

УДК 621.391 : 519.175.4 : 519.214

© 2021 г. Т. Константинопoulos<sup>1</sup>, А.В. Логачёв<sup>2</sup>, А.А. Могульский<sup>2</sup>, С.Г. Фосс<sup>1,2</sup>

### ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ МАКСИМАЛЬНОГО ВЕСА ПУТИ В НАПРАВЛЕННОМ ГРАФЕ НА ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ПРЯМОЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ ВЕСАМИ РЕБЕР

Рассматривается бесконечный направленный граф, вершины которого занумерованы целыми числами  $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ , а любая пара вершин  $j < k$  соединена ребром  $(j, k)$  между ними, направленным из  $j$  в  $k$  и имеющим случайный вес  $v_{j,k} \in [-\infty, \infty)$ , где  $\{v_{j,k}, j < k\}$  – семейство независимых и одинаково распределенных случайных величин, которые принимают либо конечные значения (любого знака), либо значение  $-\infty$ . Путь в таком графе – это последовательность связанных между собой ребер  $(j_0, j_1), (j_1, j_2), \dots, (j_{m-1}, j_m)$  (где  $j_0 < j_1 < \dots < j_m$ ), а его вес – сумма весов этих ребер  $\sum_{s=1}^m v_{j_{s-1}, j_s} \geq -\infty$ . Пусть  $w_{0,n}$  – максимальный вес среди всех путей из 0 в  $n$ . В предположениях, что  $\mathbf{P}(v_{0,1} > 0) > 0$ , условное распределение  $\mathbf{P}(v_{0,1} \in \cdot \mid v_{0,1} > 0)$  невырождено и  $\mathbf{E} \exp(Cv_{0,1}) < \infty$  при некотором  $C = \text{const} > 0$ , изучается асимптотическое поведение случайной последовательности  $w_{0,n}$  при стремлении  $n \rightarrow \infty$ . В области нормальных и умеренно больших уклонений получена локальная предельная теорема в случае, когда распределение случайных величин  $v_{i,j}$  является арифметическим, и интегро-локальная предельная теорема, если это распределение является нерешетчатым.

*Ключевые слова:* направленный граф, максимальный вес пути, осевые и стержневые вершины, нормальные и умеренно большие уклонения, (интегро-)локальная предельная теорема.

**DOI:** 10.31857/S0555292321020054

#### § 1. Введение, основные обозначения и формулировка основного результата

Мы рассматриваем бесконечный направленный граф  $G(\mathbb{Z}, E)$ , множество вершин которого – все целые числа  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ , а множество направленных ребер  $E = \{e = (j, k), j < k, j, k \in \mathbb{Z}\}$  – все ребра, направленные из меньших вершин в большие. Предполагается, что в графе нет ребер из больших вершин в меньшие и нет петель вида  $(j, j)$ .

Каждому ребру  $e \in E$  сопоставляется его “вес”  $v_e$ , который может быть либо числом (положительным или отрицательным), либо принимать значение  $-\infty$ . Будем предполагать, что случайные величины  $\{v_{j,k}, j < k\}$  независимы и одинаково распределены с некоторой случайной величиной  $v$ , принимающей значения в  $[-\infty, \infty)$ .

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной финансовой поддержке совместного российско-французского гранта Российского фонда фундаментальных исследований и Национального центра научных исследований Франции (номера проектов РФФИ-НЦНР 19-51-15001 и CNRS 193-382).

<sup>2</sup> Работа выполнена в рамках Международного Центра в Академгородке (соглашение 075-15-2019-1675 с Министерством науки и высшего образования).

Пусть  $p = \mathbf{P}(v > -\infty)$  и  $p^+ = \mathbf{P}(v > 0)$ . Пусть  $v^+$  – случайная величина с распределением

$$\mathbf{P}(v^+ < t) = \mathbf{P}(v < t | v > 0), \quad t > 0. \quad (1.1)$$

В этой статье мы будем предполагать выполнение следующих условий:

$$\begin{aligned} p^+ > 0, \quad \mathbf{P}(v^+ = c) < 1 \quad \text{при любом } c > 0, \\ \mathbf{E} e^{Cv^+} < \infty \quad \text{при некотором } C > 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

т.е. случайная величина  $v$  принимает положительные значения с положительной вероятностью, ее распределение на положительной полуоси невырождено и правый хвост ее распределения относительно тонок.

В литературе используется и такая интерпретация этой модели: если  $v_e = -\infty$ , то считается, что ребро  $e$  отсутствует, а если  $v_e > -\infty$ , то ребро существует и его вес равен  $v_e$ . При таком задании появляются две независимые “случайности”: ребро может существовать или нет, и если ребро существует, то его вес – независимая ни от чего случайная величина, имеющая распределение  $\mathbf{P}(v \in \cdot | v > -\infty)$ .

Назовем *путем*  $\pi$  длины  $L(\pi) = m$  последовательность  $m$  связанных ребер  $e_1 = (j_0, j_1)$ ,  $e_2 = (j_1, j_2)$ ,  $\dots$ ,  $e_m = (j_{m-1}, j_m)$ , где конечная вершина каждого ребра совпадает с начальной вершиной следующего и  $j_0 < j_1 < \dots < j_m$ , и будем говорить, что это путь из  $j_0$  в  $j_m$  и писать  $e_i \in \pi$ ,  $i = 1, \dots, L(\pi)$ . Вес  $w(\pi)$  этого пути определим как сумму весов входящих в него ребер, т.е.

$$w(\pi) = \sum_{s=1}^{L(\pi)} v_{j_{s-1}, j_s} = \sum_{e \in \pi} v_e.$$

Ясно, что путь имеет конечный вес тогда и только тогда, когда конечны веса всех его ребер.

При  $j < k$  обозначим через  $\Pi_{j,k}$  множество всех путей из  $j$  в  $k$  с конечными весами (т.е.  $w(\pi) > -\infty$  для  $\pi \in \Pi_{j,k}$ ), а через  $w_{j,k}$  – максимальный из весов всех путей из  $j$  в  $k$ . Тогда

$$w_{j,k} = \max_{\pi \in \Pi_{j,k}} w(\pi)$$

с вероятностью единица, так как используется соглашение, что максимум по пустому множеству равен  $-\infty$ . Положим также  $w_{j,j} = 0$  при всех  $j$ .

Рассматриваемые нами графы со случайными весами могут возникать естественным образом в различных приложениях. Скажем, если вес ребра принимает только два значения, 1 (ребро есть) и  $-\infty$  (ребра нет), т.е.

$$p = \mathbf{P}(v = 1) = 1 - \mathbf{P}(v = -\infty), \quad (1.3)$$

то такой граф может описывать порядок работы некоторой вычислительной сети (см., например, [1, 2]), где под вершинами понимаются выполняемые работы, а ребра описывают их временные ограничения (если  $v_{j,k} = 1$ , то выполнение работы  $k$  не может начаться до завершения выполнения работы  $j$ ), или функционирование биологических моделей (см., например, [3, 4]), где вершины – это виды животных, а пути описывают “пищевые цепочки” (food chains): если  $v_{j,k} = 1$ , то вид  $k$  может быть пищей для вида  $j$ ).

Введем следующие два взаимоисключающих условия:

[R] Распределение случайной величины  $v$  является нерешетчатым, т.е. при любых  $a$  и  $h > 0$  вероятность того, что  $v$  принимает значения на решетке шага  $h$ , сдвинутой на  $a$ , строго меньше единицы:  $\sum_{s=-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(v = a + sh) < 1$ ;

[Z] Распределение случайной величины  $v$  является арифметическим, т.е. имеет место равенство  $\sum_{s=-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(v = sh) = 1$  при некотором  $h > 0$ . Не ограничивая общности рассуждений, мы дополнительно предположим, что шаг решетки равен  $h = 1$ , т.е. значения  $v$  целочислены и наибольший общий делитель множества  $\{k \geq 1 : \mathbf{P}(v = k) > 0\}$  равен единице<sup>3</sup>.

Отметим, что мы исключаем из рассмотрения случай  $v^+ = \text{const}$  (см. (1.2)) и случай неарифметического, но решетчатого распределения.

Нас интересует асимптотическое поведение случайной последовательности  $w_{0,n}$  при  $n \rightarrow \infty$ . Мы рассмотрим область нормальных и умеренно больших отклонений и докажем локальную предельную теорему при выполнении условия [Z] и интегро-локальную предельную теорему при выполнении условия [R].

Доказательство этих утверждений разбито на два шага. На первом шаге (приведенном в § 2) мы сначала построим вложенную регенерирующую последовательность с соответствующими “весами” (воспользовавшись методами, предложенными в работах [5,6]), а затем покажем, что как длины циклов регенерации  $\tau_k$ , так и соответствующие им веса циклов  $\zeta_k$  имеют конечные показательные моменты (точные определения этих величин даны в § 3). Отметим, что последовательность  $\{(\tau_k, \zeta_k)\}_{k=1}^{\infty}$  состоит из независимых при  $k \geq 1$  и одинаково распределенных при  $k \geq 2$  двумерных случайных векторов, имеющих при  $k \geq 2$  общее распределение с вектором  $(\tau, \zeta)$ , координаты которого, как правило, зависят друг от друга.

На втором шаге доказательства (в § 3) мы отметим, что векторы  $(\tau_k, \zeta_k)$  определяют стационарный обобщенный процесс восстановления (о.п.в.), при изучении которого применимы методы и результаты работы [7]. После этого мы докажем, что асимптотика в предельных теоремах для последовательности  $w_{0,n}$  совпадает с такой же асимптотикой для построенного о.п.в., что завершит доказательство требуемых результатов.

