УДК 511.42

В. И. Берник, Ф. Гётце

Распределение действительных алгебраических чисел произвольной степени в коротких интервалах

Рассматриваются действительные алгебраические числа α степени $\deg\alpha = n$ и высоты $H = H(\alpha)$. Существуют интервалы $I \subset \mathbb{R}$ длины $|I|$, внутри которых нет действительных алгебраических чисел α произвольной степени с условием $H(\alpha) < \frac{1}{2}|I|^{-1}$. Доказано, что всегда можно найти некоторую постоянную $c_1 = c_1(n)$ такую, что если натуральное число $Q > c_1|I|^{-1}$, то внутри интервала I содержится не менее $c_2(n)Q^{n+1}|I|$ действительных алгебраических чисел α, $\deg\alpha = n$, $H(\alpha) \leqslant Q$. Отсюда получено решение проблемы Бюжо о регулярности множества действительных алгебраических чисел в коротких интервалах.

Библиография: 12 наименований.

Ключевые слова: алгебраические числа, регулярные системы.

DOI: 10.4213/im8215

§ 1. Введение

Пусть задано натуральное число $Q > 1$ и некоторый промежуток $I \subset \mathbb{R}$ длиной $|I| = Q^{-\mu}$, $\mu > 0$. Многие задачи теории диофантовых приближений зависят от решения следующей задачи [1], [2]. При каком соотношении между Q и $|I|$ можно утверждать, что внутри интервала I находятся действительные алгебраические числа α степени $n \geqslant 1$ и высоты $H(\alpha) \leqslant Q$? Здесь $H(\alpha)$ – высота алгебраического числа α, равная модулю максимального коэффициента минимального многочлена алгебраического числа α.

В дальнейшем удобно считать, что Q – достаточно большое натуральное число, а числа $c_1 = c_1(n), c_2, \dots$ зависят только от степени многочлена и не зависят от его высоты и Q.

Теорема 1. *Для любого Q существует промежуток I длиной $|I| = \frac{1}{2}Q^{-1}$, внутри которого нет действительных алгебраических чисел α степени $\deg\alpha = n \geqslant 1$ и высоты $H(\alpha) \leqslant Q$.*

Доказательство. Рассмотрим интервал $I_1 = \left(0, \frac{1}{2}Q^{-1}\right)$ длиной $|I_1| = \frac{1}{2}Q^{-1}$. Очевидно, на этом интервале нет рациональных чисел $\frac{p}{q}$ при $q \leqslant Q$. Пусть действительное алгебраическое число $\alpha \in I_1$, $\deg\alpha = n \geqslant 2$, является корнем многочлена $P(x) = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0$ с целыми коэффициентами. Если $a_0 = 0$, то из $P(\alpha) = 0$ получаем $\alpha(a_n\alpha^{n-1} + \dots + a_1) = 0$ и α – корень многочлена $P_1(x) = a_nx^{n-1} + \dots + a_1$ степени, не превосходящей $n-1$, что противоречит условию. Поэтому $a_0 \neq 0$ и из равенства

$$-a_0 = \alpha(a_n\alpha^{n-1} + \dots + a_2\alpha + a_1),$$

© В. И. Берник, Ф. Гётце, 2015

получаем противоречие, так как, с одной стороны, $|a_0| \geqslant 1$, а с другой – имеем

$$|\alpha|\,|a_n\alpha^{n-1} + \dots + a_2\alpha + a_1| \leqslant \frac{1}{2}Q^{-1}\cdot Q\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) < 1.$$

Теорема доказана.

Интервалы типа I_1 можно строить около любой рациональной точки $\frac{p}{q}$ с малым знаменателем q. При этом с ростом q постоянная c_1 в соотношении $|I_1| = c_1Q^{-1}$ будет убывать (см. также [3]). Мы покажем, как это можно доказать, в следующей теореме.

Всюду в настоящей работе будем предполагать для упрощения вычислений, что $J_i \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Теорема 2. *При $c_2 < q^{-n}c_3(n)$ и достаточно малой величине $c_3(n)$ внутри интервала I_2 с центром в точке $\frac{p}{q}$ и длиной $|I_2| = c_2Q^{-1}$ нет действительных алгебраических чисел степени $n \geqslant 2$.*

Доказательство. Рациональное число $\frac{p}{q} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ является корнем многочлена первой степени $P_1(x) = qx - p$, $H(P_1) = q$. Предположим, что в интервале J длиной $2c_4q^{-n}Q^{-1}$ с центром в точке $\frac{p}{q}$ лежит действительный корень α_1 неприводимого многочлена $P_2(x)$, $\deg P_2 = n \geqslant 2$, $H(P_2) \leqslant Q$, со старшим коэффициентом $a_n > 0$. Остальные корни многочлена $P_2(x)$ обозначим $\alpha_2, \dots, \alpha_n$. Тогда

$$\left|\alpha_1 - \frac{p}{q}\right| < c_4q^{-n}Q^{-1}, \qquad |R(P_1, P_2)| \geqslant 1, \tag{1}$$

где $R(P_1, P_2)$ – результант многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$.

Из (1) следует

$$1 \leqslant |R(P_1, P_2)| = a_nq^n\prod_{i=1}^{n}\left|\frac{p}{q} - \alpha_i\right| \leqslant a_nc_4Q^{-1}\prod_{i=2}^{n}\left|\alpha_i - \frac{p}{q}\right|. \tag{2}$$

По лемме 5 (см. § 2) последний сомножитель $\prod_{i=2}^{n}\left|\alpha_i - \frac{p}{q}\right|$ в (2) оценивается величиной $c_5Ha_n^{-1}$. Поэтому (2) можно переписать в виде

$$1 \leqslant c_4c_5HQ^{-1} < c_4c_5. \tag{3}$$

Неравенство (3) противоречиво при $c_4 < c_5^{-1}$. Теорема доказана.

Неожиданным является тот факт, что при достаточно большой вычислимой по n величине $c_6 = c_6(n)$ и $|I_2| > c_6Q^{-1}$ внутри интервала I_2 находится не менее $c_7Q^{n+1}|I_2|$ действительных алгебраических чисел α, $\deg\alpha = n$, $H(\alpha) \leqslant Q$. Более того, из таких α можно составить регулярную систему точек. Следует отметить, что действительные алгебраические числа степени n при их естественном упорядочении по высоте распределены неравномерно [3].

Определение 1. Пусть Γ – счетное множество действительных чисел и $N\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ – положительная функция. Пару (Γ, N) назовем *регулярной системой*, если существует постоянная $c_8 = c_8(\Gamma, N) > 0$ такая, что для любого интервала $I \subset \mathbb{R}$ найдется достаточно большое число $T_0 = T_0(\Gamma, N, I) > 0$ такое, что при любом $T > T_0$ можно выбрать числа $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_t \in \Gamma \cap I$ с условиями:

1) $N(\gamma_i) \leqslant T$, $1 \leqslant i \leqslant t$;
2) $|\gamma_i - \gamma_j| > T^{-1}$, $1 \leqslant i < j \leqslant t$;
3) $t > c_8|I|T$.

Нетрудно показать, что множество рациональных чисел $\frac{p}{q}$, $(p,q)=1$, с функцией $N\left(\frac{p}{q}\right) = q^2$ образует регулярную систему. Действительные алгебраические числа α с функцией $N(\alpha) = (H(\alpha))^{n+1}(\log H(\alpha))^{-v}$ также образуют регулярную систему. Это доказали А. Бейкер и В. Шмидт [4] при $v = 3n(n+1)$. В этой работе впервые было введено понятие регулярной системы. В. И. Берник [5] доказал регулярность множества действительных алгебраических чисел при $v = 2$, а В. В. Бересневич [6] – при $v = 0$. Данные результаты позволили найти точную оценку снизу размерности Хаусдорфа множества действительных чисел с заданной мерой трансцендентности [4] и доказать аналог метрической теоремы Хинчина в случае расходимости для многочленов произвольной степени [6]. В случае сходимости аналог теоремы Хинчина был получен несколько ранее в работе [5]. Я. Бюжо в работе [7] указал зависимость величины $T_0(\Gamma, N, I)$ от длины интервала I. При $n = 1$ эта зависимость имеет вид

$$T_0(\mathbb{Q}, N, I) = 10^4|I|^{-2}\big(\log(100|I|^{-1})\big)^2,$$

а при $n = 2$ из результата Бересневича [6] следует

$$T_0(\mathbb{A}_2, N, I) = 72^3|I|^{-3}\big(\log(72|I|^{-1})\big)^3,$$

где $\mathbb{A}_2$ – множество действительных алгебраических чисел второй степени.

В [7] отмечается, что при $n \geqslant 3$ зависимость $T_0(\Gamma, N, I)$ от $|I|$ неизвестна. В работах [8], [9] зависимость $T_0(\mathbb{A}_3, N, I)$ от $|I|$ была найдена для многочленов третьей степени.

В настоящей работе мы усиливаем результаты [6], [7] при $n = 1, 2$ и находим зависимость $T_0(\mathbb{A}_n, N, I)$ от $|I|$ при произвольных n для множества действительных алгебраических чисел $\mathbb{A}_n$ произвольной степени n. Тем самым решаем проблему Бюжо.

Далее, μB – мера Лебега измеримого множества $B \subset \mathbb{R}$. Для положительного целого числа $Q > 1$ введем множество

$$\mathcal{P}_n(Q) = \big\{P(x) \in \mathbb{Z}[x]\colon\ \deg P = n,\ H(P) \leqslant Q\big\}.$$

Теорема 3. *Множество действительных алгебраических чисел α степени $\deg\alpha = n$ с функцией $N(\alpha) = (H(\alpha))^{n+1}$ образует регулярную систему на интервале I при $T \geqslant T_0(\mathbb{A}_n, N, I) = c_9|I|^{-n-1}$.*

Доказательство теоремы 3 основывается на следующей теореме, связанной с теоремами 1, 2 и имеющей самостоятельный интерес.

