Математические заметки

том 78 выпуск 5 ноябрь 2005

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТОЧНЫЕ КОНСТАНТЫ В НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА ДЖЕКСОНА И ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПОПЕРЕЧНИКОВ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ ИЗ L_2

С. Б. Вакарчук

1. Обозначим через $L_2 = L_2[0, 2\pi]$ пространство измеримых по Лебегу 2π-периодических функций, у которых норма

$$\|f\| = \left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx\right\}^{1/2} < \infty.$$

Пусть $\mathscr{T}_{n-1}$ есть подпространство, состоящее из всевозможных тригонометрических полиномов порядка $n-1$. Хорошо известно, что для произвольной функции $f(x)$ из L_2, имеющей разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos(kx + \varphi_k),$$

величина ее наилучшего приближения элементами подпространства $\mathscr{T}_{n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f) = \inf\{\|f - T_{n-1}\| : T_{n-1} \in \mathscr{T}_{n-1}\} = \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2\right\}^{1/2}, \tag{1}$$

где $S_{n-1}(f, x)$ – частичная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье $f(x)$.

Модуль непрерывности m-го порядка функции $f(x) \in L_2$ обозначим через

$$\omega_m(f, t) = \sup\{\|\Delta_h^m f(x)\| : |h| \leqslant t\},$$

где

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f(x + jh).$$

При решении задач теории аппроксимации в L_2 вопросы вычисления точных констант

$$K_{n,r,m}(t) = \sup\left\{\frac{n^r E_{n-1}(f)}{\omega_m(f^{(r)}, t/n)} : f(x) \in L_2^r,\ f(x) \neq \mathrm{const}\right\}, \tag{2}$$

в неравенствах типа Джексона $E_{n-1}(f) \leqslant n^{-r} K \omega_m(f^{(r)}, t/n)$ исследовались Н.И. Черных, В.А. Юдиным, А.А. Лигуном, В.И. Ивановым, Л.В. Тайковым, А.Г. Бабенко, и другими (см., например, [1]–[8]). Здесь $L_2^r (r \in Z_+; L_2^0 = L_2)$ множество функций $f(x) \in L_2$, производные $(r-1)$-го порядка которых абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка принадлежат пространству L_2; также полагаем $0/0 \overset{\text{def}}{=} 0$.

Использование других гладкостных характеристик 2π-периодических функций, например, тригонометрических модулей непрерывности, позволило получить новые содержательные результаты, связанные с дальнейшим исследованием неравенств типа Джексона [9]. Поскольку во многих случаях K-функционалы играют ту же роль, что и модули гладкости, для них в L_2 была подсчитана экстремальная характеристика, в определенном смысле соответствующая (2) [10, с. 497].

При решении некоторых задач теории приближения вместо модуля непрерывности m-го порядка функции $f(x) \in L_2$ иногда удобнее использовать следующую эквивалентную характеристику:

$$\Omega_m(f,t) = \left\{ \frac{1}{t^m} \int_0^t \cdots \int_0^t \|\Delta_{\bar h}^m f(x)\|^2 \, dh_1 \dots dh_m \right\}^{1/2}, \qquad t > 0,$$

где $\bar h = (h_1, \dots, h_m)$, $\Delta_{\bar h}^m = \Delta_{h_1}^1 \circ \dots \circ \Delta_{h_m}^1$ (см. [11, с. 93], [12]). Поэтому с нашей точки зрения наряду с (2) определенный интерес представляет также вычисление величины

$$\mathscr{K}_{n,r,m}(t) \overset{\text{def}}{=} \sup\left\{ \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\Omega_m(f^{(r)}, t/n} : f(x) \in L_2^r,\ f(x) \neq \text{const} \right\}.$$

Теорема 1. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$. Тогда для любых чисел $0 < t \leqslant \pi/2$ справедливы равенства*

$$\mathscr{K}_{n,r,m}(t) = \left\{ 2\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right) \right\}^{-m/2}. \tag{3}$$