Для формулировки результатов нам осталось ввести функцию отклонений для о.п.в., управляемого случайным вектором  $(\tau, \zeta) \stackrel{d}{=} (\tau_2, \zeta_2)$ . Для  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  обозначим

$$A(\lambda, \mu) := \ln \mathbf{E} e^{\lambda\tau + \mu\zeta}. \quad (1.4)$$

Рассмотрим выпуклое множество

$$\mathcal{A}^{\leq 0} := \{(\lambda, \mu) : A(\lambda, \mu) \leq 0\}$$

и положим

$$D(\alpha) := \sup_{(\lambda, \mu) \in \mathcal{A}^{\leq 0}} \{\lambda + \mu\alpha\}.$$

Функция  $D(\alpha)$  играет определяющую роль в описании логарифмической асимптотики вероятностей больших отклонений о.п.в., определяемого вектором  $(\tau, \zeta)$ , и она достаточно полно изучена (см., например, [8]). Отметим, что это выпуклая функция, принимающая неотрицательные значения и обращающаяся в 0 в единственной

<sup>3</sup> Условия [R] и [Z] можно также сформулировать в терминах характеристической функции  $f(z) = \mathbf{E} e^{izv}$  случайной величины  $v$ , а именно:

[R]  $|f(2\pi z)| < 1$  для всех  $z \neq 0$ ;

[Z]  $f(2\pi z) = 1$  для всех  $z \in \mathbb{Z}$  и  $|f(2\pi z)| < 1$  для всех  $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

точке  $\alpha = a$ , где

$$a = \frac{\mathbf{E} \zeta}{\mathbf{E} \tau} > 0. \quad (1.5)$$

В наших условиях функция  $D(\alpha)$  аналитична в некоторой окрестности точки минимума  $\alpha = a$  и при этом

$$D(a) = 0, \quad D'(a) = 0, \quad D''(a) = \frac{1}{\sigma^2},$$

где

$$\sigma^2 := \frac{\mathbf{E}(\zeta - a\tau)^2}{\mathbf{E} \tau}. \quad (1.6)$$

Приведем основное утверждение данной статьи.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия (1.2).

- I. Если случайная величина  $v$  удовлетворяет условию  $[\mathbf{Z}]$ , то для любой последовательности  $x = x_n \in \mathbb{Z}$ , такой что  $\alpha := x/n \rightarrow a$  при  $n \rightarrow \infty$ , имеет место асимптотическое соотношение

$$\mathbf{P}(w_{0,n} = x) \sim \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}} e^{-nD(\alpha)}. \quad (1.7)$$

Если при этом  $y_n := x - an = o(n^{2/3})$ , то справедливо

$$\mathbf{P}(w_{0,n} = x) \sim \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{y_n^2}{2n\sigma^2}}.$$

- II. Если случайная величина  $v$  удовлетворяет условию  $[\mathbf{R}]$ , то для некоторой последовательности положительных чисел  $\Delta_n^{(0)} = o(1)$  и для любой последовательности  $x = x_n \in \mathbb{R}$ , такой что  $\alpha := x/n \rightarrow a$  при  $n \rightarrow \infty$ , имеет место асимптотическое соотношение

$$\mathbf{P}(w_{0,n} \in [x, x + \Delta_n)) \sim \frac{\Delta_n}{\sigma\sqrt{2\pi n}} e^{-nD(\alpha)}, \quad (1.8)$$

в котором последовательность  $\Delta_n = o(1)$  удовлетворяет неравенству  $\Delta_n \geq \Delta_n^{(0)}$  (т.е. сходится к 0 достаточно медленно).

Если при этом  $y_n := x - an = o(n^{2/3})$ , то справедливо

$$\mathbf{P}(w_{0,n} \in [x, x + \Delta_n)) \sim \frac{\Delta_n}{\sigma\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{y_n^2}{2n\sigma^2}}.$$

*Замечание 1.* Можно несколько усилить утверждения теоремы 1, рассмотрев наряду с нормальными и умеренно большими отклонениями вида  $\alpha := x/n \rightarrow a$  большие отклонения вида  $|\alpha - a| \leq \delta$  при некотором (вообще говоря, малом)  $\delta > 0$ . При этом в правых частях соотношений (1.7), (1.8) множители  $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$  (константы) следует заменить на более сложные, зависящие от параметра  $\alpha = x/n$  функции. Однако для вычисления этих функций необходимы дополнительные довольно громоздкие построения, поэтому мы ограничились в теореме 1 рассмотрением нормальных и умеренно больших отклонений.

*Замечание 2.* Утверждение теоремы 1 формулируется в терминах функции отклонений  $D(\alpha)$ , строящейся по распределению случайного вектора  $(\tau, \zeta)$ , которое задается неявно и зависит от двух параметров  $c_1$  и  $c_2$ , выбираемых произвольно из неко-

того интервала (см. лемму 1). Однако в теореме 3 мы докажем, что результаты теоремы 1 не зависят от того, какими эти константы выбраны.

Асимптотические свойства последовательности  $w_{0,n}$  при стремлении  $n \rightarrow \infty$  изучались ранее в работах [5,6,9,10]. В работе [9] рассмотрен случай, когда  $\mathbf{P}(v > 0) = 1$  и доказаны закон больших чисел и центральная предельная теорема при условии конечности третьего момента случайной величины  $v$ , а также получены другие предельные теоремы при отсутствии этого условия. Центральная предельная теорема для случая, когда случайная величина  $v$  может иметь произвольный знак, доказана в работе [10]. В более ранних работах [5,6] изучались модели с весами вида (1.3). Отметим также работу [11], в которой изучаются асимптотики длины *минимального* пути из 0 в  $n$  при  $n \rightarrow \infty$  для случая, когда веса постоянны, но вероятность существования ребра зависит от расстояния между вершинами и убывает к нулю при его возрастании.

Оставшаяся часть статьи включает три параграфа: в §§ 2, 3 мы доказываем основную теорему по схеме, изложенной выше, а в § 4 приводим один вспомогательный результат.

## § 2. Построение регенерирующей последовательности, изучение ее свойств

В этом параграфе мы предложим конструкцию, позволяющую задать п.н. бесконечное случайное множество вершин  $\{\Gamma_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  (называемых нами в дальнейшем *стержневыми вершинами* – см. определение 3 ниже), где  $\dots < \Gamma_{-2} < \Gamma_{-1} < 0 \leq \Gamma_0 < \Gamma_1 < \dots$ , обладающих следующими свойствами:

1. Последовательность двумерных векторов

$$(\Gamma_n - \Gamma_{n-1}, w_{\Gamma_{n-1}, \Gamma_n}), \quad n \neq 0, \quad (2.1)$$

состоит из независимых и одинаково распределенных элементов, которые в совокупности не зависят от  $(\Gamma_{-1}, \Gamma_0, w_{\Gamma_{-1}, 0}, w_{0, \Gamma_0})$ . Используя язык случайных точечных процессов, можно сказать, что последовательность пар  $\{(\Gamma_n, w_{\Gamma_{n-1}, \Gamma_n})\}$  образует стационарный в дискретном времени маркированный точечный процесс с марками  $\{w_{\Gamma_{n-1}, \Gamma_n}\}$ , определяющий стационарный о.п.в.

2. При некотором  $C > 0$  все четыре экспоненциальных момента

$$\mathbf{E} \exp(C\Gamma_0), \quad \mathbf{E} \exp(C(\Gamma_1 - \Gamma_0)), \quad \mathbf{E} \exp(Cw_{0, \Gamma_0}), \quad \mathbf{E} \exp(Cw_{\Gamma_0, \Gamma_1}) \quad (2.2)$$

конечны. При этом для  $C_1 = C/2$  с необходимостью конечны и моменты

$$\mathbf{E} \exp(C_1(\Gamma_0 + w_{0, \Gamma_0})) \quad \text{и} \quad \mathbf{E} \exp(C_1(\Gamma_1 - \Gamma_0 + w_{\Gamma_0, \Gamma_1})). \quad (2.3)$$

3. При любых  $0 \leq m \leq n$ , если  $\Gamma_m \leq n$ , то

$$w_{0,n} = w_{0, \Gamma_0} + w_{\Gamma_0, \Gamma_1} + \dots + w_{\Gamma_{m-1}, \Gamma_m} + w_{\Gamma_m, n} \quad (2.4)$$

(напомним, что мы полагаем  $w_{j,j} = 0$  при любом  $j \in \mathbb{Z}$ ).

Приведем также ряд вспомогательных утверждений. Мы будем частично использовать схему доказательства из работы [9], где рассматривались веса, принимающие только положительные значения либо значение  $-\infty$ , и изучались вопросы существования первых и вторых степенных моментов у величин  $\Gamma_0$  и  $w_{0, \Gamma_0}$ .

**2.1. Построение осевых и стержневых вершин.** Мы последовательно введем в рассмотрение четыре случайных подмножества множества вершин  $\mathbb{Z}$ : множество осевых вершин  $\mathcal{S}$ , осевых-плюс  $\mathcal{S}^+$ , стержневых  $\mathcal{R}$  и стержневых-плюс  $\mathcal{R}^+$ .