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n(Q, \delta_0, I)$ – множество таких $x \in I$, для которых система неравенств*

$$|P(x)| < Q^{-n}, \quad |P'(x)| < \delta_0 Q, \qquad dQ < H(P) \leqslant Q, \quad d < 1, \tag{4}$$

имеет решение в полиномах $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$. Тогда при достаточно малой

величине $\delta_0 = \delta_0(n)$ *и достаточно большой величине* c_{10} *имеем*

$$\mu\mathcal{L}_n < \frac{1}{4}|I|$$

для всех интервалов I *с условием* $|I| > c_{10}Q^{-1}$.

В процессе доказательства теоремы 4 будут возникать множества $\mathcal{L}_{n,i}$ (их количество не превосходит $s = s(n)$), аналогичные $\mathcal{L}_n$, но с другим условием для $|P'(x)|$. Для каждого из них мы получим оценку $\mu\mathcal{L}_{n,i} < \frac{1}{4s}|I|$, откуда и будет следовать оценка для $\mu\mathcal{L}_n$.

Из теоремы 4 и известного факта разрешимости неравенства $|P(x)| < Q^{-n}$ в многочленах $P \in \mathcal{P}_n(Q)$ для всех $x \in I$ (это доказывается с помощью принципа ящиков Дирихле) следует, что на множестве $B_2 = I \setminus \mathcal{L}_n$ выполняется система неравенств

$$|P(x)| < Q^{-n}, \quad |P'(x)| \geqslant \delta_0 Q, \qquad \mu B_2 \geqslant \frac{3}{4}|I|. \tag{5}$$

Далее, в § 8, будет показано, что из (5) можно получить существование на I не менее $c_{11}Q^{n+1}|I|$ действительных алгебраических чисел степени n. Более того, из таких чисел можно построить на I регулярную систему.

Существует слабый аналог доказываемых здесь результатов. Мы сформулируем его в виде следующей теоремы.

Теорема 5. *Пусть заданы некоторое число* $Q > 1$ *и промежуток* $I \subset \mathbb{R}$. *В интервале* I *всегда найдется действительное алгебраическое число* α, $\deg\alpha = n$, $H(\alpha) \leqslant Q$, *если* $|I| > c(n)Q^{-1/n}$, *где* $c(n) > 0$ – *некоторая величина, зависящая только от* n.

Доказательство. Возьмем алгебраическое число $\alpha = \sqrt[n]{2}$. Заметим, что $\deg\alpha = n$ (например, по критерию Эйзенштейна). Пусть $q \in \mathbb{N}$. Любой промежуток I при условии $q > |I|^{-1}$ содержит алгебраические числа $\alpha_1 = \alpha + \frac{p_1}{q}$ с целыми p_1, а при

$$q > \frac{3}{2}|I|^{-1} \tag{6}$$

содержит алгебраические числа $\alpha_2 = \frac{\alpha p_2}{q}$ с целыми p_2. Число α_1 является корнем многочлена

$$P_1(x) = q^n\left(\left(x - \frac{p_1}{q}\right)^n - 2\right), \qquad P_1(x) \in \mathbb{Z}[x],$$

а число α_2 – корень многочлена

$$P_2(x) = p_2^n\left(\left(\frac{q}{p_2}x\right)^n - 2\right) = q^n x^n - 2p_2^n, \qquad P_2(x) \in \mathbb{Z}[x].$$

Теперь оценим высоты многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ и найдем $c(n)$ из неравенства (6). Покажем, что уже для небольших степеней n теорема мало пригодна. Чтобы выполнить явные вычисления, возьмем $I \subset [0,1]$. В этом случае многочлен $P_2(x)$ имеет высоту q^n, и поэтому $H(\alpha_2) \leqslant q^n$. Положим $Q = q^n$. Из неравенства $Q^{1/n} = q > \frac{3}{2}|I|$ получаем $Q > \left(\frac{3}{2}\right)^n|I|^{-n}$. Теорема утверждает, что на интервале I длиной $|I| = 10^{-3}$ обязательно найдется алгебраическое число α, $\deg\alpha = 100$, если $H(\alpha) \leqslant 10^{300}$. Производить какие-нибудь операции с многочленами, имеющими такие большие коэффициенты, практически невозможно. Мы доказываем более сильную теорему.

§ 2. Вспомогательные леммы

Для многочлена $P(x)$ с корнями $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ пусть

$$S(\alpha_i) = \Big\{x \in \mathbb{R}\colon |x - \alpha_i| = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} |x - \alpha_j|\Big\}.$$

Везде далее полагаем, что $i = 1$ и корни многочлена $P(x)$ упорядочены относительно α_1:

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \leqslant |\alpha_1 - \alpha_3| \leqslant \dots \leqslant |\alpha_1 - \alpha_n|. \tag{7}$$

Лемма 1. *Пусть $x \in S(\alpha_1)$. Тогда*

$$|x - \alpha_1| \leqslant n \frac{|P(x)|}{|P'(x)|}, \tag{8}$$

$$|x - \alpha_1| \leqslant 2^{n-1} \frac{|P(x)|}{|P'(\alpha_1)|}, \tag{9}$$

$$|x - \alpha_1| \leqslant \min_{2 \leqslant j \leqslant n} \left(2^{n-j} \frac{|P(x)|}{|P'(\alpha_1)|} |\alpha_1 - \alpha_2| \cdots |\alpha_1 - \alpha_j|\right)^{\frac{1}{j}}. \tag{10}$$

Доказательство. Неравенство (8) следует из тождества

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - \alpha_i},$$

а неравенства (9) и (10) доказаны в [10], [11].

Лемма 2. *Пусть I – некоторый промежуток, $A \subset \mathbb{R}$ – измеримое множество, $B \subset I$, $\mu B \geqslant \frac{1}{2}|I|$. Если для всех $x \in B$ выполняется неравенство*

$$|P(x)| < c_{12} Q^{-v}, \qquad v > 0,$$

то при некотором $c_{13} > c_{12}$ и всех $x \in I$ справедливо неравенство

$$|P(x)| < c_{13} Q^{-v}.$$

Доказательство см. в [11].

Лемма 3. *Пусть δ, K_0, η – действительные положительные числа, $P_1(x), P_2(x) \in \mathbb{Z}[x]$ – два многочлена степени $n \geqslant 1$ без общих корней, $\max(H(P_1), H(P_2)) < K$, где $K > K_0(\delta)$. Пусть $J \subset \mathbb{R}$, $|J| = K^{-\eta}$. Если при некотором $\tau > 0$ для всех $x \in J$ выполняется неравенство*

$$\max(|P_1(x)|, |P_2(x)|) < K^{-\tau},$$

то

$$\tau + 1 + 2\max(\tau + 1 - \eta, 0) < 2n + \delta. \tag{11}$$

Доказательство см. в [11].

Лемма 4. *Пусть $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ – приводимый многочлен, $P(x) = P_1(x)P_2(x)$, $\deg P = n \geqslant 2$. Тогда*

$$c_{14} H(P) < H(P_1)H(P_2) < c_{15} H(P), \tag{12}$$

где c_{14} и c_{15} – положительные постоянные, зависящие только от n.

Доказательство см. во многих работах, например в [10].

Лемма 5. *Пусть* $P(x)$ *– многочлен,* $\deg P = n$, *с корнями* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ *и старшим коэффициентом* a_n. *Тогда для любого набора различных корней* $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n$, $k \leqslant n$, *справедливо неравенство*

$$|\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_k}| < c_{16}\frac{H(P)}{|a_n|}. \tag{13}$$

Доказательство см. в [12].

Обозначим через $M_1 = M_1(Q, \delta_0, I)$ множество действительных чисел $x \in I$, для которых система неравенств

$$|P(x)| < Q^{-n}, \quad |P'(x)| < \delta_0 Q, \qquad |I| > c_{17}Q^{-1}$$

имеет хотя бы одно решение в многочленах $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$.

Пусть $M_2 = M_2(Q, \delta_0, I)$ – множество действительных чисел $x \in I$, для которых система неравенств

$$\begin{gathered} |P(x)| < c_{18}Q^{-n}, \quad |P'(x)| < c_{19}\delta_0 Q, \quad |I| > c_{20}Q^{-1}, \\ c_i > 1, \qquad i = 18, 19, 20, \end{gathered} \tag{14}$$

имеет хотя бы одно решение в многочленах $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$.

Лемма 6. *Если* $\mu M_1 < c_{21}(\delta_0)|I|$ *и* $c_{21}(\delta_0)$ *стремится к нулю при* $\delta_0 \to 0$, *то и* $\mu M_2 < c_{22}(\delta_0)|I|$, *где* $c_{22}(\delta_0) \to 0$ *при* $\delta_0 \to 0$.

Доказательство. Положим $Q_1 = c_{23}Q$, где $c_{23} < 1$ находится из уравнения $c_{23}^{-n}c_{18} = 1$. При такой замене система неравенств (14) примет вид

$$|P(x)| < Q_1^{-n}, \quad |P'(x)| < \delta_1 Q_1, \quad |I| > c_{20}c_{23}^{-1}Q_1^{-1}, \tag{15}$$

где $\delta_1 = c_{19}c_{23}^{-1}\delta_0$. Применим к системе (15) условие леммы 6 и получим, что множество решений этой системы имеет меру, не превосходящую $c_{24}\delta_0|I|$, и $c_{24}\delta_0 \to 0$ при $\delta_0 \to 0$. Однако система неравенств (15) совпадает с системой неравенств (14), если в (15) от Q_1 перейти к Q.

