Н. Х. Розов, Т. Р. Гичев, Сингулярно возмущенные задачи с минимальным импульсом,
Дифференц. уравнения, 1983, том 19, номер 2, 259–269

https://www.mathnet.ru/de4769

Теорема 6. *Всюду на* M^n $\sigma_\omega(A)=[\omega(A), \underline{P}(A)]$.

С точностью до обозначений и знака неравенств доказательство совпадает с предложенным в теореме 3.

Литература

1. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова.— М.: Наука, 1966.
2. Миллионщиков В. М. Дифференц. уравнения, 1969, т. 5, № 4, с. 749—750.
3. Хаусдорф Ф. Теория множеств.— М.—Л.: ОНТИ, 1937.
4. Бурбаки Н. Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства.— М.: Наука, 1969.
5. Бурбаки Н. Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов.— М.: Наука, 1975.
6. Рахимбердиев М. И.— Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 4, с. 616—625.

Институт математики и механики АН КазССР

Поступила в редакцию 23 марта 1981 г.

УДК 517.934

Н. Х. РОЗОВ, Т. Р. ГИЧЕВ

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ ЗАДАЧИ С МИНИМАЛЬНЫМ ИМПУЛЬСОМ

Дальнейшее развитие ставшей уже классической теории оптимальных процессов для управляемых объектов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями [1], потребовало изучения аналогичных проблем для разнообразных систем управления иных типов (с распределенными параметрами, дискретных и т. д.). В частности, значительный интерес как с теоретической, так и с прикладной точек зрения вызывают импульсные системы управления. Задачи с минимальным импульсом для систем этого класса исследовались в [2, 3]; вопрос о влиянии возмущения данных такой задачи на ее решение рассматривался в [4]. Отметим также, что в последнее время все большее внимание привлекают сингулярно возмущенные задачи оптимального управления.

Настоящая работа посвящена линейным импульсным объектам управления, закон движения которых содержит входящий сингулярно малый положительный параметр; подобные объекты довольно часто встречаются в приложениях. Выясняется поведение при стремлении параметра к нулю решения задачи оптимального (в смысле минимальности импульса) управления с фиксированным или подвижным правым концом.

Предварительные результаты данного исследования были представлены в [5].

1. Некоторые обозначения. Для удобства чтения дальнейшего текста приведем здесь собранные вместе расшифровки ряда используемых обозначений.

Точка над буквой означает дифференцирование по независимой переменной t; штрих справа вверху — транспонирование.

Запись $\{\varphi_k\}\rightrightarrows\varphi_0$ на $[a, b]$ означает, что последовательность функций $\{\varphi_k(t)\}_1^\infty$ равномерно сходится на отрезке $[a, b]$ к функции $\varphi_0(t)$.

$\mathfrak{B}_r$ — пространство непрерывных на $[t_0, T]$ r-мерных вектор-функций $q(t)$ с нормой $\rho[q]=\max\{\gamma[q(t)]\,|\,t_0\leqslant t\leqslant T\}$, где $\gamma[\cdot]=\|\cdot\|$ — фиксированная норма в $\mathbf{R}^r$.

$\mathfrak{B}_r^*$ — пространство r-вектор-функций $Q(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant T$, $Q(t_0)=0$, непрерывных справа в каждой точке интервала (t_0, T) и имеющих ограниченное полное изменение: $\rho^*[Q]=\sup\sum_{\nu=1}^{\nu_0}\gamma^*[Q(\theta_{\nu+1})-Q(\theta_\nu)]$, где $\gamma^*[\cdot]$ — сопряженная с $\gamma[\cdot]$ норма, а верхняя грань берется по всевозможным разбиениям $\{\theta_\nu\}$ отрезка $[t_0, T]$.