2. Решение задачи (2) играет существенную роль в L_2 при вычислении n-поперечников функциональных классов, определенных при помощи модулей непрерывности [5], [7], [8]. Аналогичная ситуация имеет место и для $\mathscr{K}_{n,r,m}(t)$. Используя $\Omega_m(f,t)$, введем в L_2 следующий класс. Пусть $\Psi(t)$, $t \geqslant 0$, есть произвольная возрастающая функция такая, что $\Psi(t) > 0$ при $t > 0$ и $\lim\{\Psi(t) : t \to 0\} = \Psi(0) = 0$. Под $W^r(\Omega_m, \Psi)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, понимаем множество элементов $f(x) \in L_2^r$, у которых r-е производные удовлетворяют ограничению $\Omega_m(f^{(r)}, t) \leqslant \Psi(t)$ $\forall t > 0$.

Теорема 2. *Пусть при некотором $n \in \mathbb{N}$ мажорирующая функция $\Psi(t)$ удовлетворяет ограничению*

$$\frac{\Psi^2(\pi t/(2n))}{\Psi^2(\pi/(2n))} \geqslant \left(\frac{\pi}{\pi - 2}\right)^m \begin{cases} (1 - 2\sin(\pi t/2)/(\pi t))^m, & \text{если} \quad 0 < t \leqslant 2, \\ 2^m (1 - 1/t)^m, & \text{если} \quad 2 \leqslant t < \infty. \end{cases} \tag{4}$$

Тогда для этого n выполнены равенства

$$\begin{aligned} p_n(W^r(\Omega_m, \Psi); L_2) &= E_{[(n+1)/2]-1}(W^r(\Omega_m, \Psi)) \\ &= \left\{ \frac{\pi}{2(\pi - 2)} \right\}^{m/2} \left[\frac{n+1}{2} \right]^{-r} \Psi\left(\frac{\pi}{2[(n+1)/2]} \right), \end{aligned} \tag{5}$$

где p_n – любой из n-поперечников: бернштейновский b_n, колмогоровский d_n, гельфандовский d^n, линейный δ_n, проекционный Π_n; $[\beta]$ – целая часть числа β; $E_{m-1}(\mathscr{Q}) = \sup\{E_{m-1}(f) : f \in \mathscr{Q}\}$ – наилучшее приближение класса $\mathscr{Q} \subset L_2$ подпространством $\mathscr{T}_{m-1}$.

Сообщение заканчивается примером мажоранты, удовлетворяющей (4).

3. Доказательство теоремы 1. Используя формулы Эйлера, представим ряд Фурье функции $f(x) \in L_2$ в комплексной форме $f(x) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{ijx}$, где c_j и c_{-j} – взаимно сопряженные числа. Поскольку функции $\{e^{ijx}\}$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, образуют на $[0, 2\pi]$ ортогональную систему, используя равенство Парсеваля, запишем

$$\|\Delta_{\bar h}^m f(x)\|^2 = \left\| \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \Delta_{\bar h}^m e^{ijx} \right\|^2 = 2^m \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j^2 \prod_{\nu=1}^{m} (1 - \cos jh_\nu). \tag{6}$$

Подставляя (6) в формулу, определяющую $\Omega_m(f,\tau)$, учитывая (1) и тот факт, что $\max\{|\sin u|/u : u \geqslant n\tau\} = \sin(n\tau)/(n\tau)$ при $0 < n\tau \leqslant \pi/2$ [5, с. 435], получим

$$\Omega_m^2(f,\tau) \geqslant 2^m \sum_{j=n}^{\infty} \rho_j^2 \left(1 - \frac{\sin j\tau}{j\tau}\right)^m \geqslant \left\{2\left(1 - \frac{\sin n\tau}{n\tau}\right)\right\}^m E_{n-1}^2(f). \tag{7}$$

В силу известного соотношения $\sup\{E_{n-1}(f)/E_{n-1}(f^{(r)}) : f(x) \in L_2^r\} = n^{-r}$ из (7) для $\forall f(x) \in L_2$, $f(x) \neq \mathrm{const}$, имеем

$$\frac{n^r E_{n-1}(f)}{\Omega_m(f,\tau)} \leqslant \left\{2\left(1 - \frac{\sin n\tau}{n\tau}\right)\right\}^{-m/2}.$$