§ 3. Доказательство теоремы 4. Сведéние к многочленам первой степени

В неравенствах (4) заменим второе неравенство на

$$2n^{\frac{3}{2}}Q^{-\frac{n-1}{2}} < |P'(x)| < \delta_0 Q. \tag{16}$$

Покажем, как из (16) получить двухсторонние оценки для $|P'(\alpha_1)|$. По формуле Лагранжа

$$P'(x) = P'(\alpha_1) + P''(\xi_1)(x - \alpha_1), \qquad \xi_1 \in (x, \alpha_1). \tag{17}$$

Из оценок (16) и леммы 1 имеем

$$\begin{gathered} |x - \alpha_1| < nQ^{-n+\frac{n-1}{2}} \cdot 2^{-1}n^{-\frac{3}{2}} = 2^{-1}n^{-\frac{1}{2}}Q^{-\frac{n+1}{2}}, \\ |P''(\xi_1)(x - \alpha_1)| < 2n^2 Q \cdot 2^{-1}n^{-\frac{1}{2}}Q^{-\frac{n+1}{2}} = n^{\frac{3}{2}}Q^{-\frac{n-1}{2}}. \end{gathered}$$

При $|P'(\alpha_1)| < n^{\frac{3}{2}} Q^{-\frac{n-1}{2}}$ неравенство (17) противоречиво. Поэтому при условии (16) систему неравенств (4) заменяем на систему неравенств

$$|P(x)| < Q^{-n}, \qquad n^{\frac{3}{2}} Q^{-\frac{n-1}{2}} < |P'(\alpha_1)| < 2\delta_0 Q. \tag{18}$$

Обозначим множество решений системы неравенств (18) через $\sigma_0(P)$. После получения оценки $\mu\sigma_0(P)$ в § 5 мы рассмотрим систему неравенств

$$|P(x)| < Q^{-n}, \qquad |P'(x)| \leqslant 2n^{\frac{3}{2}} Q^{-\frac{n-1}{2}} \tag{19}$$

и для нее отдельно оценим меру решений.

Обозначим через $\mathcal{L}_{n,1}$ множество тех $x \in I$, для которых система неравенств

$$|P(x)| < Q^{-n}, \qquad Q^{\frac{5}{8}} < |P'(\alpha_1)| < 2\delta_0 Q \tag{20}$$

имеет хотя бы одно решение в полиномах $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$. Из леммы 1 следует, что множество решений системы (20) содержится в интервале

$$|x - \alpha_1| < 2^{n-1} Q^{-n} |P'(\alpha_1)|^{-1}, \tag{21}$$

который обозначим $\sigma(P)$.

Предложение 1. *Для достаточно малой величины δ_0 и достаточно большого числа Q справедлива оценка*

$$\mu\mathcal{L}_{n,1} < \frac{1}{4s}|I|.$$

Доказательство. Наряду с интервалом $\sigma(P)$ в (21) определим интервал

$$\sigma_1(P) := \bigl\{x \in I\colon |x - \alpha_1| < c_{25} Q^{-1} |P'(\alpha_1)|^{-1},\ c_{25} > 1\bigr\}. \tag{22}$$

Из (21) и (22) получаем

$$\mu\sigma(P) \leqslant 2^{n-1} c_{25}^{-1} Q^{-n+1} \mu\sigma_1(P). \tag{23}$$

Отметим, что для $Q > Q_0$ из (20) и (22) вытекает, что длина интервала $\sigma_1(P)$ меньше $|I|$. Разложим $P(x)$ в ряд Тэйлора на интервале $\sigma_1(P)$:

$$P(x) = P'(\alpha_1)(x - \alpha_1) + \frac{1}{2} P''(\xi_2)(x - \alpha_1)^2, \qquad \xi_2 \in (x, \alpha_1).$$

Используя (20) и (22), оценим каждое слагаемое в разложении. При $Q > Q_0$ будем иметь

$$|P(x)| < 2c_{25} Q^{-1}, \qquad x \in \sigma_1(P). \tag{24}$$

Зафиксируем вектор $\mathbf{b}_1 = (a_n, \dots, a_2)$, состоящий из коэффициентов многочлена $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$, и обозначим через $\mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b}_1)$ подкласс многочленов из $\mathcal{P}_n(Q)$ с одним и тем же вектором $\mathbf{b}_1$. Далее воспользуемся методом существенных и несущественных областей, который ввел В. Г. Спринджук [10].

Промежуток $\sigma_1(P_1)$, $P_1 \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b}_1)$, будем называть *существенным*, если для любого другого интервала $\sigma_1(P_2)$, $P_2 \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b}_1)$, выполняется неравенство

$$\mu\bigl(\sigma_1(P_1) \cap \sigma_1(P_2)\bigr) < \frac{1}{2}\mu\sigma_1(P_1). \tag{25}$$

Если же в подклассе $\mathcal{P}_n(Q,\mathbf{b}_1)$ найдется интервал $\sigma_1(P_2)$, $P_2\in\mathcal{P}_n(Q,\mathbf{b}_1)$, такой, что

$$\mu\bigl(\sigma_1(P_1)\cap\sigma_1(P_2)\bigr)\geqslant\frac{1}{2}\mu\sigma_1(P_1), \tag{26}$$

то промежуток $\sigma_1(P_1)$ будем называть *несущественным*.

Сначала рассмотрим существенные интервалы $\sigma_1(P)$. Более половины существенного интервала свободно от точек других интервалов (в смысле меры Лебега), поэтому

$$\sum_{P\in\mathcal{P}_n(Q,\mathbf{b}_1)}\mu\sigma_1(P)\leqslant 2|I|.$$

Используя последнее неравенство, а также (23) и $\#\mathbf{b}_1<(2Q+1)^{n-1}<2^nQ^{n-1}$ при $Q>n$, получаем при $Q>Q_0$

$$\sum_{\mathbf{b}_1}\sum_{P\in\mathcal{P}_n(Q,\mathbf{b}_1)}\mu\sigma(P)<2^nc_{25}^{-1}Q^{-n+1}\cdot 2^nQ^{n-1}|I|=2^{2n}c_{25}^{-1}|I|. \tag{27}$$

Рассмотрим несущественные интервалы $\sigma_1(P)$. Для многочленов $P_1(x)$, $P_2(x)\in\mathcal{P}_n(Q)$ на пересечении $\sigma_1(P_1,P_2)=\sigma_1(P_1)\cap\sigma_1(P_2)$, мера которого не менее $\frac{1}{2}\mu\sigma_1(P_1)$, выполняется неравенство (24). Поскольку у многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ совпадают коэффициенты $a_n,\dots,a_2$, многочлен $R(x)=P_2(x)-P_1(x)$ является линейным и удовлетворяет условиям

$$|R(x)|=|ax-b|<4c_{25}Q^{-1},\qquad \max(|a|,|b|)<2Q,\quad x\in\sigma_1(P_1,P_2). \tag{28}$$

В (28) можно полагать $a>0$. Оценим сверху коэффициенты a и b по модулю точнее, чем в (28). По формуле Лагранжа имеем

$$P'(x)=P'(\alpha_1)+P''(\xi_3)(x-\alpha_1),\qquad \xi_3\in(x,\alpha_1).$$

Используя оценку (20), при $Q>Q_0$ получим

$$|P''(\xi_3)(x-\alpha_1)|<2n^2Q\cdot c_{25}Q^{-1-\frac{5}{8}}<2\delta_0Q$$

и $|P'(x)|<4\delta_0Q$. Следовательно, $a=|P_2'(x)-P_1'(x)|<8\delta_0Q$, отсюда и из условий (28) имеем $|b|<16\delta_0Q$. Теперь (28) можно переписать в виде

$$|ax-b|<4c_{25}Q^{-1},\qquad \max(a,|b|)<2^4\delta_0Q. \tag{29}$$

Оценим меру тех $x\in I$, для которых выполняются неравенства (29). При фиксированных a и b первое неравенство в (29) выполняется для точек $x\in I$ из интервала

$$\left|x-\frac{b}{a}\right|<2^2c_{25}a^{-1}Q^{-1},\qquad (a,b)=1.$$

Обозначим этот интервал через $J(R)$, его длина есть

$$|J(R)|=2^3c_{25}a^{-1}Q^{-1}, \tag{30}$$

и пусть $\frac{b}{a}$ – центр $J(R)$. Далее надо просуммировать оценку (30) по всем a и b, где $|b|<2^4\delta_0Q$, при условии, что точка $\frac{b}{a}$ принадлежит интервалу I. Для

фиксированного a количество целых b, $\frac{b}{a} \in I$, обозначим через $M_I(a)$. Справедливы оценки

$$M_I(a) \leqslant \begin{cases} a|I| + 1 \leqslant 2a|I|, & a \geqslant |I|^{-1}, \\ \gamma, & a < |I|^{-1}, \end{cases} \tag{31}$$

где величина γ равна 0 или 1.

