажорирующим  $X$ . Это позволяет обобщить и понятие сходимости к борелевской случайной величине; кроме того, вместо сходимости по последовательностям становится естественным рассматривать сходимость по упорядоченным множествам. В первой части книги проводится построение соответствующей более общей теории стохастической сходимости, которая во многом (но не во всем) совпадает с классической теорией.

Вторая часть книги, «Эмпирические процессы», посвящена изучению свойств сходимости эмпирических мер и эмпирических процессов, определяемых как функционалы на классе измеримых функций, зависящие от выборочных значений  $X_1, X_2, \dots$  случайной величины  $X$  с распределением  $P$  и принимающие действительные значения (например, эмпирическая мера  $P_n$ , приписывающая каждому значению  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , атом веса  $n^{-1}$ , порождает отображение функции  $f$  в  $f(X_1) + \dots + f(X_n)$ , а эмпирический процесс понимается как знаковая мера  $G_n = n^{1/2}(P_n - P)$  или как функционал, отображающий  $f$  в  $n^{-1/2}(f(X_1) + \dots + f(X_n) - nEf(X))$ . В классической теории эмпирических процессов выбор функций  $f$  ограничивается индикаторами левых полупрямых для действительной случайной величины  $X$  или индикаторами ортантов для векторного случая; в монографии классы функций  $f$  могут включать в себя индикаторы полупространств, шаров, эллипсоидов, а также совокупности гладких или монотонных функций.

Во второй части монографии изучаются классы функций  $f$ , для которых выполняются аналоги теоремы Гливленко–Кантелли (т.е. закон больших чисел для эмпирических мер) или аналоги теорем Донскера (функциональные предельные теоремы для эмпирических процессов), свойства эмпирических процессов как функционалов на классах множеств и функций типа Валника–Червоненкиса, на классах гладких, выпуклых и т.п. множеств и функций. Рассматриваются свойства равномерности по распределениям исходной случайной величины  $P$ , различные виды асимптотической нормальности, оценки вероятностей больших отклонений.

Третья часть монографии, «Статистические приложения», посвящена приложениям результатов второй части к конкретным статистическим задачам. В ней доказываются теоремы о состоятельности, скорости сходимости и о предельных распределениях для различных классов статистических оценок, в частности, для  $M$ -оценок (точек максимума функций от совокупности выборочных значений) и  $Z$ -оценок (корней зависящей от выборочных значений случайной функции); рассматриваются различные процедуры бутстрэпа, задачи о сравнении двух выборок, вопросы контигуальности и эффективности для эмпирических процессов.

Высокий уровень общности получаемых результатов авторы удачно сочетают с большим количеством примеров и замечаний, связывающих общие понятия и результаты с конкретными ситуациями, послужившими основой для обобщений. Практически каждый раздел книги завершается пунктом «Задачи и дополнения», в который наряду с учебными включаются и исследовательские задачи; каждая глава завершается кратким историческим обзором, который дает представление о развитии теории. Книга завершается авторским и предметным указателями, а также списком используемых обозначений.

В советское время, когда государство активно финансировало издание всех видов литературы: от детской до специальной, от художественной до научной и технической, монография с таким богатым содержанием была бы довольно быстро переведена на русский язык и попала бы на полки библиотек институтов, вузов и различных специалистов, как математиков, так и прикладников. Сейчас же основная масса научных работников и значительная часть библиотек не в состоянии приобретать необходимую для работы литературу, и даже в тех редких случаях, когда авторам и

издательствам удастся найти возможности для выпуска в свет довольно ограниченного тиража научной книги на русском языке, расстояние от нее до основной массы ее возможных читателей сокращается не слишком сильно. Тем не менее, перевод этой несомненно полезной книги на русский язык представляется мне целесообразным хотя бы с точки зрения народного принципа «помирать собирайся — рожь сей».

27.I.1997 г.

А. М. Зубков