**Определение 1.** Назовем вершину  $x \in \mathbb{Z}$  *осевой*, если она связана путями конечного веса с каждой из других вершин, т.е. для любых  $j < x$  и  $k > x$  выполнены

неравенства  $w_{j,x} > -\infty$  и  $w_{x,k} > -\infty$ . Обозначим через  $\mathcal{S}$  случайное множество осевых точек.

Если  $p = \mathbf{P}(v > -\infty) = 1$ , то любая точка  $x \in \mathbb{Z}$  является осевой. Если  $p$  – любое число из интервала  $(0, 1)$ , то, как следует из лемм 5–7 работы [6], верны следующие пять утверждений.

1. Вероятность того, что вершина  $x$  является осевой, строго положительна и одна и та же при всех  $x \in \mathbb{Z}$ .
2. Последовательность событий  $\{x \in \mathcal{S}\}$ ,  $x = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ , является стационарной эргодической, и поэтому с вероятностью единица существует почти наверное бесконечно много осевых вершин  $\{t_i\}$ .
3. Последовательность  $\{t_i\}$  (где  $\dots t_{-2} < t_{-1} < 0 \leq t_0 < t_1 < \dots$ ) образует стационарный процесс восстановления (в дискретном времени), и в частности, длительности интервалов между соседними точками  $\{t_i - t_{i-1}, i \in \mathbb{Z}, i \neq 0\}$  являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами и не зависят от пары случайных величин  $(t_{-1}, t_0)$ , а эти величины зависят друг от друга, и  $t_0$  имеет то же распределение, что и  $|t_{-1}| - 1$ . При этом  $\mathbf{P}(t_{-1} = -i) = \mathbf{P}(t_1 - t_0 \geq i) / \mathbf{E}(t_1 - t_0)$ ,  $i = 1, 2, \dots$
4. При некотором  $C > 0$

$$\mathbf{E} e^{Ct_0} < \infty, \quad \text{и следовательно,} \quad \mathbf{E} e^{C(t_1 - t_0)} < \infty. \quad (2.5)$$

5. Для любых  $j < k$  обозначим через

$$L_{j,k} = \max_{\pi \in \Pi_{j,k}} L(\pi) \quad (\text{где максимум по пустому множеству равен } -\infty)$$

максимальную длину пути среди всех путей из  $\Pi_{j,k}$ . Тогда при каждом  $n > 0$ , если  $L_{0,n} > 0$ , то любой путь длины  $L_{0,n}$  из 0 в  $n$  должен проходить через все промежуточные осевые точки (если таковые имеются). А именно пусть  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_m \leq n < t_{m+1}$  при некотором  $m \geq 0$ . Тогда любой путь максимальной длины из 0 в  $n$ , принадлежащий множеству  $\Pi_{0,n}$ , должен проходить через каждую из вершин  $t_0, \dots, t_m$ . При этом с необходимостью все значения  $L_{t_0, t_1}, \dots, L_{t_{m-1}, t_m}$  строго положительны и

$$L_{0,n} = L_{0,t_0} + L_{t_0,t_1} + \dots + L_{t_{m-1}, t_m} + L_{t_m, n}.$$

Наряду с введенным в §1 классом путей  $\Pi_{j,k}$ , использующих только ребра с конечными весами, введем также множество путей  $\Pi_{j,k}^+$  из  $j$  в  $k$ , использующих только ребра с положительными весами (т.е.  $v_e > 0$  для всех  $e \in \pi$ , если  $\pi \in \Pi_{j,k}^+$ ), и положим

$$w_{j,k}^+ := \max_{\pi \in \Pi_{j,k}^+} w(\pi).$$

**Определение 2.** Назовем вершину  $x \in \mathbb{Z}$  *осевой-плюс*, если она связана с каждой из других вершин путями, использующими только ребра положительного веса, т.е. для любых  $j < x$  и  $k > x$  найдутся путь  $\pi$  из  $j$  в  $x$  и путь  $\tilde{\pi}$  из  $x$  в  $k$ , такие что  $v_e > 0$  при всех  $e \in \pi$  и всех  $e \in \tilde{\pi}$  и, в частности, выполнены неравенства  $w_{j,x}^+ > 0$  и  $w_{x,k}^+ > 0$ . Обозначим через  $\mathcal{S}^+ = \{t_i^+\}$  множество осевых-плюс точек.

Отметим, что так как мы предполагаем, что  $p^+ > 0$ , то результаты работы [6] применимы и к множеству  $\mathcal{S}^+$ , и в частности, (2.5) остается справедливым при замене  $\{t_i\}$  на  $\{t_i^+\}$ .

Теперь мы определим множества  $\mathcal{R}$  *стержневых* и  $\mathcal{R}^+$  *стержневых-плюс* вершин. Пусть  $c_1 \geq c_2 > 0$  – фиксированные числа. Для  $x \in \mathbb{Z}$  определим следующие

события:

$$A_x^r(c_1) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{w_{x,x+i} \geq c_1 i\},$$

$$A_x^0(c_2) = \bigcap_{j,i=1}^{\infty} \{v_{x-j,x+i} < c_2(j+i)\},$$

$$A_x^l(c_1) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{w_{x-j,x} \geq c_1 j\}.$$

Здесь событие  $A_x^r(c_1)$  означает, что вершина  $x$  соединена путями конечного веса со всеми вершинами, находящимися справа от нее, и более того, все соответствующие максимальные веса путей строго положительны и растут по крайней мере линейно (со скоростью не меньшей  $c_1$ ) с ростом расстояния от вершины  $x$ . Аналогично, событие  $A_x^l(c_1)$  означает, что вершина  $x$  соединена путями конечного веса со всеми вершинами, находящимися слева от нее, и более того, все соответствующие максимальные веса путей строго положительны и растут по крайней мере линейно с ростом расстояния от вершины  $x$ . В частности, если происходят оба события  $A_x^r(c_1)$  и  $A_x^l(c_1)$ , то вершина  $x$  является с необходимостью осевой, и к тому же  $w_{x-j,x+i} \geq c_1(j+i)$  при всех  $j, i \geq 0$ . А если к тому же происходит и событие  $A_x^0(c_2)$ , то так как  $c_2 \leq c_1$ , то с необходимостью при любых  $j, i \geq 0$  любой путь максимального веса из вершины  $x-j$  в вершину  $x+i$  обязан проходить через вершину  $x$ .

**Определение 3.** Назовем вершину  $x$  *стержневой*, если происходят все три события  $A_x^l(c_2)$ ,  $A_x^0(c_1)$  и  $A_x^r(c_2)$ , и пусть  $\mathcal{R} = \{\Gamma_i\}$  – случайное множество стержневых вершин.

Так как события  $\{x \in \mathcal{R}\}$  образуют стационарную эргодическую последовательность, то выполнен “закон нуля или единицы”: либо с вероятностью единица множество  $\mathcal{R}$  бесконечно, либо с вероятностью единица пусто. Предположим, что это множество бесконечно на некотором элементарном исходе. Тогда его элементы можно упорядочить:

$$\dots < \Gamma_{-1} < 0 \leq \Gamma_0 < \Gamma_1 < \dots,$$

и имеет место представление (2.4). Именно это свойство помогает нам в изучении асимптотики последовательности  $w_{0,n}$  при стремлении  $n$  к бесконечности.

Введем по аналогии события

$$A_x^{r+}(c_1) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{w_{x,x+i}^+ \geq c_1 i\},$$

$$A_x^{0+}(c_2) \equiv A_x^0(c_2) = \bigcap_{j,i=1}^{\infty} \{v_{x-j,x+i} < c_2(j+i)\},$$

$$A_x^{l+}(c_1) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{w_{x-j,x}^+ \geq c_1 j\}.$$

Здесь событие  $A_x^{r+}(c_1)$  означает, что вершина  $x$  соединена путями, использующими только ребра с положительными весами, со всеми вершинами, находящимися справа от нее, и более того, все соответствующие максимальные веса путей строго положительны и растут по крайней мере линейно с ростом расстояния от вершины  $x$ . Аналогично, событие  $A_x^{l+}(c_1)$  означает, что вершина  $x$  соединена путями, использующими только ребра с положительными весами, со всеми вершинами, находящимися

слева от нее, и более того, все соответствующие максимальные веса путей строго положительны и растут по крайней мере линейно с ростом расстояния от вершины  $x$ . С необходимостью  $A_x^{l+}(c_1) \subseteq A_x^l(c_1)$  и  $A_x^{r+}(c_1) \subseteq A_x^r(c_1)$  при любом  $c_1 > 0$ .

**Определение 4.** Назовем вершину  $x$  *стержневой-плюс*, если происходит событие  $A_x^{l+}(c_1) \cap A_x^{0+}(c_2) \cap A_x^{r+}(c_1)$ , и обозначим через  $\mathcal{R}^+$  множество всех стержневых-плюс вершин. Это множество также либо п.н. бесконечно, либо п.н. пусто.

Отметим, что имеют место соотношения

$$\mathcal{R}^+ \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{S} \quad \text{и} \quad \mathcal{R}^+ \subseteq \mathcal{S}^+ \subseteq \mathcal{S}. \quad (2.6)$$

Кроме этого, множества  $\mathcal{R}$  и  $\mathcal{R}^+$  монотонно возрастают с ростом  $c_2$  и убыванием  $c_1$ .