Пусть $a \geqslant |I|^{-1}$. Воспользуемся первой оценкой в (31). Из (30) и (31) находим

$$\sum_a \sum_{\substack{b \\ b/a \in I}} |J(R)| < \sum_a 2^3 c_{25} a^{-1} Q^{-1} \cdot 2|I|a \leqslant 2^4 c_{25} \delta_0 |I|. \tag{32}$$

Пусть $a < |I|^{-1}$. Тогда воспользуемся второй оценкой в (31). Сначала найдем такое значение c_{26}, при котором интервалы

$$J_1(R_1) := \left\{ x \in I \colon \left| x - \frac{b_1}{a_1} \right| < c_{26} a_1^{-1} Q^{-1} \right\},$$
$$J_2(R_2) := \left\{ x \in I \colon \left| x - \frac{b_2}{a_2} \right| < c_{26} a_2^{-1} Q^{-1} \right\}$$

не пересекаются при $\frac{b_1}{a_1} \neq \frac{b_2}{a_2}$. Предположим, что эти интервалы пересекаются в точке x, тогда

$$\frac{1}{a_1 a_2} \leqslant \left| \frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2} \right| \leqslant \left| x - \frac{b_1}{a_1} \right| + \left| x - \frac{b_2}{a_2} \right| \leqslant c_{26} Q^{-1} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right). \tag{33}$$

Умножим левую и правую части неравенства (33) на $a_1 a_2$ и, полагая, например, $a_1 < a_2$, получим противоречивое неравенство

$$1 \leqslant c_{26} Q^{-1} (a_1 + a_2) < 2 c_{26} a_2 Q^{-1} \leqslant 2^5 c_{26} \delta_0$$

при $c_{26} = 2^{-6} \delta_0^{-1}$. При такой величине c_{26}

$$\sum_{R_1} |J_1(R_1)| < |I|, \tag{34}$$

откуда имеем $\sum_{1 \leqslant a \leqslant 4\delta_0 Q} 2 c_{26} \gamma a^{-1} Q^{-1} < |I|$ и

$$\sum_{1 \leqslant a \leqslant 4\delta_0 Q} \gamma a^{-1} < 2^{-1} c_{26}^{-1} Q |I|. \tag{35}$$

Просуммируем оценку (30) по всем b, удовлетворяющим второй оценке в соотношении (31). Получим

$$\sum_b 2^3 c_{25} a^{-1} Q^{-1} \leqslant 2^3 \gamma c_{25} a^{-1} Q^{-1}. \tag{36}$$

Поэтому, учитывая (35), имеем

$$\sum_{1 \leqslant a \leqslant 4\delta_0 Q} \sum_{\substack{b \\ b/a \in I}} 2^3 \gamma c_{25} a^{-1} Q^{-1} \leqslant 2^3 c_{25} Q^{-1} \sum_{1 \leqslant a \leqslant 4\delta_0 Q} 1 < 2^4 c_{25} c_{26}^{-1} \delta_0 |I|. \tag{37}$$

Оценки (32) и (37) являются оценкой меры множества $\mathcal{L}_{n,1}$ в случае несущественных интервалов. Пусть

$$c_{25} = 2^{2n+2}s, \qquad c_{26} = 2^{-6}\delta_0^{-1}, \qquad \delta_0 = 2^{-n-8}s^{-\frac{1}{2}}.$$

Из неравенств (27), (32) и (37) имеем

$$\mu\mathcal{L}_{n,1} < \frac{1}{4s}|I|, \tag{38}$$

что доказывает предложение.

Пусть для некоторой величины c_{27} выполняется неравенство

$$|P(x)| < Q^{-n}, \qquad c_{27} < |P'(\alpha_1)| \leqslant Q^{\frac{5}{8}}. \tag{39}$$

Обозначим через $\mathcal{L}_{n,2}$ множество тех $x \in I$, для которых (39) верно хотя бы при одном $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$.

Предложение 2. *При $c_{27} = 2^{-4}$ справедливо неравенство*

$$\mu\mathcal{L}_{n,2} < \frac{1}{4s}|I|.$$

Доказательство. Рассуждения близки к доказательству предложения 1. Рассмотрим промежуток

$$\sigma_2(P) := \bigl\{x \in I\colon |x - \alpha_1| < c_{28}Q^{-1}|P'(\alpha_1)|^{-1}\bigr\}. \tag{40}$$

Из (21) и (40) имеем

$$\mu\sigma(P) \leqslant 2^{n-1}c_{28}^{-1}Q^{-n+1}\mu\sigma_2(P). \tag{41}$$

Неравенство (39) и условие $n \geqslant 3$ обеспечивают при $Q > Q_0$ выполнение неравенства $\mu\sigma_2(P) < |I|$.

Разложим $P(x)$ и $P'(x)$ на $\sigma_2(P)$ в ряд Тэйлора и оценим $|P(x)|$, $|P'(x)|$ сверху, как при доказательстве предложения 1. Получим

$$|P(x)| < 2c_{28}Q^{-1}, \tag{42}$$

$$|P'(x)| < 2|P'(\alpha_1)|. \tag{43}$$

При фиксированном векторе $\mathbf{b}_1 = (a_n, \dots, a_2)$ и многочленах $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b}_1)$ поделим интервалы на существенные и несущественные.

В случае существенных интервалов из неравенства

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_n(Q,\mathbf{b}_1)} \mu\sigma_2(P) \leqslant 2|I|$$

и неравенства (41) получаем

$$\sum_{\mathbf{b}_1} \sum_{P \in \mathcal{P}_n(Q,\mathbf{b}_1)} \mu\sigma_2(P) < 2^{2n}c_{28}^{-1}|I|. \tag{44}$$

В случае несущественных интервалов используем оценки (42), (43) для линейного многочлена $T(x) = P_2(x) - P_1(x) = ax - b$ на пересечении $\sigma_2(P_1) \cap \sigma_2(P_2)$. Имеем

$$|ax - b| < 4c_{28}Q^{-1}, \qquad 1 \leqslant a < 4Q^{\frac{5}{8}}. \tag{45}$$

Первое неравенство в (45) выполняется на интервале $J_2(T)$ с центром в точке $\frac{b}{a}$ и длиной $|J_2| = 8c_2Q^{-1}$.

Зафиксируем a и обозначим через $M_I(T)$ количество точек $\frac{b}{a}$, попадающих в промежуток I. Аналогично (31) имеем

$$M_I(a) \leqslant \begin{cases} a|I| + 1 \leqslant 2a|I|, & a \geqslant |I|^{-1}, \\ \gamma, & a < |I|^{-1}, \end{cases} \tag{46}$$

где величина γ равна 0 или 1.

Пусть $a \geqslant |I|^{-1}$. Если при $c_{29} > 0$ интервалы

$$J_3(T_1) := \left\{ x \in I \colon \left| x - \frac{b_1}{a_1} \right| < c_{29}a_1^{-1}Q^{-1} \right\},$$
$$J_4(T_2) := \left\{ x \in I \colon \left| x - \frac{b_2}{a_2} \right| < c_{29}a_2^{-1}Q^{-1} \right\}$$

пересекаются при $\frac{b_1}{a_1} \neq \frac{b_2}{a_2}$, то приходим к неравенству, аналогичному (34):

$$1 \leqslant c_{29}Q^{-1}(a_1 + a_2) \leqslant 2c_{29}a_2Q^{-1} \leqslant 8c_{29}Q^{-\frac{3}{8}},$$

которое противоречиво при любой величине $c_{29} < Q^{\frac{3}{8}}$, если $Q > Q_0$. Аналогично, как в (35), приходим к неравенству

$$\sum_{1 \leqslant a < 4Q^{5/8}} \gamma a^{-1} \leqslant 2^{-1}c_{29}^{-1}Q|I|. \tag{47}$$

При фиксированных a и b мера тех $x \in I$, которые удовлетворяют (45), не превосходит $2^3c_{28}a^{-1}Q^{-1}$. Просуммируем эту оценку по всем b таким, что $\frac{b}{a} \in I$. Для этого используем (45). В случае первой оценки имеем

$$\sum_{1 \leqslant a \leqslant 4Q^{5/8}} 2^3c_{28}a^{-1}Q^{-1} \cdot 2a|I| < 2^6c_{28}Q^{-\frac{3}{8}}|I|, \tag{48}$$

в случае второй оценки

$$\sum_{1 \leqslant a \leqslant 4Q^{5/8}} \sum_{\substack{b \\ b/a \in I}} 2^3c_{28}a^{-1}Q^{-1} \leqslant 2^3c_{28}Q^{-1} \sum_{1 \leqslant a \leqslant 4Q^{5/8}} \gamma a^{-1} \leqslant 2^2c_{28}c_{29}^{-1}|I|. \tag{49}$$

В итоге из (44), (48) и (49) следует

$$\mu\mathcal{L}_{n,2} < \left(2^{2n}c_{28}^{-1} + 2^6c_{28}Q^{-\frac{3}{8}} + 2^2c_{28}c_{29}^{-1}\right)|I|. \tag{50}$$

При $c_{28} = 2^{2n+4}s$ и $c_{29} = 2^{2n+10}s^2$ из (50) имеем $\mu\mathcal{L}_{n,2} < (4s)^{-1}|I|$, что и доказывает предложение.