Полагая здесь $t = n\tau$ и используя определение величины $\mathscr{K}_{n,r,m}(t)$, запишем

$$\mathscr{K}_{n,r,m}(t) \leqslant \left\{2\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)\right\}^{-m/2}. \tag{8}$$

Для получения оценки снизу рассмотрим в L_2 функцию $f_*(x) = \sin nx$. Поскольку $E_{n-1}(f_*) = 1$ и $\Omega_m(f_*^{(r)}, t/n) = n^r\{2(1 - \sin(t)/t)\}^{m/2}$, то

$$\mathscr{K}_{n,r,m}(t) \geqslant \frac{n^r E_{n-1}(f_*)}{\Omega_m(f_*^{(r)}, t/n)} = \left\{2\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)\right\}^{-m/2}.$$

Сопоставив данное соотношение и (8), получим (3). Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2. Полагая в (3) $t = \pi/2$ и используя определение класса $W^r(\Omega_m, \Psi)$ и соотношения между n-поперечниками $b_n \leqslant d^n \leqslant d_n = \delta_n = \Pi_n$ в гильбертовом пространстве, имеем

$$\begin{aligned} p_{2n}(W^r(\Omega_m,\Psi); L_2) &\leqslant p_{2n-1}(W^r(\Omega_m,\Psi); L_2) \leqslant d_{2n-1}(W^r(\Omega_m,\Psi); L_2) \\ &\leqslant E_{n-1}(W^r(\Omega_m,\Psi)) \leqslant \left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{m/2} \frac{1}{n^r} \Psi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Получим оценку снизу бернштейновского поперечника $b_{2n}(W^r(\Omega_m,\Psi); L_2)$. Рассмотрим в L_2 шар

$$B^* = \left\{T_n(x) \in \mathscr{T}_n : \|T_n\| \leqslant \left(\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right)^{m/2} \frac{1}{n^r} \Psi\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\}$$

и покажем, что $B^* \subset W^r(\Omega_m,\Psi)$. Для этого убедимся в справедливости неравенства $\Omega_m(T_n^{(r)}, \tau) \leqslant \Psi(\tau)$ $\forall T_n(x) \in B^*, \forall \tau > 0$. Полагаем

$$(1 - \cos nh)_* \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} 1 - \cos nh, & \text{если } 0 < nh \leqslant \pi, \\ 2, & \text{если } nh > \pi. \end{cases}$$

Учитывая, что неравенства $(1 - \cos jh) \leqslant (1 - \cos nh)_*$ справедливы для любых $h \geqslant 0$ и $j \leqslant n$, и используя неравенство Бернштейна для тригонометрических полиномов, получим

$$\Omega_m(T_n^{(r)}, \tau) \leqslant \left\{\frac{2}{\tau}\int_0^\tau (1 - \cos nh)_*\, dh\right\}^{m/2} n^r \|T_n\|. \tag{10}$$

Пусть $0 < \tau \leqslant \pi/n$. Тогда с учетом (10) для $\forall T_n(x) \in B^*$ запишем

$$\Omega_m(T_n^{(r)}, \tau) \leqslant \left\{\frac{\pi}{\pi-2}\left(1 - \frac{\sin n\tau}{n\tau}\right)\right\}^{m/2} \Psi\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Полагая здесь $t = 2n\tau/\pi$ и учитывая, что в данном случае $0 < t \leqslant 2$, в силу первого неравенства из (4) получим

$$\Omega_m(T_n^{(r)}, \tau) \leqslant \left\{\frac{\pi}{\pi-2}\left(1 - \frac{2\sin(\pi t/2)}{nt}\right)\right\}^{m/2} \Psi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \leqslant \Psi\left(\frac{\pi t}{2n}\right) = \Psi(\tau).$$

Пусть $\tau \geqslant \pi/n$. Для $\forall T_n(x) \in B^*$ после несложных вычислений имеем

$$\Omega_m(T_n^{(r)}, \tau) \leqslant \left\{\frac{\pi}{\pi-2}\left(2 - \frac{\pi}{\tau n}\right)\right\}^{m/2} \Psi\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Считая, как и в предыдущем случае, $t = 2n\tau/\pi$ и используя второе неравенство из ограничения (4), запишем оценку сверху $\Omega_m(T_n^{(r)}, \tau) \leqslant \Psi(\tau)$. Из определения бернштейновского поперечника следует, что

$$b_{2n}(W^r(\Omega_m, \Psi); L_2) \geqslant b_{2n}(B^*, L_2) \geqslant \left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{m/2} \frac{1}{n^r} \Psi\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Учитывая соотношения между различными поперечниками и сопоставляя данное неравенство с (9), получим (5). Теорема 2 доказана.