**2.2. Регенирующая структура и существование показательных моментов.** Для формулировки следующего утверждения нам понадобится распределение случайной величины  $v^+$ , заданное в (1.1). Пусть  $\text{ess inf } v^+ = \inf\{t > 0 : \mathbf{P}(v^+ < t) > 0\}$  и  $V = \mathbf{E} \min_{t_0^+ \leq i < j \leq t_1^+} v_{i,j}^+$ . Ясно, что  $\text{ess inf } v^+ < V$ , если распределение случайной величины  $v^+$  невырождено. Положим  $\gamma^+ = \frac{1}{\mathbf{E}(t_1^+ - t_0^+)}$ . Из лемм 5–7 работы [6] вытекает следующее утверждение.

*Лемма 1.* Пусть выполнено условие (1.2). Тогда если

$$\gamma^+ \text{ess inf } v^+ < c_2 \leq c_1 < \gamma^+ V, \quad (2.7)$$

то для любого  $x \in \mathbb{Z}$  выполнено неравенство  $\mathbf{P}(A_x^{l+}(c_1) \cap A_x^0(c_2) \cap A_x^{r+}(c_1)) > 0$  и множество  $\mathcal{R}^+$  бесконечно с вероятностью 1. Следовательно, и множество  $\mathcal{R}$  также бесконечно с вероятностью 1.

*Замечание 3.* В работе [6] стержневые точки вводились при  $c_1 = c_2$  и соответствующие утверждения формулировались только в этом случае. Однако их доказательства не претерпевают никаких изменений (кроме небольших изменений в обозначениях) при выполнении более общих условий (2.7).

Определим циклы

$$C_k^+ := \left( \Gamma_k^+ - \Gamma_{k-1}^+ ; \left\{ v_{\Gamma_{k-1}^+ + j, \Gamma_{k-1}^+ + i}^+, 0 \leq j < i \leq \Gamma_k^+ - \Gamma_{k-1}^+ \right\} \right), \quad k \in \mathbb{Z},$$

и

$$C_k := \left( \Gamma_k - \Gamma_{k-1}; \left\{ v_{\Gamma_{k-1} + j, \Gamma_{k-1} + i}, 0 \leq j < i \leq \Gamma_k - \Gamma_{k-1} \right\} \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Имеет место следующая

*Лемма 2.* При выполнении условий (1.2) и (2.7) справедливы следующие два утверждения:

- (I) Случайные элементы  $\{C_k^+, k \in \mathbb{Z}\}$  независимы в совокупности, причем элементы  $\{C_k^+, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$  одинаково распределены. Процесс  $\left( \Gamma_k^+, w_{\Gamma_{k-1}^+, \Gamma_k^+}^+ \right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , является стационарным маркированным точечным процессом в дискретном времени, порождающим стационарный о.п.в., т.е. его первые координаты  $\Gamma_k^+$  образуют стационарный точечный процесс с соответствующими метками  $w_{\Gamma_{k-1}^+, \Gamma_k^+}^+$ .
- (II) Утверждение (I) остается верным для циклов  $C_k$  при естественной замене  $\Gamma_k^+$  на  $\Gamma_k$  и  $w_{\Gamma_{k-1}^+, \Gamma_k^+}^+$  на  $w_{\Gamma_{k-1}, \Gamma_k}$ .

Отметим, что утверждение (I) является прямым следствием леммы 3.8 работы [9] и что схемы доказательств утверждений (I) и (II) идентичны.

Докажем теперь первое из основных утверждений этого параграфа.

Лемма 3. Пусть выполнены условия (1.2) и (2.7). Тогда найдется константа  $C > 0$ , такая что

$$\mathbf{E} e^{C\Gamma_0^+} < \infty, \quad \text{и следовательно,} \quad \mathbf{E} e^{C(\Gamma_1^+ - \Gamma_0^+)} < \infty. \quad (2.8)$$

Так как последовательность  $\{\Gamma_n^+\}$  является подпоследовательностью последовательности  $\{\Gamma_n\}$ , то утверждение (2.8) остается верным и при замене  $\Gamma_0^+$  и  $\Gamma_1^+$  на, соответственно,  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$ , т.е. при некотором  $C > 0$  конечны два первых математических ожидания в (2.2).

Доказательство. Мы позаимствуем из работы [9] ряд вспомогательных построений. Определим множество  $\mathcal{U} = \{x \in \mathbb{Z} : \mathbf{I}(A_x^+(c_1)) = 1\}$ . Нетрудно видеть, что  $\mathcal{R}^+ \subseteq \mathcal{U}$ . Обозначим через  $\dots, \rho_{-1}, \rho_0, \rho_1, \dots$  возрастающую последовательность точек множества  $\mathcal{U}$ , где  $\rho_0$  – его наименьший неотрицательный элемент. Зададим новую последовательность циклов: при  $k \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{D}_k = (\rho_k - \rho_{k-1}; \{v_{\rho_{k-1}+j, \rho_{k-1}+i}^+, 0 \leq j < i \leq \rho_k - \rho_{k-1}\}).$$

Из леммы 3.10 работы [9] вытекает следующее утверждение.

Лемма 4. Пусть выполнены условия (1.2) и (2.7). Тогда циклы  $(\mathcal{D}_k, k \in \mathbb{Z})$  независимы, причем  $(\mathcal{D}_k, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$  одинаково распределены, а последовательность  $\rho_n, n \in \mathbb{Z}$ , образует стационарный точечный процесс, порождающий стационарный процесс восстановления.

Утверждение леммы 4 несложно пояснить “на пальцах”. Введем для этого при  $d > 0$  события

$$A_{x,d}^+(c_1) := \bigcap_{j=1}^d \{w_{x-j,x}^+ \geq c_1 j\}.$$

Отметим, что при любых целых  $k \geq 0$  и  $0 \leq s_0 < s_1 < \dots < s_k$  событие  $\{\rho_0 = s_0, \dots, \rho_k = s_k\}$  однозначно определяется набором случайных величин  $\mathcal{B}_{s_k} := \{v_{i,j}, i < j \leq s_k\}$ , и на этом событии равенство  $\rho_{k+1} - \rho_k = m$  выполняется тогда и только тогда, когда  $m = \min\{d > 0 : \mathbf{I}(A_{s_k, s_k+d}^+(c_1)) = 1\}$ , что определяется случайными величинами  $\mathcal{B}_{s_k, s_k+m} := \{v_{i,j}^+, s_k \leq i < j \leq m\}$ . Нетрудно видеть, что семейства  $\mathcal{B}_{s_k}$  и  $\mathcal{B}_{s_k, s_k+m}$  не зависят друг от друга и к тому же распределение величин  $\mathcal{B}_{s_k, s_k+m}$  не зависит от  $k$  и  $s_k$ , – это, по сути, и влечет утверждение леммы 4.

Введем также при  $d > 0$  вспомогательные события

$$A_{x,d}^+(c_1) := \bigcap_{i=1}^d \{w_{x,x+i}^+ \geq c_1 i\},$$

$$A_{x,d}^{0+}(c_2) := \bigcap_{1 \leq i \leq d, j \geq 1} \{v_{x-j, x+i} < c_2(j+i)\}.$$

Положим  $\mu = \inf\{d > 0 : \mathbf{I}(A_{0,d}^{0+}(c_2) \cap A_{0,d}^+(c_1)) = 0\}$ . Отметим, что  $\mathbf{P}(\mu = \infty) = \mathbf{P}(A_{0,d}^{0+}(c_2) \cap A_{0,d}^+(c_1)) > 0$ . Зададим теперь последовательно случайные величины  $\sigma_0, \mu_0, \dots, \sigma_K, \mu_K$ , где  $K = \min\{k \geq 0 : \mu_k = \infty\}$ . Положим

$$\sigma_0 = \rho_0, \quad \mu_0 = \inf\{d > 0 : \mathbf{I}(A_{\sigma_0, \sigma_0+d}^{0+}(c_2) \cap A_{\sigma_0, \sigma_0+d}^+(c_1)) = 0\},$$

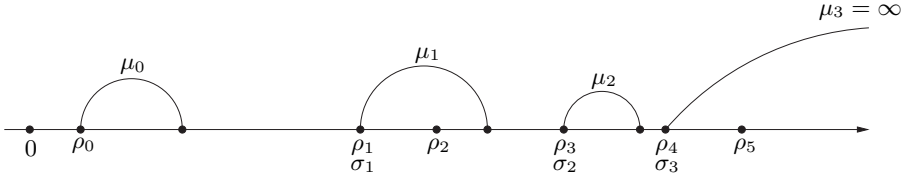


Рис. 1. Процесс построения последовательности  $\sigma_k$ . Изображен случай, когда  $K = 3$ ; в изображенном случае  $\sigma_3 = \rho_4$  – момент регенерации, который является оценкой сверху для  $\Gamma_0$

и при  $k = 0, 1, \dots$ , если  $\mu_k < \infty$ , то

$$\sigma_{k+1} = \inf\{x \in \mathcal{U} : x \geq \sigma_k + \mu_k\},$$

$$\mu_{k+1} = \inf\left\{d > 0 : \mathbf{I}\left(A_{\sigma_k, \sigma_k+d}^{0+}(c_2) \cap A_{\sigma_k, \sigma_k+d}^{r+}(c_1)\right) = 0\right\}.$$

Более наглядно процесс построения этой последовательности приведен на рис. 1.