§ 4. Сведéние к многочленам второй степени

Обозначим через $\mathcal{L}_{n,3}$ множество тех $x \in I$, для которых существует решение системы неравенств

$$|P(x)| < Q^{-n}, \quad c_{30}Q^{-\frac{1}{2}} < |P'(\alpha_1)| \leqslant 2^{-4}, \qquad P(x) \in \mathcal{P}_n(Q). \tag{51}$$

Предложение 3. *При $c_{30} = 2^n$ справедливо неравенство*

$$\mu\mathcal{L}_{n,3} < \frac{1}{4s}|I|.$$

Доказательство. Введем интервал

$$\sigma_3(P) := \bigl\{x \in S(\alpha_1) \cap I \colon |x - \alpha_1| < c_{31}Q^{-2}|P'(\alpha_1)|^{-1}\bigr\}. \tag{52}$$

Ясно, что из (51) и (52) при $Q > Q_0$ следуют неравенства $\mu\sigma_3(P) < |I|$ и

$$\mu\sigma(P) < 2^{n-1}c_{31}^{-1}Q^{-n+2}\mu\sigma_3(P). \tag{53}$$

Зафиксируем вектор $\mathbf{b}_2 = (a_n, \dots, a_3)$. Подмножество многочленов $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ с одним и тем же вектором $\mathbf{b}_2$ обозначим $\mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b}_2)$. При $P \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b}_2)$ поделим интервалы $\sigma_3(P)$ на существенные и несущественные.

Для существенных интервалов имеем

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_n(Q,\mathbf{b}_2)} \mu\sigma_3(P) \leqslant 2|I|,$$

откуда из неравенств $\#\mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b}_2) \leqslant 2^{n-1}Q^{n-2}$ и (53) имеем

$$\sum_{\mathbf{b}_2} \sum_{P \in \mathcal{P}_n(Q,\mathbf{b}_2)} \mu\sigma(P) < 2^{2n}c_{31}^{-1}|I|. \tag{54}$$

Для несущественных интервалов на пересечении $\sigma_3(P_1) \cap \sigma_3(P_2)$, где $P_1(x)$, $P_2(x) \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b}_2)$, из разложения $P_i(x)$, $P_i'(x)$, $i = 1, 2$, в ряд Тэйлора на интервале $\sigma_3(P)$ получим оценки

$$|P_i(x)| < 2c_{31}Q^{-2}, \quad |P_i'(x)| < 2|P'(\alpha_1)|, \qquad i = 1, 2. \tag{55}$$

Поскольку коэффициенты $a_n, \dots, a_3$ многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ совпадают, то многочлен $S(x) = P_2(x) - P_1(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ удовлетворяет неравенствам

$$|S(x)| < 4c_{31}Q^{-2}, \quad |S'(x)| < 4|P'(\alpha_1)|, \qquad |b_j| \leqslant 2Q, \quad 0 \leqslant j \leqslant 2. \tag{56}$$

Пусть β_1, β_2 – корни многочлена $S(x)$. Поскольку дискриминант многочлена $S(x)$ удовлетворяет условию

$$|D(S)| = |S'(\beta_1)|^2 < 16|P'(\alpha_1)|^2 \leqslant 2^{-2},$$

заключаем, что $D(S) = 0$. Это означает, что многочлен $S(x)$ имеет кратный корень и, следовательно, является квадратом линейного многочлена:

$$S(x) = (S_0(x))^2 = (s_1x - s_0)^2, \qquad |s_1| < 2Q^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда и из (56) имеем

$$|s_1x - s_0| < 2c_{31}^{\frac{1}{2}}Q^{-1}, \qquad |s_1| \leqslant 2Q^{\frac{1}{2}}. \tag{57}$$

Неравенство (57) выполняется на интервале $J_4(S_0) \subset I$ с центром в точке $\frac{s_0}{s_1}$ и длиной $|J_4(S_0)| = 4c_{31}^{1/2}|s_1|^{-1}Q^{-1}$. Опять зафиксируем s_1 и обозначим через $M_I(s_1)$ количество точек $\frac{s_0}{s_1} \in I$. Аналогично (46) имеем

$$M_I(s_1) \leqslant \begin{cases} s_1|I| + 1 \leqslant 2s_1|I|, & s_1 \geqslant |I|^{-1}, \\ \gamma, & s_1 < |I|^{-1}, \end{cases}$$

где величина γ равна 0 или 1.

Пусть $s_1 \geqslant |I|^{-1}$; тогда при $Q > Q_0$

$$\sum_{1 \leqslant s_1 \leqslant 2Q^{1/2}} \sum_{\substack{s_0 \\ s_0/s_1 \in I}} |J_4(S_0)| < 2^3 c_{31}^{\frac{1}{2}} Q^{-\frac{1}{2}}|I|. \tag{58}$$

Пусть $s_1 < |I|^{-1}$; тогда при $c_{32} > 2c_{31}^{1/2}$ из предположения, что интервалы

$$J_5(S_2) := \left\{ x \in I \colon \left| x - \frac{s_0}{s_1} \right| < c_{32}s_1^{-1}Q^{-1} \right\},$$
$$J_5(S_3) := \left\{ x \in I \colon \left| x - \frac{m_0}{m_1} \right| < c_{32}m_1^{-1}Q^{-1} \right\}$$

пересекаются, а $\frac{s_0}{s_1} \neq \frac{m_0}{m_1}$, приходим к неравенству, аналогичному (34):

$$1 \leqslant 2c_{32}(s_1 + m_1)Q^{-1} < 2c_{32}Q^{-\frac{1}{2}}. \tag{59}$$

Неравенство (59) противоречиво при любой величине $c_{32} = c_{32}(n)$, если $Q > Q_0$. Значит, интервалы $J_5(S_2)$ и $J_5(S_3)$ не пересекаются и

$$\sum_{1 \leqslant s_1 < 2Q^{1/2}} \gamma s_1^{-1} \leqslant 2c_{31}^{-1}Q|I|. \tag{60}$$

Отсюда, как и ранее, имеем

$$\sum_{1 \leqslant s_1 < 2Q^{1/2}} \sum_{\substack{s_0 \\ s_0/s_1 \in I}} 4c_{31}^{\frac{1}{2}}|s_1|^{-1}Q^{-1} \leqslant 4c_{31}^{\frac{1}{2}}Q^{-1} \sum_{1 \leqslant s_1 \leqslant 2Q^{1/2}} \gamma|s_1|^{-1} \leqslant 2c_{31}^{\frac{1}{2}}c_{32}^{-1}|I|. \tag{61}$$

Положим $c_{31} = 2^{2n+4}s$, $c_{32} = 2^{n+3}s^{3/2}$. Тогда из неравенств (54) и (61) имеем $\mu\mathcal{L}_{n,3} < (4s)^{-1}|I|$, и предложение доказано.

§ 5. Индукция и доказательство теоремы 4 для неприводимых многочленов степени n

В данном параграфе все многочлены предполагаются неприводимыми.

Пусть теперь при $3 \leqslant k \leqslant n-1$ производная удовлетворяет условию

$$Q^{-\frac{k-1}{2}} < |P'(\alpha_1)| \leqslant vQ^{-\frac{k-2}{2}}, \tag{62}$$

где $v = 2^n$ при $k = 3$, $v = 1$ при $4 \leqslant k \leqslant n-1$, а при $k = n$

$$n^{\frac{3}{2}} Q^{-\frac{n-1}{2}} < |P'(\alpha_1)| \leqslant Q^{-\frac{n-2}{2}}. \tag{63}$$

Наряду с интервалом

$$\sigma(P) := \bigl\{x \in S(\alpha_1)\colon |x-\alpha_1| < Q^{-n}|P'(\alpha_1)|^{-1}\bigr\} \tag{64}$$

будем рассматривать интервалы

$$\sigma_k(P) := \bigl\{x \in S(\alpha_1)\colon |x-\alpha_1| < c_{33}Q^{-k}|P'(\alpha_1)|^{-1}\bigr\}.$$

Зафиксируем вектор $\mathbf{b}_k = (a_n, \dots, a_{k+1})$. Множество многочленов $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ с одним и тем же вектором $\mathbf{b}_k$ обозначим $\mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b}_k)$. При $Q > Q_0$ будем пользоваться оценкой $\#\{\mathbf{b}_k\} < 2^{n-1}Q^{n-k}$.

Оценим $|P(x)|$ и $|P'(x)|$ при $x \in \sigma_k(P)$, $\xi_4 \in (x, \alpha_1)$, $\xi_5 \in (x, \alpha_1)$:

$$|P(x)| < |P'(\alpha_1)|\,|x-\alpha_1| + \frac{1}{2}|P''(\xi_4)|\,|x-\alpha_1|^2 < 2c_{33}Q^{-k}, \tag{65}$$

$$|P'(x)| < |P'(\alpha_1)| + |P''(\xi_5)|\,|x-\alpha_1| < 2Q^{-\frac{k-2}{2}}. \tag{66}$$

Интервалы $\sigma_k(P)$, $P \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b}_k)$, поделим на существенные и несущественные. В случае существенных интервалов из определения $\sigma(P)$, $\sigma_k(P)$ и оценок $\#\{\mathbf{b}_k\}$ имеем

$$\begin{gathered} \mu\sigma(P) < 2^{n-1}c_{33}^{-1}Q^{-n+k}\mu\sigma_k(P), \\ \sum_{P \in \mathcal{P}_n(Q,\mathbf{b}_k)} \mu\sigma_k(P) \leqslant 2|I|, \\ \sum_{\mathbf{b}_k} \sum_{P \in \mathcal{P}_n(Q,\mathbf{b}_k)} \mu\sigma(P) < 2^{2n}c_{33}^{-1}|I|. \end{gathered} \tag{67}$$

В случае несущественных интервалов на пересечении $\sigma_k(P_1) \cap \sigma_k(P_2)$, $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b}_k)$, получаем для многочлена $R(x) = P_2(x) - P_1(x)$, $\deg R \leqslant k$, $H(R) \leqslant 2Q$, оценки

$$|R(x)| \leqslant 4c_{33}Q^{-k}, \qquad |R'(x)| \leqslant 4Q^{-\frac{k-2}{2}}. \tag{68}$$

Обозначим через $\mathcal{L}_{n,k+1}$, $3 \leqslant k \leqslant n-2$, множество тех $x \in I$, для которых выполняются неравенства (67) и (68). По предположению индукции и лемме 6 при $c_{33} = ns2^{2n+5}$ имеем

$$\mu\mathcal{L}_{n,k+1} < \frac{1}{4ns}|I|, \qquad \mu\bigcup_{k=3}^{n-2}\mathcal{L}_{n,k+1} < \frac{1}{4s}|I|.$$

При $k = n$ получается система неравенств

$$|P(x)| \leqslant Q^{-n}, \qquad n^{\frac{3}{2}}Q^{-\frac{n-1}{2}} < |P'(\alpha_1)| < Q^{-\frac{n-2}{2}}. \tag{69}$$

Множество решений системы (69) обозначим $\mathcal{L}_{n,n}$. Эта система анализируется другим методом. Будем говорить, что многочлен $P(x)$ принадлежит интервалу I, если существуют такие $x \in I$, для которых выполняется первое неравенство (69). Поделим промежуток I на интервалы J_i, $|J_i| = Q^{-u}$, $1 \leqslant u \leqslant \frac{n-2}{2}$.