$R(\varphi, \psi)$ — расстояние Хаусдорфа между функциями φ и ψ (см., например, [6, 4]).

$$\Phi(t, \tau, \lambda)=\begin{pmatrix}\Phi_{11}(t, \tau, \lambda) & \Phi_{12}(t, \tau, \lambda)\\ \Phi_{21}(t, \tau, \lambda) & \Phi_{22}(t, \tau, \lambda)\end{pmatrix}, \quad t_0\leqslant t\leqslant T,$$

— нормированная в точке $\tau\in[t_0, T]$ фундаментальная матрица линейной системы

$$\begin{cases}\dot{x}=A_{11}(t)x+A_{12}(t)y, & x\in\mathbf{R}^n,\\ \lambda\dot{y}=A_{21}(t)x+A_{22}(t)y, & y\in\mathbf{R}^m,\end{cases}$$

где λ — параметр, $\lambda\in(0, \Lambda)$, $\Lambda>0$, а $A_{ij}(t)$ — непрерывные на $[t_0, T]$ матрицы-функции соответствующих размеров.

$X(t, \tau)$ и $Y(t, \tau, \lambda)$, $t_0\leqslant t\leqslant T$,— нормированные в $\tau\in[t_0, T]$ фундаментальные матрицы систем $\dot{x}=A_0(t)x$ и $\lambda\dot{y}=A_{22}(t)y$ соответственно; здесь $A_0=A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ (при условии $\det A_{22}(t)\neq 0$).

2. П о с т а н о в к и з а д а ч. Рассмотрим зависящий от параметра $\lambda\in(0, \Lambda)$ объект управления $\mathscr{L}_\lambda$, движение которого на фиксированном отрезке времени $t_0\leqslant t\leqslant T$ описывается системой уравнений (ср. с [2, 3]):

$$x(t)=\Phi_{11}(t, t_0, \lambda)v_0+\Phi_{12}(t, t_0, \lambda)w_0+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\left[\Phi_{11}(t, \tau, \lambda)B_1(\tau)+\frac{\alpha(\lambda)}{\lambda}\Phi_{12}(t, \tau, \lambda)B_2(\tau)\right]dU(\tau), \quad (1.\text{а})$$

$$y(t)=Y(t, t_0, \lambda)w_0+$$

$$+\frac{1}{\lambda}\int_{t_0}^{t}Y(t, \tau, \lambda)A_{21}(\tau)x(\tau)d\tau+\frac{\alpha(\lambda)}{\lambda}\int_{t_0}^{t}Y(t, \tau, \lambda)B_2(\tau)dU(\tau), \quad (1.\text{б})$$

где интегралы понимаются в смысле Римана — Стилтьеса, $x\in\mathbf{R}^n$, $y\in\mathbf{R}^m$, $v_0\in\mathbf{R}^n$, $w_0\in\mathbf{R}^m$, $U(t)\in\mathfrak{V}_r^*$, $B_1(t)$ и $B_2(t)$ — непрерывные на $[t_0, T]$ матрицы размеров $n\times r$ и $m\times r$ соответственно, $\alpha(\lambda)$, $0<\lambda<\Lambda$,— скалярная функция, имеющая при $\lambda\to 0$ предел, обозначаемый $\alpha(0)$.

Введем объект управления $\mathscr{L}_0$, движение которого описывается уравнением

$$x(t)=X(t, t_0)v_0+\int_{t_0}^{t}X(t, \tau)B_0(\tau)dU(\tau), \quad t_0\leqslant t\leqslant T; \quad (2)$$

здесь $B_0=B_1-\alpha(0)A_{12}A_{22}^{-1}B_2$ (при условии $\det A_{22}(t)\neq 0$).

Пусть $v_T\in\mathbf{R}^n$ и $w_T\in\mathbf{R}^m$ — фиксированные точки.

Сформулируем задачи оптимального управления, взаимосвязи между решениями которых будут установлены ниже.