Как следует из построения,  $\sigma_k \in \mathcal{U}$  при  $k \leq K$  и  $\sigma_K \in \mathcal{R}^+$ , и значит,  $\sigma_K \geq \Gamma_0^+$  п.н. Кроме того, случайные величины  $\{\mu_k\}$  образуют последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин, имеющих то же распределение, что и  $\mu$ . Поэтому случайная величина  $K$  имеет геометрическое распределение с параметром  $q$ , и в частности, ее показательные моменты  $\mathbf{E} e^{CK} < \infty$  конечны при  $C < -1/\ln q$ . Кроме этого, при любом  $k \geq 1$  при условии  $\{K = k\}$  случайные величины  $\mu_0, \dots, \mu_{k-1}$  условно независимы и распределены как  $\mathbf{P}(\mu_0 \in \cdot | \mu_0 < \infty)$ .

В силу того, что  $\rho_k - \rho_{k-1} \geq 1$ ,

$$\sigma_K \leq \rho_M = \rho_0 + \sum_{k=1}^M (\rho_k - \rho_{k-1}), \quad (2.9)$$

где  $M := \sum_{j=0}^{K-1} \mu_j$ .

Поэтому если мы покажем, что выражение в правой части (2.9) имеет конечный показательный момент, то конечный показательный момент будет иметь также и  $\sigma_K$ , и из этого будет следовать утверждение леммы 3. С учетом леммы 9 из § 4 и элементарного неравенства  $e^{x+y} < e^{2x} + e^{2y}$  при  $x, y \geq 0$  нам достаточно показать, что, во-первых, случайная величина  $\rho_1 - \rho_0$  имеет конечный показательный момент (поэтому конечный показательный момент будет существовать и у  $\rho_0$ ), и во-вторых, вероятности  $\mathbf{P}(\mu_0 = m | \mu_0 < \infty)$  убывают экспоненциально быстро по  $m$ .

В силу независимости  $\rho_0$  и  $\rho_1 - \rho_0$  и в силу того, что при каждом целом  $n > 0$  при выполнении события  $A_0^{l+}(c_1)$  события  $A_n^{l+}(c_1)$  и  $A_{n,n}^{l+}(c_1)$  либо происходят, либо не происходят одновременно, мы получаем, что распределения случайных величин  $\rho_1 - \rho_0$  и  $\nu := \min\{n : \mathbf{I}(A_{n,n}^{l+}(c_1)) = 1\}$  совпадают:

$$\mathbf{P}(\rho_1 - \rho_0 = m) = \mathbf{P}(\rho_1 - \rho_0 = m | \rho_0 = 0) = \mathbf{P}(\nu = m | \rho_0 = 0) = \mathbf{P}(\nu = m),$$

$$m = 1, 2, \dots,$$

а существование показательного момента у случайной величины  $\nu$  следует из предложения 3.12 работы [9].

Далее,

$$\mathbf{P}(\mu = d) = \mathbf{P}\left(\left(A_{0,d}^{0+}(c_2) \cap A_{0,d}^{r+}(c_1)\right)^c \cap \left(A_{0,d-1}^{0+}(c_2) \cap A_{0,d-1}^{r+}(c_1)\right)\right) \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \mathbf{P}\left((A_{0,d}^{0+}(c_2))^c \cap A_{0,d-1}^{0+}(c_2)\right) + \mathbf{P}\left((A_{0,d}^{r+}(c_1))^c \cap A_{0,d-1}^{r+}(c_1)\right) \leq \\
&\leq \mathbf{P}\left(\sup_{j \geq 1} (v_{-j,d}^+ - c_2 j) > c_2 d\right) + \mathbf{P}(w_{0,d}^+ < c_1 d) \leq \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(v > c_2(d+j)) + \mathbf{P}(w_{0,d}^+ < c_1 d).
\end{aligned}$$

В последнем выражении сумма вероятностей  $\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(v > c_2(d+j))$  убывает по  $d$  экспоненциально быстро в силу (1.2). Чтобы показать, что последняя вероятность также убывает экспоненциально быстро, мы найдем  $\varepsilon > 0$ , такое что  $\tilde{c} := c_1(1 + 3\varepsilon)$  также удовлетворяет (2.7). Положим  $\eta(d) = \max\{k : t_k^+ \leq d\}$  (где максимум по пустому множеству полагается равным  $-\infty$ ). Тогда при  $r = \gamma^+(1 + \varepsilon)^{-1}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(w_{0,d}^+ < c_1 d) &\leq \mathbf{P}(t_0^+ > d) + \mathbf{P}\left(w_{t_0^+, t_{\eta(d)}^+}^+ < c_1 d, t_0^+ \leq d\right) \leq \\
&\leq \mathbf{P}(t_0^+ > d) + \mathbf{P}(\eta(d) < [rd]) + \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{[rd]} w_{t_{i-1}^+, t_i^+}^+ < c_1 d\right) \leq \\
&\leq \mathbf{P}(t_0^+ > d) + \mathbf{P}\left(\sum_1^{[rd]} (t_i^+ - t_{i-1}^+) > d\right) + \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{[rd]} w_{t_{i-1}^+, t_i^+}^+ < c_1 d\right),
\end{aligned}$$

где  $[rd]$  – целая часть числа  $rd$ . В последней строке все слагаемые убывают экспоненциально быстро по  $d$ : первое слагаемое потому, что  $t_0^+$  имеет конечный показательный момент, а второе слагаемое – потому, что  $t_i^+ - t_{i-1}^+$  имеют конечный показательный момент,  $\mathbf{E}(t_1^+ - t_0^+)r < 1$ , и следовательно, по экспоненциальному неравенству Чебышева при  $h > 0$

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{[rd]} (t_i^+ - t_{i-1}^+) > d\right) \leq \left(\mathbf{E} \exp(h(t_1^+ - t_0^+))\right)^r e^{-h} d,$$

где правая часть неравенства убывает экспоненциально быстро по  $d$ , если взять  $h$  достаточно малым. Наконец, третье слагаемое убывает экспоненциально быстро, потому что, как хорошо известно, для любой последовательности независимых одинаково распределенных положительных случайных величин  $X, X_1, X_2, \dots$  с конечным средним  $\mathbf{E}X$  и для любого  $\delta \in (0, 1)$  вероятности  $\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i < (1 - \delta)n \mathbf{E}X\right)$  убывают экспоненциально быстро с ростом  $n$ . В нашем случае  $n = [rd] \geq rd - 1$ ,  $X_i = w_{t_{i-1}^+, t_i^+}^0$ ,  $\mathbf{E}w_{t_0^+, t_1^+}^+ \geq V$  и  $c_1 d \leq c_1(1+n)(1+\varepsilon)/\gamma^+ \leq c_1(1+2\varepsilon)nV/\gamma^+ < (1-\delta)nV$  при достаточно больших  $n$ , где  $\delta = \varepsilon/(1 + 3\varepsilon)$ .

Значит, вероятности  $\mathbf{P}(\mu = d)$ , а следовательно, и  $\mathbf{P}(\mu = d | \mu < \infty)$  убывают экспоненциально быстро с ростом  $d$ . Это завершает доказательство леммы 3.  $\blacktriangle$

Приведем теперь доказательство конечности последних двух математических ожиданий в (2.2).

*Лемма 5. Пусть выполнены условия (1.2) и (2.7). Тогда  $\mathbf{E} \exp(Cw_{0,\Gamma_0})$ , и следовательно,  $\mathbf{E} \exp(Cw_{\Gamma_0,\Gamma_1})$  конечны при некотором  $C > 0$ .*

*Доказательство.* Выберем произвольный путь  $\pi$  из вершины 0 в вершину  $\Gamma_0$  и предположим, что он включает в себя  $d + 1$  вершину,  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_d = \Gamma_0$ .

Так как  $\sum_{k=1}^d (x_k - x_{k-1}) = \Gamma_0$ , то

$$\begin{aligned} w_{0,\Gamma_0} &= \sum_{k=1}^d v_{x_{k-1}, x_k} \leq \Gamma_0 + \sum_{k=1}^d (v_{x_{k-1}, x_k} - (x_k - x_{k-1}))^+ \leq \\ &\leq \Gamma_0 + \sum_{0 \leq x < y \leq \Gamma_0} (v_{x,y} - (y - x))^+ \leq \Gamma_0 + \sum_{x=0}^{\Gamma_0-1} Z_x, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где  $\{Z_x := \max_{y>x} (v_{x,y} - (y - x))^+\}_{x \in \mathbb{Z}}$  – последовательность независимых и одинаково распределенных неотрицательных случайных величин. В силу условия (1.2) хвост распределения

$$\mathbf{P}(Z_0 > m) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(v > m + k)$$

убывает экспоненциально быстро с ростом  $m$ . Для завершения доказательства осталось опять воспользоваться элементарным неравенством  $e^{x+y} < e^{2x} + e^{2y}$  и леммой 9.  $\blacktriangle$

Мы завершим §2 коротким доказательством одного простого факта, который понадобится нам в следующем параграфе.

*Лемма 6.* Пусть  $p \in (0, 1]$ , и пусть выполнены условия (1.2) и (2.7). Тогда  $\mathbf{P}(\Gamma_1 - \Gamma_0 = 1, w_{\Gamma_0, \Gamma_1} \geq y) > 0$  для  $y \in (c_2, \text{ess sup } v^+)$ .