Рассмотрим такие интервалы J_i, каждому из которых принадлежит не более одного неприводимого многочлена с условиями (69). Обозначим через $\nu_1(P)$ множество тех $x \in S(\alpha_1)$, для которых выполняется (69). По лемме 1 имеем

$$\mu\nu_1(P) < 2^{n-1} n^{-\frac{3}{2}} Q^{-\frac{n+1}{2}}. \tag{70}$$

Поскольку количество интервалов J_i не превосходит $|I|Q^u$, то

$$\sum_{J_i} \sum_{P \in J_i} \mu\gamma(P) \leqslant 2^{n-1} Q^{u-\frac{n+1}{2}} |I| < \frac{1}{4s}|I| \tag{71}$$

при $u < \frac{n+1}{2}$ и достаточно большом Q.

Покажем, что два и более неприводимых многочленов не могут принадлежать одному интервалу J_i. Оценим значение $P(x)$ на J_i. По определению $P(x) \in J_i$ существует точка $x_0 \in J_i$, в которой $|P(x_0)| < Q^{-n}$, и по лемме 1 имеем $|x_0 - \alpha_1| < 2^{n-1} n^{-\frac{3}{2}} Q^{-\frac{n+1}{2}}$. Для любой точки $x \in J_i$ выполняется неравенство

$$|x - \alpha_1| \leqslant |x - x_0| + |x_0 - \alpha_1| < Q^{-u} + 2^{n-1} Q^{-\frac{n+1}{2}} < 2Q^{-u} \tag{72}$$

для $Q > Q_0$. Из разложения

$$P(x) = P'(\alpha_1)(x - \alpha_1) + \frac{1}{2} P''(\xi_6)(x - \alpha_1)^2, \qquad \xi_6 \in (x, \alpha_1),$$

получаем

$$|P(x)| < 2Q^{-\frac{n-2}{2} - u} + 4n^2 Q^{1-2u}. \tag{73}$$

Положим $u = \frac{n+1}{2} - \gamma_1$, $\gamma_1 > 0$. Тогда при $Q > Q_0(\gamma_1)$ и достаточно малом γ_1 имеем

$$|P(x)| < 2Q^{-n+\frac{1}{2}+\gamma_1} + 4n^2 Q^{-n+2\gamma_1} < 4Q^{-n+\frac{1}{2}+\gamma_1}. \tag{74}$$

Применим к двум многочленам, удовлетворяющим (74), лемму 2 с $\tau = n - \frac{1}{2} - \gamma_1$, $\eta = \frac{n+1}{2} - \gamma_1$. Получим неравенство

$$\tau + 1 + 2(\tau + 1 - \eta) = n + \frac{1}{2} - \gamma_1 + 2\left(n + \frac{1}{2} - \gamma_1 - \frac{n+1}{2} + \gamma_1\right) = 2n + \frac{1}{2} - \gamma_1 < 2n + \delta,$$

которое противоречиво при $\gamma_1 = 0.1$, $\delta = 0.1$.

§ 6. Интервалы, в которых производная в точке и производная в ближайшем к ней корне имеют разные порядки малости

Если $|P'(x)| \leqslant 2n^{\frac{3}{2}} Q^{-\frac{n-1}{2}}$, то мы не можем получить соотношение $|P'(x)| \asymp |P'(\alpha_1)|$, и систему неравенств (19) надо рассматривать иначе.

Лемма 7. *Из неравенства* $|P'(x)| \leqslant 2n^{\frac{3}{2}} Q^{-\frac{n-1}{2}}$ *следует неравенство*

$$|P'(\alpha_1)| < 2^{n+2} Q^{-\frac{n-1}{2}}. \tag{75}$$

Доказательство. Предположим, что выполняется неравенство, противоположное (75). По лемме 1 из неравенства $|P(x)| < Q^{-n}$ при $x \in S(\alpha_1)$ имеем

$$|x - \alpha_1| < 2^{n-1} \cdot 2^{-n-2} Q^{-n+\frac{n+1}{2}} = \frac{1}{2} Q^{-\frac{n-1}{2}}.$$

Тогда равенство

$$P'(\alpha_1) = P'(x) - P''(\xi_7)(x - \alpha_1), \qquad \xi_7 \in (x, \alpha_1),$$

противоречиво, так как при $Q > Q_0$

$$|P'(x) - P''(\xi_7)(x - \alpha_1)| < 2n^2 Q^{-\frac{n-1}{2}},$$

а $|P'(\alpha_1)| \geqslant 2^n Q^{-\frac{n-1}{2}}$. Лемма доказана.

Поэтому в данном параграфе будем рассматривать систему неравенств

$$|P(x)| < Q^{-n}, \quad |P'(\alpha_1)| < 2^{n+2} Q^{-\frac{n-1}{2}}, \qquad x \in I. \tag{76}$$

Произведем классификацию многочленов $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ в зависимости от распределения их корней. Такая классификация была впервые предложена В. Г. Спринджуком [10].

Все корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ многочлена $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ упорядочим относительно корня α_1:

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \leqslant |\alpha_1 - \alpha_3| \leqslant \cdots \leqslant |\alpha_1 - \alpha_n|.$$

Для достаточно малого $\varepsilon_1 > 0$ положим $T = [\varepsilon_1^{-1}] + 1$, так что $T^{-1} < \varepsilon_1$. Определим числа ρ_j, $2 \leqslant j \leqslant n$, из уравнений

$$|\alpha_1 - \alpha_j| = H(P)^{-\rho_j},$$

а целые числа l_k – из неравенств

$$\frac{l_k}{T} \leqslant \rho_j < \frac{l_k + 1}{T}.$$

Поскольку корни α_j ограничены и, как хорошо известно из [10], $|\alpha_i - \alpha_j| > cH^{-n+1}$, то $-1 \leqslant l_k \leqslant (n-1)T$. Положим

$$p_j = (l_{j+1} + \cdots + l_n)T^{-1}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n-1.$$

Целочисленный вектор $\mathbf{l} = (l_2, \ldots, l_n)$ принимает не более $(nT)^{n-1}$ значений. Будем считать, что мы рассматриваем систему неравенств (76) при некотором фиксированном векторе $\mathbf{l}$. Поскольку $P'(\alpha_1) = a_n(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3) \cdots (\alpha_1 - \alpha_n)$, то имеем

$$Q^{1-p_1-n\varepsilon_1} < H^{1-p_1-(n-1)\varepsilon_1} < |P'(\alpha_1)| \leqslant H^{1-p_1} \leqslant Q^{1-p_1}. \tag{77}$$

Систему неравенств (76) запишем в виде

$$|P(x)| < Q^{-n}, \quad |P'(\alpha_1)| < 2^{n+2} Q^{1-p_1}, \qquad p_1 > \frac{n+1}{2}. \tag{78}$$

Сравним различные оценки для $|x-\alpha_1|$, следующие из леммы 1:

$$|x-\alpha_1| < cQ^{-n-1+p_1+n\varepsilon_1}, \tag{79}$$

$$|x-\alpha_1| < cQ^{-\frac{n+1-p_2}{2}+n\varepsilon_1}. \tag{80}$$

Получаем, что оценка (79) лучше оценки (80), если

$$2p_1 - p_2 < n+1. \tag{81}$$

При выполнении неравенства, противоположного (81), лучше будет оценка (80).