Следствие 1. *Если выполнены условия теоремы* 2, *то*

$$\sup\{|a_n(f)|, |b_n(f)| : f(x) \in W^r(\Omega_m, \Psi)\} = \left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{m/2} \frac{1}{n^r} \Psi\left(\frac{\pi}{2n}\right),$$

где $a_n(f)$ и $b_n(f)$ суть косинус и синус-коэффициенты Фурье функции $f(x)$ соответственно.

5. Покажем, что $\Psi_*(t) = t^{m/(\pi-2)}$ является мажорантой, удовлетворяющей (4) при любом $n \in \mathbb{N}$. Подставив в левую часть (4) вместо $\Psi_*(t)$ ее выражение и возведя обе части полученного соотношения в степень $1/m$, получим неравенства

$$t^{2/(\pi-2)} \leqslant \frac{\pi}{\pi-2}\begin{cases} 1 - 2\sin(\pi t/2)/(\pi t), & \text{если } \ 0 < t \leqslant 2, \\ 2(1 - 1/t), & \text{если } \ 2 \leqslant t < \infty, \end{cases} \tag{11}$$

в справедливости которых нужно убедиться. Для этого при $0 < t \leqslant 2$ рассмотрим разность

$$t^{2/(\pi-2)} - \frac{\pi}{\pi-2}\left(1 - \frac{2}{\pi t}\sin\frac{\pi t}{2}\right) = \frac{1}{t}\left\{t^{\pi/(\pi-2)} - \frac{\pi}{\pi-2}\left(t - \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi t}{2}\right)\right\}.$$

В [5, с. 437] показано, что функция, заключенная в фигурных скобках, неотрицательна, что означает справедливость первого неравенства в (11). В случае $2 \leqslant t < \infty$ исследуем разность

$$t^{2/(\pi-2)} - \frac{2\pi}{\pi-2}\left(1 - \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t}\left\{t^{\pi/(\pi-2)} - \frac{2\pi}{\pi-2}(t-1)\right\}.$$

Нетрудно показать, что выражение в фигурных скобках будет положительной и монотонно возрастающей функцией. Таким образом, и второе неравенство в (11) имеет место.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черных Н. И. // Матем. заметки. 1967. Т. 2. №2. С. 513–522. **2**. Юдин В. А. // Докл. АН СССР. 1980. Т. 251. №1. С. 54–57. **3**. Лигун А. А. // Матем. заметки. 1988. Т. 43. №6. С. 757–769. **4**. Иванов В. И., Смирнов О. И. Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p. Тула: Тульский гос. пед. ун-т, 1995. **5**. Тайков Л. В. // Матем. заметки. 1976. Т. 20. №3. С. 433–438. **6**. Бабенко А. Г. // Матем. заметки. 1986. Т. 39. №5. С. 651–664. **7**. Айнуллоев Н. // Применение функционального анализа в теории приближений. Сб. научных тр. Калинин: Калининский ун-т, 1986. С. 3–10. **8**. Есмаганбетов М. Г. // Матем. заметки. 1999. Т. 66. №6. С. 816–820. **9**. Бабенко А. Г., Черных Н. И., Шевалдин В. Т. // Матем. заметки. 1999. Т. 65. №6. С. 928–932. **10**. Вакарчук С. Б. // Матем. заметки. 1999. Т. 66. №4. С. 494–499. **11**. Руновский К. В. // Матем. сб. 1984. Т. 185. №8. С. 81–102. **12**. Стороженко Э. А., Кротов В. Г., Освальд П. // Матем. сб. 1975. Т. 98 (140). С. 395–415.

Академия таможенной службы Украины, г. Днепропетровск, Украина
E-mail: `academy@amsu.dnp.ukrpack.net`

Поступило
08.06.2000
Исправленный вариант
21.06.2001