*Доказательство.* Следующие два события совпадают:

$$\begin{aligned} \{\Gamma_0 = 0, \Gamma_1 - \Gamma_0 = 1, w_{\Gamma_0, \Gamma_1} \geq y\} &= \\ = A_0^l(c_1) \cap A_{0,1}^{0+}(c_2) \cap \{v_{0,1} \geq y\} \cap B_{1,1}(c_2) \cap A_1^r(c_1), \end{aligned} \quad (2.11)$$

где

$$B_{1,1}(c_2) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{v_{0,1+j} < c_2(1+j)\},$$

при этом все пять событий в правой части представления (2.11) взаимно независимы и каждое имеет положительную вероятность.  $\blacktriangle$

### § 3. Изучение обобщенного процесса восстановления и доказательство основной теоремы

В этом параграфе мы изучим о.п.в., порожденный стационарным маркированным точечным процессом  $(\Gamma_k, w_{\Gamma_{k-1}, \Gamma_k})$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Используя результаты предыдущего параграфа и работы [7], а также классическую теорему Стоуна [12], мы покажем, что построенный для произвольных фиксированных допустимых констант  $c_1, c_2$  о.п.в. и последовательность  $w_{0,n}$  имеют одинаковую точную асимптотику в области нормальных и умеренно больших отклонений (результат теоремы 1). При этом, чтобы убрать “недоскок” о.п.в., будет произведено преобразование исходной меры. Утверждение о том, что характеристики  $\alpha$ ,  $\sigma^2$  и  $D(\alpha)$  в теореме 1 на самом деле не зависят от выбора констант  $c_1$  и  $c_2$ , завершает нашу выборку.

Далее нам будет удобно использовать краткие обозначения, унифицированные с обозначениями работы [7]:

$$(\tau_k, \mathbf{u}_k) := (\tau_k, (u_{k,1}, \dots, u_{k,\tau_k})), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} (\tau_1, (u_{1,1}, \dots, u_{1,\tau_1})) &:= (\Gamma_0, (w_{0,1}, \dots, w_{0,\Gamma_0})), \\ (\tau_k, (u_{k,1}, \dots, u_{k,\tau_k})) &:= (\Gamma_{k-1} - \Gamma_{k-2}, (w_{\Gamma_{k-2}, \Gamma_{k-2}+1}, \dots, w_{\Gamma_{k-2}, \Gamma_{k-1}})) \quad \text{при } k \geq 2. \end{aligned}$$

Как было показано в § 2, векторы  $(\tau_k, \mathbf{u}_k)$ ,  $k \geq 2$ , имеют одинаковое распределение, и мы будем использовать обозначение

$$(\tau, \mathbf{u}) := (\tau, (u_1, \dots, u_\tau)) \quad (3.2)$$

для любого вектора с этим распределением. Положим также  $\zeta = u_\tau$  и  $\zeta_k = u_{\tau_k}$ ,  $k \geq 1$ . Тогда, в частности,  $\{(\tau_k, \zeta_k)\}$  – последовательность независимых случайных векторов, имеющих при  $k \geq 2$  общее распределение с вектором  $(\tau, \zeta)$ .

Перечислим утверждения из § 2 (основанные на леммах 2, 3, 5 и 6), которые нам сейчас потребуются. Пусть  $p \in (0, 1]$  и  $c_1, c_2$  удовлетворяют условию (2.7).

$S_I$ . Последовательность (3.1) является последовательностью независимых векторов; при  $k \geq 2$  векторы  $(\tau_k, \mathbf{u}_k)$  имеют общее распределение.

$S_{II}$ . Случайные величины  $u_{1,\tau_1}$  и  $u_1, \dots, u_\tau$  положительны, и при этом

$$\max\{u_1, \dots, u_{\tau-1}\} \leq u_\tau.$$

$S_{III}$ . Найдется  $C > 0$ , такое что

$$\mathbf{E} e^{C\tau_1} < \infty, \quad \mathbf{E} e^{C\tau} < \infty, \quad \mathbf{E} e^{Cu_{1,\tau_1}} < \infty, \quad \mathbf{E} e^{Cu_\tau} < \infty.$$

$S_{IV}$ . Вероятность  $\mathbf{P}(\tau = 1, u_\tau \geq y)$  строго положительна при  $y \in (c_2, \text{ess sup } v^+)$ .

Обозначим

$$(\tau, \zeta) := (\tau, u_\tau), \quad (\tau_k, \zeta_k) := (\tau_k, u_{k,\tau_k}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Тогда последовательность  $\{(\tau_k, \zeta_k)\}$  – это последовательность независимых случайных векторов, имеющих при  $k \geq 2$  общее распределение с вектором  $(\tau, \zeta)$ .

Из перечисленных утверждений вытекает

**Следствие 1.** Пусть выполнены условия (1.2) и (2.7). Тогда справедливы следующие утверждения.

(I) Если для случайной величины  $v$  выполнено условие  $[\mathbf{Z}]$ , то для случайного вектора  $(\tau, \zeta)$  выполнено условие

$[\mathbf{ZZ}]$  Распределение случайного вектора является арифметическим и сосредоточено на решетке с шагом 1 по каждой из координат.

(II) Если для случайной величины  $v$  выполнено условие  $[\mathbf{R}]$ , то для случайного вектора  $(\tau, \zeta)$  выполнено условие

$[\mathbf{ZR}]$  Маргинальное распределение первой координаты вектора является арифметическим с шагом 1, а маргинальное распределение второй координаты – нерешетчатым<sup>4</sup>.

Перейдем теперь к доказательству основного результата.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим последовательность  $\{(\tau_k, \zeta_k)\}_{k=1}^\infty$  независимых случайных векторов, имеющих при  $k \geq 2$  общее распределение с вектором  $(\tau, \zeta)$  (см. формулу (3.2) и обозначения после нее). Введем последовательности

<sup>4</sup> В терминах характеристической функции  $f(z, l) := \mathbf{E} e^{iz\tau + il\zeta}$  случайного вектора  $(\tau, \zeta)$  эти два условия имеют следующий вид:

$[\mathbf{ZZ}]$   $f(2\pi z, 2\pi t) = 1$  для любого  $(z, t) \in \mathbb{Z}^2$ ,  $|f(z, t)| < 1$  для любого  $(z, t) \notin \mathbb{Z}^2$ .

$[\mathbf{ZR}]$   $f(2\pi z, 0) = 1$  для любого  $z \in \mathbb{Z}$ ,  $|f(2\pi z, 0)| < 1$  для любого  $z \notin \mathbb{Z}$  и  $|f(0, t)| < 1$  для любого  $t \neq 0$ .

частичных сумм

$$T_n := \sum_{k=0}^n \tau_k, \quad Z_n := \sum_{k=0}^n \zeta_k, \quad n \geq 0,$$

где  $(\tau_0, \zeta_0) := (0, 0)$ . Пусть

$$\eta_+(n) := \min\{k \geq 1 : T_k > n\}, \quad \nu_+(n) := \max\{k \geq 0 : T_k \leq n\} = \eta_+(n) - 1,$$

$$\gamma_+(n) := n - \nu_+(n).$$

Определим о.п.в. (так называемый “первый о.п.в.”), положив

$$Z_+(n) := \sum_{k=0}^{\nu_+(n)} \zeta_k.$$

Поясним, что здесь мы используем обозначение  $Z_+(n)$  с нижним индексом  $+$  исключительно для того, чтобы согласовать наши обозначения с обозначениями работы [7], в которой наряду с обозначениями  $Z_+(n)$ ,  $\nu_+(n)$ ,  $\gamma_+(n)$  использовались обозначения  $Z(n)$ ,  $\nu(n)$ ,  $\gamma(n)$ , т.е. этот индекс никак не связан с  $w_{j,m}^+$ .

Используя введенные обозначения, получаем представление

$$w_{0,n} = Z_+(n) + w_{n-\gamma_+(n),n} = Z_{\nu_+(n)} + w_{\nu_+(n),n}.$$

Рассмотрим случайный вектор (случайной длины), заданный формулой (3.2):

$$(\tau, (u_1, u_2, \dots, u_\tau)),$$

координаты которого по определению удовлетворяют соотношениям

$$\tau \geq 1, \quad \min_{1 \leq i \leq \tau} u_i \geq c_1 > 0, \quad \max_{1 \leq i \leq \tau} u_i \leq u_\tau.$$

Определим далее случайный вектор  $(\tau^*, \zeta^*)$ , принимающий значения  $(i, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ ,  $i \geq 0$ ,  $y \geq 0$ , задав его распределение (и считая  $u_0 = 0$  с вероятностью 1)

$$\mathbf{P}(\tau^* = i, \zeta^* \in dy) := \frac{1}{Q} \mathbf{P}(\tau \geq i + 1, u_i \in dy),$$

где

$$Q := \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \mathbf{P}(\tau \geq i + 1, u_i \in dy) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{P}(\tau \geq i + 1) = \mathbf{E}\tau.$$

Из условия  $S_{\text{III}}$  следует, что найдется константа  $C > 0$ , такая что

$$\mathbf{E} e^{C\tau^*} < \infty, \quad \mathbf{E} e^{C\zeta^*} < \infty.$$

Наряду с последовательностью  $\{(\tau_k, \zeta_k)\}$ , которая определяет о.п.в.  $Z_+(n)$  и функционалы  $\nu_+(n)$ ,  $\gamma_+(n)$ , определим последовательность  $\{(\tau_k^*, \zeta_k^*)\}$ , положив

$$(\tau_1^*, \zeta_1^*) := (\tau_1, \zeta_1) + (\tau^*, \zeta^*), \quad (\tau_k^*, \zeta_k^*) := (\tau_k, \zeta_k) \quad \text{при } k \geq 2,$$

где вектор  $(\tau^*, \zeta^*)$  и последовательность  $\{(\tau_k, \zeta_k)\}$  независимы. Новая последовательность  $\{(\tau_k^*, \zeta_k^*)\}$  определяет новый о.п.в.  $Z_+^*(n)$  и новые функционалы  $\nu_+^*(n)$  и  $\gamma_+^*(n)$ .