Будем говорить, что многочлен $P(x)$ принадлежит отрезку J, если существует точка $x \in J$ такая, что $|P(x)| < Q^{-n}$. Поделим отрезок I на равные части J_i длиной $|J_i| = Q^{-u}$, $u > 0$. Рассмотрим вначале интервалы J_i, которым принадлежит не более одного неприводимого многочлена $P(x)$. Таких интервалов не более $Q^u\mu I$. Воспользуемся оценкой (79). Получим, что мера x из интервалов, которые содержат не более одного многочлена $P(x)$, не превосходит

$$cQ^{u-n-1+p_1+n\varepsilon_1}\mu I. \tag{82}$$

Возьмем $u = n+1-p_1-(n+1)\varepsilon_1$. Тогда оценка в (82) не превосходит $cQ^{-\varepsilon_1}\mu I$ и теорема 4 доказана. Рассмотрим теперь интервалы J_i, которым принадлежат $k \geqslant 2$ неприводимых многочленов $P(x)$. Разложим эти многочлены на J_i в ряд Тэйлора и оценим $P_k(x)$ сверху с учетом (81). Для $\xi_8 \in (x, \alpha_1)$ имеем

$$P_k(x) = P_k'(\alpha_1)(x-\alpha_1) + \frac{1}{2}P_k''(\alpha_1)(x-\alpha_1)^2 + \frac{1}{6}P_k'''(\xi_8)(x-\alpha_1)^3,$$

откуда для $\xi \in (x, \alpha_1)$ получаем

$$\begin{aligned}|P_k(x)| < c(&Q^{1-p_1-n-1+p_1+(n+1)\varepsilon_1} + Q^{1-p_2-2n-2+2p_1+2(n+1)\varepsilon_1} \\ &+ Q^{1-p_3-3(n+1-p_1-(n+1)\varepsilon_1)}) < cQ^{-n+2(n+1)\varepsilon_1}, \qquad k \geqslant 2.\end{aligned}$$

Применим к двум неприводимым многочленам $P_1(x)$ и $P_2(x)$ на отрезке J_i лемму 3. Здесь $\eta = n+1-p_1-(n+1)\varepsilon_1$, $\tau+1 = n+1-2(n+1)\varepsilon_1$, $2(\tau+1-\eta) = 2p_1 - 2(n+1)\varepsilon_1$,

$$\tau+1+2(\tau+1-\eta) = n+1+2p_1-4(n+1)\varepsilon_1 > 2n+2-4(n+1)\varepsilon_1. \tag{83}$$

Оценка (83) превосходит $2n+\delta$ при $\varepsilon_1 = (40(n+1))^{-1}$, $\delta = 0.1$, поэтому интервалу J_i не могут принадлежать два и более неприводимых многочленов $P(x)$. Если

$$2p_1 - p_2 \geqslant n+1, \tag{84}$$

то для оценки $|x-\alpha_1|$ воспользуемся неравенством (80). Тогда суммарная мера тех x, для которых выполняется неравенство $|P(x)| < Q^{-n}$ и только один многочлен $P(x)$ принадлежит J_i, не превосходит

$$cQ^{u-\frac{n+1-p_2}{2}+n\varepsilon_1}\mu I. \tag{85}$$

Если $u = \frac{n+1-p_2}{2} - (n+1)\varepsilon_1$, то оценка (85) не превосходит $cQ^{-\varepsilon_1}\mu I$, и теорема 4 доказана. На интервалах J_i, которым принадлежат $k \geqslant 2$ многочленов $P_k(x)$, разложим их в ряд и оценим сверху с учетом (84):

$$\begin{aligned}
|P_k(x)| &= \left| P_k'(\alpha_1)(x-\alpha_1) + \frac{1}{2}P_k''(\alpha_1)(x-\alpha_1)^2 + \dots + \frac{1}{n!}P_k^{(n)}(\alpha_1)(x-\alpha_1)^n \right| \\
&\leqslant c\big(Q^{1-p_1-\frac{n+1-p_2}{2}+(n+1)\varepsilon_1} \\
&\qquad + Q^{1-p_2-2\left(\frac{n+1-p_2}{2}-(n+1)\varepsilon_1\right)} + \dots + Q^{1-p_s-s\left(\frac{n+1-p_2}{2}-(n+1)\varepsilon_1\right)} + \dots\big) \\
&\leqslant c\big(Q^{-\frac{2p_1-p_2-1}{2}+(n+1)\varepsilon_1} + Q^{-n+2(n+1)\varepsilon_1}\big) \leqslant cQ^{-n+2(n+1)\varepsilon_1}.
\end{aligned}$$

Снова применим к неприводимым многочленам $P_1(x)$ и $P_2(x)$ лемму 3. Здесь $\eta = \frac{n+1-p_2}{2} - (n+1)\varepsilon_1$, $\tau+1 = n+1-2(n+1)\varepsilon_1$, $2(\tau+1-\eta) = n+1+p_2-2(n+1)\varepsilon_1$,

$$\tau + 1 + 2(\tau + 1 - \eta) = 2n + 2 + p_2 - 4(n+1)\varepsilon_1. \tag{86}$$

При $\delta = 0.1$, $4(n+1)\varepsilon_1 = 0.1$ получаем противоречие. Следовательно, два неприводимых многочлена не могут принадлежать J_i. Теорема 4 для неприводимых многочленов доказана.

§ 7. Приводимые многочлены

Осталось рассмотреть случаи, когда

$$|P'(x)| > 2n^{\frac{3}{2}}Q^{-\frac{n-1}{2}}, \qquad n^{\frac{3}{2}}Q^{-\frac{n-1}{2}} < |P'(\alpha_1)| < Q^{-\frac{n-2}{2}},$$
$$|P'(x)| \leqslant 2n^{\frac{3}{2}}Q^{-\frac{n-1}{2}}, \qquad |P'(\alpha_1)| < 2^nQ^{-\frac{n-1}{2}},$$

и при делении интервала I на J_i интервалам J_i принадлежит более одного многочлена, однако среди этих многочленов нельзя найти два неприводимых.

Пусть $P(x)$ – приводимый многочлен, принадлежащий J_i. Представим его в виде

$$P(x) = P_1(x)P_2(x), \qquad \deg P_1 = n_1, \quad \deg P_2 = n - n_1.$$

Множество $x \in J_i \cap S(\alpha_1)$ представляет собой некоторый интервал. Обозначим его $\lambda(P)$. Возьмем достаточно большое целое число $T > 0$ и положим $\varepsilon_3 = T^{-1}$. По лемме 4 имеем

$$c_{35}H(P_1)H(P_2) < H(P) < c_{36}H(P_1)H(P_2),$$

и, значит, можно найти такое целое число k, что

$$Q^{\frac{k}{T}} \leqslant H(P_1) < Q^{\frac{k+1}{T}}, \qquad c_{37}Q^{1-\frac{k+1}{T}} < H(P_2) < c_{38}Q^{1-\frac{k}{T}}. \tag{87}$$

Для фиксированного многочлена $P(x)$ обозначим через $S(P)$ множество тех $x \in \lambda(P)$, для которых выполняется неравенство $|P(x)| < Q^{-n}$.

Из непрерывности $P(x)$ следует, что существует такое целое число a, при котором мера тех $x \in \lambda(P)$, которые удовлетворяют неравенству

$$|P_1(x)| < Q^{-\frac{a}{T}},$$

не превосходит $\frac{1}{2}\mu S(P)$, а мера тех $x \in S(P)$, которые удовлетворяют неравенству

$$|P_1(x)| < Q^{-\frac{a-1}{T}},$$

больше $\frac{1}{2}\mu S(P)$. Поскольку $|P(x)| < Q^{-n}$, мера тех $x \in S(P)$, для которых верно неравенство

$$|P_2(x)| < Q^{-n+\frac{a}{T}},$$

не менее $\frac{1}{2}\mu S(P)$. Используя лемму 2, получим, что для всех $x \in S(P)$ выполняются неравенства

$$|P_1(x)| < c_{39}Q^{-\frac{a-1}{T}}, \tag{88}$$

$$|P_2(x)| < c_{40}Q^{-n+\frac{a}{T}}. \tag{89}$$

Поскольку $n_1 < n$, $n - n_1 < n$, то при $a > n_1T + 1$ имеем

$$|P_1(x)| < c_{41}Q^{-n_1}, \qquad H(P_1) < c_{42}Q. \tag{90}$$

Воспользуемся леммой 6. По предположению индукции неравенства (90) выполняются на множестве с мерой, не превосходящей $(4s)^{-1}|I|$. Если $a < n_1T$, то из (89) следует, что

$$|P_2(x)| < c_{43}Q^{-n+n_1}, \qquad H(P_2) < c_{44}Q. \tag{91}$$

Опять используем лемму 6 и предположение индукции. Мера тех $x \in I$, для которых выполняется система неравенств (91), не превосходит $(4s)^{-1}|I|$.

Остается рассмотреть случай, когда

$$n_1T \leqslant a \leqslant n_1T + 1. \tag{92}$$

Пусть k в (87) удовлетворяет неравенству $k < \frac{1}{2}T - 1$. Тогда

$$|P_1(x)| < c_{45}Q^{-\frac{n_1T-1}{T}} < c_{46}Q^{-n_1+\varepsilon_1}, \qquad H(P_1) < Q^{\frac{1}{2}}. \tag{93}$$

Если $k \geqslant \frac{1}{2}T - 1$, то

$$H(P_2) < c_{47}Q^{\frac{1}{2}+\varepsilon_1}. \tag{94}$$

По следующей лемме системы неравенств (93), а также (91) и (94) имеют решение на множестве $\mathcal{L}_{n,n+3}$ с мерой, не превосходящей $(4s)^{-1}|I|$.