З а д а ч а Z_λ^1: *найти минимальное по норме управление $U\in\mathfrak{V}_r^*$, приводящее объект $\mathscr{L}_\lambda$ в конечное состояние $x(T)=v_T$, $y(T)=w_T$.*

З а д а ч а Z_λ^2: *найти минимальное по норме управление $U\in\mathfrak{V}_r^*$, приводящее объект $\mathscr{L}_\lambda$ в конечное состояние $x(T)=v_T$.*

З а д а ч а Z_0: *найти минимальное по норме управление $U\in\mathfrak{V}_r^*$, приводящее объект $\mathscr{L}_0$ в конечное состояние $x(T)=v_T$.*

Обозначим через P_λ^1, P_λ^2, P_0 множества функций $U(t)$ — оптимальных управлений для задач Z_λ^1, Z_λ^2, Z_0 соответственно, а через $\sigma^1(\lambda)$, $\sigma^2(\lambda)$, σ_0 — оптимальные значения критерия (нормы $\rho^*[\cdot]$) в этих задачах. Траекторию объекта $\mathscr{L}_\lambda$ (соответственно объекта $\mathscr{L}_0$), отвечающую в силу (1) (соответственно в силу (2)) управлению $U(t)\in\mathfrak{B}_r^*$, будем обозначать $(x'_\lambda(t;\ U),\ y'_\lambda(t;\ U))'$ (соответственно $x_0(t;\ U)$).

3. Предположения и результаты. Перечислим предположения, при различных наборах которых исследуются задачи Z_λ^1, Z_λ^2:

A. Действительные части собственных значений матрицы $A_{22}(t)$ отрицательны при всяком $t\in[t_0, T]$.

B. Объект управления $\mathscr{L}^0$ с законом движения $\dot{x}=A_0(t)x+B_0(t)u$ является вполне управляемым на $[t_0, T]$.

C. Объект управления с законом движения $\dot{y}=A_{22}(T)y+\alpha(0)B_2(T)u$ является вполне управляемым.

D. Никакая нетривиальная линейная комбинация строк $h^i(\tau)$, $i=1, \ldots, n$, матрицы $H_0(\tau)=X(T,\ \tau)B_0(\tau)$ не обращается тождественно в нуль ни на каком подынтервале отрезка $[t_0, T]$.

E. $\alpha(0)=0$.

Приведем теперь формулировки основных результатов о предельном поведении решений сингулярно возмущенных задач Z_λ^1 и Z_λ^2 при стремлении параметра λ к нулю.

Теорема 1. *Пусть для задачи Z_λ^1 выполнены предположения A, B, C, D. Тогда $\sigma^1(\lambda)\to\sigma_0$ при $\lambda\to+0$.*

Теорема 2. *Пусть для задачи Z_λ^2 выполнены предположения A, B, D. Тогда $\sigma^2(\lambda)\to\sigma_0$ при $\lambda\to+0$.*

Теорема 3. *Пусть для задачи Z_λ^2 выполнены предположения A, B, D, E. Тогда для любого числа $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$ такое, что если $\lambda\in(0,\ \delta)$ и $U\in P_\lambda^2$, то найдется $U_0\in P_0$, для которого выполнена оценка*

$$R(U,\ U_0)+R(\xi_\lambda,\ \xi_0)+\max_{[t_0,\ T]}\|\eta_\lambda(t)-\eta_0(t)\|<\varepsilon,$$

где $\xi_\lambda(t)=x_\lambda(t;\ U)$; $\xi_0(t)=x_0(t;\ U_0)$, $\eta_\lambda(t)=\int\limits_{t_0}^{t} y_\lambda(\tau;\ U)d\tau$, $\eta_0(t)=$

$$=-\int\limits_{t_0}^{t} A_{22}^{-1}(\tau)A_{21}(\tau)x_0(\tau;\ U_0)d\tau.$$

4. Доказательство теоремы 1. Установим сначала несколько вспомогательных фактов, имеющих и определенный самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Пусть выполнено предположение A. Пусть $\{\lambda_k\}$ — последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю, а функция $\tilde{U}\in\mathfrak{B}_r^*$ постоянна на некотором отрезке $[\theta,\ T]\subset(t_0,\ T]$. Тогда*

$$\|\tilde{x}_k(T)-\tilde{x}_0(T)\|+\|\tilde{y}_k(T)+A_{22}^{-1}(T)A_{21}(T)\tilde{x}_0(T)\|\to 0 \quad \text{при} \quad k\to\infty,$$