Лемма 7. Пусть выполнены условия  $S_I$ – $S_{IV}$ . Тогда для любых целых  $n \geq 2$  и любых вещественных  $x \geq c_1$  и  $\Delta > 0$  справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(Z_+(n) + w_{n-\gamma_+(n),n} \in [x, x + \Delta), \tau_1 \leq n) = \\ & = Q \mathbf{P}(Z_+^*(n) \in [x, x + \Delta), \gamma_+^*(n) = 0). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} P_n & := \mathbf{P}(Z_+(n) + w_{n-\gamma_+(n),n} \in [x, x + \Delta), \tau_1 \leq n) = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(T_k = n, Z_k \in [x, x + \Delta)) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \int_0^{\infty} \mathbf{P}(T_k = n - i, Z_k + y \in [x, x + \Delta), \tau_{k+1} \geq i + 1, u_{k+1,i} \in dy). \end{aligned}$$

Поскольку событие  $\mathbf{P}(\tau \geq 1, u_0 = 0) = 1$  и векторы  $(\tau_{k+1}, u_{k+1,i})$  и  $(T_k, Z_k)$  независимы, то

$$\begin{aligned} P_n & = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(T_k = n, Z_k \in [x, x + \Delta)) \mathbf{P}(\tau \geq 1, u_0 = 0) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \int_0^{\infty} \mathbf{P}(T_k = n - i, Z_k + y \in [x, x + \Delta)) \mathbf{P}(\tau \geq i + 1, u_i \in dy) = \\ & = Q \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^n \int_0^{\infty} \mathbf{P}(T_k = n - i, Z_k + y \in [x, x + \Delta)) \frac{1}{Q} \mathbf{P}(\tau \geq i + 1, u_i \in dy) = \\ & = Q \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^n \int_0^{\infty} \mathbf{P}(T_k = n - i, Z_k + y \in [x, x + \Delta)) \mathbf{P}(\tau^* = i, \zeta^* \in dy) = \\ & = Q \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(T_k^* = n, Z_k^* \in [x, x + \Delta)) = \\ & = Q \mathbf{P}(Z_+^*(n) \in [x, x + \Delta), \gamma_+^*(n) = 0, \nu_+^*(n) \geq 1) = \\ & = Q \mathbf{P}(Z_+^*(n) \in [x, x + \Delta), \gamma_+^*(n) = 0) - \\ & - Q \mathbf{P}(Z_+^*(n) \in [x, x + \Delta), \gamma_+^*(n) = 0, \nu_+^*(n) = 0) = \\ & = Q \mathbf{P}(Z_+^*(n) \in [x, x + \Delta), \gamma_+^*(n) = 0), \end{aligned}$$

где последнее равенство является следствием того, что при  $x > 0$  выполняется

$$\mathbf{P}(Z_+^*(n) \in [x, x + \Delta), \nu_+^*(n) = 0) = 0. \quad \blacktriangle$$

В частном случае, когда  $v$  имеет арифметическое распределение, полагая  $\Delta = 1$  в лемме 7 и выбирая  $x \in \mathbb{Z}$ , получаем в качестве следствия леммы 7 следующее утверждение.

Лемма 8. Пусть выполнены условия  $S_I$ – $S_{IV}$ , и пусть  $v$  удовлетворяет условию  $[Z]$ . Тогда при любых целых  $n \geq 2$  и  $x \geq 1$  справедливо соотношение

$$\mathbf{P}(Z_+(n) + w_{n-\gamma_+(n),n} = x, \tau_1 \leq n) = Q \mathbf{P}(Z_+^*(n) = x, \gamma_+^*(n) = 0). \quad (3.5)$$

Продолжим доказательство теоремы 1.

I. Обратимся сначала к арифметическому случаю. Для того чтобы воспользоваться результатами работы [7], нам придется наряду с о.п.в.  $Z_+(n)$  определить о.п.в.  $Z(n)$  (основные утверждения работы [7] произведены для о.п.в.  $Z(n)$ ).

Пусть для  $n \geq 1$

$$\nu(n) := \max\{k \geq 1 : T_k < n\}, \quad \gamma(n) := n - \nu(n).$$

Тогда

$$Z(n) := Z_{\nu(n)}.$$

Легко видеть (считая, что процессы  $Z(n)$ ,  $Z_+(n)$  построены на одном вероятностном пространстве по общей последовательности  $\{(\tau_k, \zeta_k)\}$ ), что для  $n \geq 1$

$$\nu_+(n) = \nu(n+1), \quad Z_+(n) = Z(n+1), \quad \gamma_+(n) = \gamma(n) - 1. \quad (3.6)$$

В частности, величина недоскока  $\gamma(n)$  принимает значения  $\{1, 2, \dots\}$ , а величина недоскока  $\gamma_+(n)$  – значения  $\{0, 1, 2, \dots\}$ . О.п.в., построенный по последовательности  $\{(\tau_k^*, \zeta_k^*)\}$ , и соответствующие ему функционалы обозначим теми же символами, снабдив их верхним индексом \*, например:

$$\nu^*(n), \quad \nu_+^*(n), \quad Z^*(n), \quad Z_+^*(n), \quad \gamma^*(n), \quad \gamma_+^*(n) \text{ и т.д.}$$

В силу формул (3.6) из утверждений теоремы 2.1, следствия 2.1 и теоремы 2.1\* работы [7] без труда выводим следующие два соотношения в области нормальных и умеренно больших уклонений, когда  $x \in \mathbb{N}$ ,  $x - na = o(n)$ : при  $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z(n) = x) &\sim \mathbf{P}(Z_+(n) = x) \sim \mathbf{P}(Z^*(n) = x) \sim \mathbf{P}(Z_+^*(n) = x) \sim \\ &\sim \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}} e^{-nD(\frac{x}{n})}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{P}(Z_+^*(n) = x, \gamma_+^*(n) = 0) \sim \mathbf{P}(Z_+(n) = x, \gamma_+(n) = 0) \sim \frac{1}{E\tau} \mathbf{P}(Z_+^*(n) = x). \quad (3.8)$$

Соотношения (3.7) показывают, что в наших условиях для локальных теорем в области нормальных и умеренно больших уклонений “нивелируются” различия между процессами  $Z(n)$  и  $Z_+(n)$ , равно как и различия, связанные с неоднородностью.

Привлекая далее утверждение леммы 8 и замечая, что  $Q = E\tau$  и для некоторого  $h > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_+(n) + w_{n-\gamma_+(n),n} = x) &= \\ &= \mathbf{P}(Z_+(n) + w_{n-\gamma_+(n),n} = x, \tau_1 > n) + \mathbf{P}(Z_+(n) + w_{n-\gamma_+(n),n} = x, \tau_1 \leq n) = \\ &= \mathbf{P}(Z_+(n) + w_{n-\gamma_+(n),n} = x, \tau_1 \leq n) + O(e^{-nh}), \end{aligned}$$

получаем из (3.7) и (3.8) утверждение части I теоремы 1:

$$\mathbf{P}(Z_+(n) + w_{n-\gamma_+(n),n} = x) \sim \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}} e^{-nD(\frac{x}{n})}.$$

II. В основе доказательства части II лежит интегро-локальная теорема в областях нормальных, умеренно больших и больших уклонений, полученная в работе Стоуна [12]. Приведем формулировку этой теоремы в удобных для нас обозначениях. Функцию уклонений для случайного вектора  $(\tau, \zeta)$  определим как

$$I(\theta, \alpha) := \sup_{\lambda, \mu} \{\lambda\theta + \mu\alpha - A(\lambda, \mu)\}.$$

Определитель матрицы  $\Lambda''(\theta, \alpha)$  вторых производных функции уклонений  $\Lambda(\theta, \alpha)$  обозначим через  $|\Lambda''(\theta, \alpha)|$ .

Теорема 2 [12]. Пусть распределение вектора  $(\tau_1, \zeta_1)$  совпадает с распределением  $(\tau, \zeta)$  и выполнены условия  $S_{III}$  и  $[ZR]$ . Тогда для некоторого  $\delta > 0$  и некоторой последовательности  $\Delta^{(0)} := \Delta_n^{(0)} > 0$ , сходящейся к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , для любых  $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ , таких что  $|\theta - a_\tau| + |\alpha - a_\zeta| \leq \delta$ , где  $(\theta, \alpha) := \left(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}\right)$ , имеет место соотношение

$$\mathbf{P}(T_n = x, Z_n \in [y, y + \Delta]) = \frac{\Delta \sqrt{|\Lambda''(\theta, \alpha)|}}{2\pi n} \exp\{-n\Lambda(\theta, \alpha)\}(1 + o(1)),$$

в котором  $\Delta := \Delta_n \geq \Delta_n^{(0)}$ ,  $\Delta_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , а остаточный член  $o(n) = \varepsilon_n(x, y)$  удовлетворяет соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \\ |\theta - a_\tau| + |\alpha - a_\zeta| \leq \delta}} |\varepsilon_n(x, y)| = 0.$$

Используя утверждения  $S_I$ – $S_{IV}$  и повторяя все этапы доказательства теорем 2.1, 2.1\* и следствия 2.1 работы [7], можно получить аналоги этих утверждений, в которых символы  $= x$  заменены на  $\in [x, x + \Delta)$ , а в правых частях появляется множитель  $\Delta$ . Далее доказательство части II полностью повторяет соответствующее доказательство части I.  $\blacktriangle$

Покажем теперь, что справедлива

Теорема 3. Характеристики  $a$ ,  $\sigma$  и  $D(\alpha)$ , в терминах которых приведены результаты теоремы 1, не зависят от выбора констант  $c_1$  и  $c_2$ .