Лемма 8. *Обозначим через $\mathcal{L}_n(\lambda,\mu)$ множество тех $x \in I$, для которых выполняется система неравенств*

$$|P(x)| < Q^{-n+\lambda}, \qquad H(P) < Q^{\mu}$$

и хотя бы одно из условий (62), (63). *Тогда при $0 < \lambda < \frac{1}{2}$, $0 < \mu < \frac{2}{3}$ имеем*

$$\mu\mathcal{L}_n(\lambda,\mu) < \frac{1}{4s}|I|.$$

Доказательство. Проведем доказательство в случае выполнения неравенства (62):

$$Q^{-\frac{k-1}{2}} < |P'(\alpha_1)| \leqslant vQ^{-\frac{k-2}{2}}.$$

Определим

$$\sigma_{1,0}(P) := \bigl\{x \in S(\alpha_1) \cap I\colon |x-\alpha_1| < 2^{n-1}Q^{-n+\lambda}|P'(\alpha_1)|^{-1}\bigr\},$$
$$\sigma_{1,k}(P) := \bigl\{x \in I\colon |x-\alpha_1| < c_{48}Q^{-k}|P'(\alpha_1)|^{-1}\bigr\}.$$

Меры интервалов $\sigma_{1,0}(P)$ и $\sigma_{1,k}(P)$ связаны неравенством

$$\mu\sigma_{1,0}(P) < 2^{n-1}c_{48}^{-1}Q^{-n+k+\lambda}\mu\sigma_{1,k}(P).$$

Зафиксируем вектор $\mathbf{b}_k = (a_n, \dots, a_{k+1})$. Множество многочленов $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ с одинаковым вектором $\mathbf{b}_k$ обозначим $\mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b}_k)$. Из условия $H(P) < Q^\mu$ следует неравенство

$$\#\mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b}_k) < 2^n Q^{\mu(n-k)}. \tag{95}$$

Поделим интервалы $\sigma_{1,k}(P)$ на существенные и несущественные. В случае существенных интервалов получаем

$$\sum_{\mathbf{b}_k} \sum_{P \in \mathcal{P}_n(Q,\mathbf{b}_k)} \mu\sigma_{1,0}(P) < 2^{2n}c_{48}^{-1}Q^{-n+k+\lambda+\mu(n-k)}|I|. \tag{96}$$

При $0 < \lambda < \frac{1}{2}$, $0 < \mu < \frac{2}{3}$ и $k \leqslant n-2$ показатель степени в (96) не превосходит $-\frac{1}{6}$, и поэтому для $Q > Q_0$ сомножитель при $|I|$ в (96) не превосходит $(4s)^{-1}$.

В случае несущественных интервалов разложим $P_i(x)$ и $P_i'(x)$, $i = 1, 2$, на интервалах $\sigma_{1,k}(P_i)$ в ряд Тэйлора. Затем получим оценки

$$|P_i(x)| < 2c_{48}Q^{-k}, \qquad |P_i'(x)| < 2|P'(\alpha_1)|.$$

Первые $n-k$ коэффициентов у многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ совпадают, а остальные по модулю не превосходят $2Q^\mu$. На пересечении интервалов $\sigma_{1,k}(P_1) \cap \sigma_{1,k}(P_2)$ для многочлена $R(x) = P_2(x) - P_1(x)$ имеем

$$|R(x)| < 4c_{48}Q^{-k}, \quad |R'(x)| < 4|P'(\alpha_1)| \leqslant 4Q^{-\frac{k-1}{2}}, \qquad H(R) < 2Q^\mu. \tag{97}$$

По лемме 6 множество $x \in I$, для которых выполняются неравенства (97), имеет меру, не превосходящую $(4s)^{-1}|I|$. Суммарная оценка мер в случае существенных и несущественных интервалов не превосходит $(4s)^{-1}|I|$. Сложим меры всех множеств $\mathcal{L}_{n,s}$. Получим оценку $\mu\mathcal{L}_n < \frac{|I|}{4}$.

§ 8. Построение регулярной системы

Воспользуемся теоремой 4 и построим на отрезке I регулярную систему действительных алгебраических чисел α с функцией $N(\alpha) = (H(\alpha))^{n+1}$. Рассмотрим множество $B_3 = I \setminus \mathcal{L}_n \subset B$. Из теоремы 4 следует, что

$$\mu B_3 \geqslant \frac{3}{4}|I| \tag{98}$$

для всех $Q > Q_0$, $Q_0 > cQ^{-1}$. Пусть $x_1 \in B_3$. Это означает, что существует многочлен $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$, удовлетворяющий системе неравенств

$$|P(x_1)| < Q^{-n}, \qquad |P'(x_1)| \geqslant \delta_0 Q. \tag{99}$$

Докажем, что существует действительный корень α_1 многочлена $P(x)$ такой, что $x_1 \in S(\alpha_1)$. Для определенности будем считать, что в (99)

$$P(x_1) > 0, \qquad P'(x_1) < 0.$$

Возьмем $y \in \mathbb{R}$,

$$y = x_1 + 3\delta_0^{-1} Q^{-n-1}. \tag{100}$$

В формуле Тэйлора для $P(y)$ в точке x_1

$$P(y) = P(x_1) + \sum_{j=1}^{n} \frac{P^{(j)}(x_1)}{j!}(y - x_1)^j \tag{101}$$

оценим часть членов (101) сверху, а часть снизу. Из неравенства $|P^{(j)}(x_1)| < n^j Q$ и соотношения (100) при $Q > Q_0$ имеем

$$|P'(x_1)| < Q^{-n}, \quad |P^{(j)}(x_1)(y - x_1)^j| < Q^{-n-1}, \qquad 2 \leqslant j \leqslant n,$$

откуда

$$\left| P(x_1) + \sum_{j=2}^{n} \frac{P^{(j)}(x_1)}{j!}(y - x_1)^j \right| < 2Q^{-n}. \tag{102}$$

Однако из (99), (100) имеем $P'(x_1)(y - x_1) < -3Q^{-n}$, что вместе с соотношениями (101) и (102) дает $P(y) < 0$.

Получили, что многочлен $P(t)$ принимает в точках $t = x_1$ и $t = x_1 + 3\delta_0^{-1} Q^{-n-1}$ значения разных знаков. Из непрерывности $P(t)$ существует действительный корень α_1 многочлена $P(t)$ на интервале $[x_1, x_1 + 3\delta_0^{-1} Q^{-n-1}]$ такой, что

$$|x_1 - \alpha_1| < 3\delta_0^{-1} Q^{-n-1}. \tag{103}$$

Выберем из множества таких корней α_1 максимальный набор из действительных алгебраических чисел $\Gamma = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t) \in I$, удовлетворяющий условиям

$$H(\beta_i) \leqslant Q, \quad |\beta_i - \beta_j| > 3\delta_0^{-1} Q^{-n-1}, \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant t.$$

Как показано выше, для любой точки $x \in B_3$ существует действительное алгебраическое число $\alpha \in \mathbb{A}_n$, удовлетворяющее (103), с высотой $H(\alpha) \leqslant Q$. Если α не входит в Γ, то найдется $\alpha_k \in \Gamma$, $1 \leqslant k \leqslant t$, при котором $|\alpha - \alpha_k| \leqslant 3\delta_0^{-1} Q^{-n-1}$. Последнее неравенство вместе с (103) влечет $|x_1 - \alpha_1| < 6\delta_0^{-1} Q^{-n-1}$. Поскольку x_1 – произвольная точка B_3, то

$$B_3 \subset \bigcup_{k=1}^{t} \left\{ x \in I \colon |x - \alpha_k| < 6\delta_0^{-1} Q^{-n-1} \right\}.$$

Из неравенства $\mu B_3 > \frac{3}{4}|I|$ получаем $t > 2^{-3}\delta_0 Q^{n+1}$. Тогда для любого $T > T_0$ при $T_0 = c|I|^{-n-1}$ выполнены все условия из определения регулярной системы.

Список литературы

1. W. M. Schmidt, "T-numbers do exist" (INDAM, Rome, 1968/1969), Sympos. Math., **IV**, Academic Press, London, 1970, 3–26.
2. Y. Bugeaud, "Mahler's classification of numbers compared with Koksma's", *Acta Arith.*, **110**:1 (2003), 89–105.
3. Д. У. Каляда, "Аб размеркаванні рэчаісных алгебраічных лікаў дадзенай ступені", *Докл. НАН Беларуси*, **56**:3 (2012), 28–33.
4. A. Baker, W. Schmidt, "Diophantine approximation and Hausdorff dimension", *Proc. London Math. Soc.* (3), **21**:1 (1970), 1–11.
5. В. И. Берник, "О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов", *Acta Arith.*, **53**:1 (1989), 17–28.
6. V. Beresnevich, "On approximation of real numbers by real algebraic numbers", *Acta Arith.*, **90**:2 (1999), 97–112.
7. Y. Bugeaud, *Approximation by algebraic numbers*, Cambridge Tracts in Math., **160**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004, xvi+274 pp.
8. V. Bernik, F. Götze, O. Kukso, "Regular systems of real algebraic numbers of third degree in small intervals", *Analytic and probabilistic methods in number theory*, eds. E. Manstavičus et al., TEV, Vilnius, 2012, 61–68.
9. Н. В. Бударина, В. И. Берник, Х. О'Доннелл, "Действительные алгебраические числа третьей степени в коротких интервалах", *Докл. НАН Беларуси*, **57**:4 (2012), 23–26.
10. В. Г. Спринджук, *Проблема Малера в метрической теории чисел*, Наука и техника, Минск, 1967, 181 с.; англ. пер.: V. G. Sprindzuk, *Mahler's problem in metric number theory*, Transl. Math. Monogr., **25**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1969, vii+192 pp.
11. В. И. Берник, "Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений", *Acta Arith.*, **42**:3 (1983), 219–253.
12. Н. И. Фельдман, "Аппроксимация некоторых трансцендентных чисел. I. Аппроксимация логарифмов алгебраических чисел", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **15**:1 (1951), 53–74; англ. пер.: N. I. Fel'dman, "Approximation of certain transcendental numbers. I. The approximation of logarithms of algebraic numbers", Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **59**, 1966, 224–245.

Василий Иванович Берник
(Vasiliy I. Bernik)
Институт математики НАН Беларуси, г. Минск
E-mail: bernik@im.bas-net.by; bernik.vasili@mail.ru

Поступило в редакцию
31.01.2014

Фридрих Гётце
(Friedrich Götze)
Department of Mathematics,
University of Bielefeld, Germany
E-mail: goetze@math.uni-bielefeld.de