Доказательство. Мы доказали, что локальные теоремы в областях нормальных и умеренно больших уклонений для процессов  $w_{0,n}$  и  $Z_+(n)$  выглядят одинаково, и формулировка этого утверждения содержит характеристики  $a$ ,  $\sigma$  и  $D(\alpha)$ , которые однозначно определяются по вектору  $(\tau, \zeta)$  (см. (1.4)–(1.6)), “управляющему” о.п.в.  $Z_+(n)$ . А поскольку в построении вектора  $(\tau, \zeta)$  заняты произвольные константы  $c_1$  и  $c_2$ , удовлетворяющие условию (2.7), то естественно ожидать, что и характеристики  $a$ ,  $\sigma$  и  $D(\alpha)$  будут зависеть от этих констант. Покажем, что это не так, т.е. покажем, что для любых других констант  $\tilde{c}_2 \leq \tilde{c}_1$ , удовлетворяющих (2.7), характеристики  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{\sigma}$  и  $\tilde{D}(\alpha)$ , построенные для вектора  $(\tilde{\tau}, \tilde{\zeta})$ , совпадают с характеристиками  $a$ ,  $\sigma$  и  $D(\alpha)$ .

В силу уже доказанного для процессов  $w_{0,n}$  и  $\tilde{Z}_+(n)$  справедлива такая же локальная теорема, в формулировке которой используются характеристики  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{\sigma}$  и  $\tilde{D}(\alpha)$ . Таким образом, для процесса  $w_{0,n}$  справедливы две локальные теоремы, формулировки которых отличаются только характеристиками  $a, \sigma, D(\alpha)$  и  $\tilde{a}, \tilde{\sigma}, \tilde{D}(\alpha)$ . Из локальных теорем в области нормальных уклонений очевидным образом вытекают соответствующие законы больших чисел: для любого  $\varepsilon > 0$  справедливы соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|w_{0,n} - an| \leq n\varepsilon) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|w_{0,n} - \tilde{a}n| \leq n\varepsilon) = 1.$$

Следовательно, с необходимостью  $\tilde{a} = a$ .

Далее, если переписать формулировки двух локальных теорем с учетом равенства  $\tilde{a} = a$ , то придем к соотношению

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} e^{-nD(\frac{x}{n})} \sim \frac{1}{\tilde{\sigma}\sqrt{n}} e^{-n\tilde{D}(\frac{x}{n})},$$

которое выполняется для любых  $x = x_n \in \mathbb{Z}$  в зоне  $\left| \frac{x}{n} - a \right| = o(1)$ . Тогда с необходимостью из этого соотношения вытекают равенство констант  $\sigma = \tilde{\sigma}$  и равенство аналитических (в некоторой окрестности точки  $\alpha = a$ ) функций  $\tilde{D}(\alpha) = D(\alpha)$ . Таким образом, мы доказали, что характеристики  $a$ ,  $\sigma$  и  $D(\alpha)$  не зависят от выбора констант, по которым построен о.п.в.  $\blacktriangle$

#### § 4. Вспомогательный результат

Мы используем в доказательствах приводимый ниже результат, который не претендует на новизну. Так как его доказательство очень коротко, то мы решили привести и его.

*Лемма 9. Пусть  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , – последовательность частичных сумм независимых и одинаково распределенных неотрицательных случайных величин  $\{X_i\}$ , и пусть  $N$  – неотрицательная целочисленная случайная величина. Предположим, что*

$$\mathbf{E} e^{CX_1} < \infty, \quad \mathbf{E} e^{CN} < \infty \quad \text{для некоторого } C > 0.$$

*Тогда найдется константа  $b > 0$ , такая что*

$$\mathbf{E} e^{bS_N} < \infty.$$

*Доказательство.* Возьмем любое  $a > \mathbf{E} X_1$ . Тогда

$$S_N = \sum_{i=1}^N (X_i - a) + aN \leq \sup_{n \geq 0} (S_n - na) + aN \equiv R + aN, \quad (4.1)$$

где мы считаем  $S_0 = 0$ . В силу (4.1) и элементарного неравенства  $e^{x+y} \leq e^{2x} + e^{2y}$  при любом  $b > 0$  будем иметь

$$e^{bS_N} \leq e^{2bR} + e^{2baN} \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{2b(S_n - na)} + e^{2baN},$$

и следовательно,

$$\mathbf{E} e^{bS_N} \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{E} e^{2b(X_1 - a)})^n + \mathbf{E} e^{2baN}. \quad (4.2)$$

Так как  $a > \mathbf{E} X_1$ , то найдется достаточно малое  $b > 0$ , такое что  $2b \max(1, a) < C$  и  $\mathbf{E} e^{2b(X_1 - a)} < 1$ . При таком  $b$  и правая часть в неравенстве (4.2) оказывается конечным числом.  $\blacktriangle$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cohen J.E., Briand F., Newman C.M.* Community Food Webs: Data and Theory. Berlin: Springer, 1990.
2. *Newman C.M.* Chain Lengths in Certain Random Directed Graphs // Random Structures Algorithms. 1992. V. 3. № 3. P. 243–253. <https://doi.org/10.1002/rsa.3240030304>
3. *Gelenbe E., Nelson R., Philips T., Tantawi A.* An Approximation of the Processing Time for a Random Graph Model of Parallel Computation // Proc. 1986 ACM Fall Joint Computer Conf. (ACM'86). Los Alamitos, CA: IEEE Computer Society Press, 1986. P. 691–697. <https://dl.acm.org/doi/proceedings/10.5555/324493>

4. *Isopi M., Newman C.M.* Speed of Parallel Processing for Random Task Graphs // *Comm. Pure Appl. Math.* 1994. V. 47. № 3. P. 361–376. <https://doi.org/10.1002/cpa.3160470307>
5. *Foss S., Konstantopoulos T.* Extended Renovation Theory and Limit Theorems for Stochastic Ordered Graphs // *Markov Process. Related Fields.* 2003. V. 9. № 3. P. 413–468.
6. *Denisov D., Foss S., Konstantopoulos T.* Limit Theorems for a Random Directed Slab Graph // *Ann. Appl. Probab.* 2012. V. 22. № 2. P. 702–733. <https://doi.org/10.1214/11-AAP783>
7. *Могульский А.А., Прокопенко Е.И.* Локальные предельные теоремы для арифметических многомерных обобщенных процессов восстановления при выполнении условия Крамера // *Матем. тр.* 2019. Т. 22. № 2. С. 106–133. <https://doi.org/10.33048/mattrudy.2019.22.207>
8. *Могульский А.А., Прокопенко Е.И.* Функция уклонений и базовая функция для многомерного обобщенного процесса восстановления // *Сиб. электрон. матем. изв.* 2019. Т. 16. С. 1449–1463. <https://doi.org/10.33048/semi.2019.19.100>
9. *Foss S., Martin J.B., Schmidt P.* Long-Range Last-Passage Percolation on the Line // *Ann. Appl. Probab.* 2014. V. 24. № 1. P. 198–234. <https://doi.org/10.1214/13-AAP920>
10. *Foss S., Konstantopoulos T.* Limiting Properties of Random Graph Models with Vertex and Edge Weights // *J. Stat. Phys.* 2018. V. 173. № 3–4. P. 626–643. <https://doi.org/10.1007/s10955-018-2080-3>
11. *Тесемников П.И.* Об асимптотике кратчайшего расстояния между крайними вершинами в обобщенном графе Барака–Эрдеша // *Сиб. электрон. матем. изв.* 2018. Т. 15. С. 1556–1565. <https://doi.org/10.33048/semi.2018.15.129>
12. *Stone C.* On Local and Ratio Limit Theorems // *Proc. 5th Berkeley Symp. on Mathematical Statistics and Probability.* Univ. of California, Berkeley, 1965–66. Berkeley, CA: Univ. of California Press, 1967. V. 2: Contributions to Probability Theory. Part 2. P. 217–224. <https://doi.org/10.1525/9780520325340-017>

*Константопулос Такис*

Отделение математических наук, Ливерпульский университет,  
Ливерпуль, Великобритания  
[T.konstantopoulos@liverpool.ac.uk](mailto:T.konstantopoulos@liverpool.ac.uk)

*Логачёв Артём Васильевич*

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск  
Новосибирский государственный университет  
Сибирский государственный университет геосистем  
и технологий, Новосибирск  
[omboldovskaya@mail.ru](mailto:omboldovskaya@mail.ru)

*Могульский Анатолий Альфредович*

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск  
Новосибирский государственный университет  
[mogul@math.nsc.ru](mailto:mogul@math.nsc.ru)

*Фосс Сергей Георгиевич*

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск  
Новосибирский государственный университет  
Школа математических наук, Университет Хериот-Ватта,  
Эдинбург, Великобритания  
[sergueiorfoss25@gmail.com](mailto:sergueiorfoss25@gmail.com)

Поступила в редакцию  
19.11.2020

После доработки  
01.02.2021

Принята к публикации  
08.02.2021