где $\tilde{x}_k(t)=x_{\lambda_k}(t;\ \tilde{U})$, $\tilde{y}_k(t)=y_{\lambda_k}(t;\ \tilde{U})$, $\tilde{x}_0(t)=x_0(t;\ \tilde{U})$.

Доказательство. Из (1.a), привлекая и теорему 2 из [7], заключаем, что $\{\tilde{x}_k(t)\}$ равномерно ограничена на $[t_0,\ T]$. Так как при $t\in[\theta,\ T]$ имеем

$$\|\tilde{x}_k(t)-\tilde{x}_0(t)\|\leqslant\|\Phi_{11}(t,\ t_0,\ \lambda_k)v_0-X(t,\ t_0)v_0\|+\|\Phi_{12}(t,\ t_0,\ \lambda_k)w_0\|+$$

$$+\left\|\int\limits_{t_0}^{\theta}[\Phi_{11}(t,\tau,\lambda_k)-X(t,\tau)]B_1(\tau)d\tilde{U}(\tau)\right\|+$$

$$+\left\|\int\limits_{t_0}^{\theta}\left[\frac{\alpha(\lambda_k)}{\lambda_k}\Phi_{12}(t,\ \tau,\ \lambda_k)+\alpha(0)X(t,\ \tau)A_{12}(\tau)A_{22}^{-1}(\tau)\right]B_2(\tau)d\tilde{U}(\tau)\right\|,$$

то $\{\tilde{x}_k\} \rightrightarrows \tilde{x}_0$ на $[t_0, T]$. Из (1.б) вытекает, что

$$\|\tilde{y}_k(T)+A_{22}^{-1}(T)A_{21}(T)\tilde{x}_0(T)\| \leqslant \|Y(T, t_0, \lambda_k)w_0\|+$$

$$+\left\|\frac{\alpha(\lambda_k)}{\lambda_k}\int_{t_0}^{\theta} Y(T, \tau, \lambda_k)B_2(\tau)d\tilde{U}(\tau)\right\|+$$

$$+\left\|\frac{1}{\lambda_k}\int_{t_0}^{\frac{T+\theta}{2}} Y(T, \tau, \lambda_k)A_{21}(\tau)\tilde{x}_k(\tau)d\tau\right\|+$$

$$+\left\|\frac{1}{\lambda_k}\int_{\frac{T+\theta}{2}}^{T} Y(T, \tau, \lambda_k)A_{21}(\tau)\tilde{x}_k(\tau)d\tau+A_{22}^{-1}(T)A_{21}(T)\tilde{x}_0(T)\right\|.$$

При $k\to\infty$ первые три слагаемых в правой части этого неравенства стремятся к нулю в силу леммы 3.2 из [8], а сходимость к нулю последнего слагаемого следует из $\{\tilde{x}_k\}\rightrightarrows\tilde{x}_0$ на $[t_0, T]$, равномерной ограниченности полного изменения матрицы $Y(T, \cdot, \lambda_k)$ (см. лемму 1 из [9]) и теоремы Хелли.

В следующих леммах потребуются еще некоторые обозначения. Через $K(\mu, \lambda)$ и $K_0(\mu)$ обозначим множества достижимости соответственно для объектов $\mathscr{L}_\lambda$ и $\mathscr{L}_0$ из начальных точек $(v_0', w_0')'$ и v_0 с помощью управлений $U\in\mathfrak{B}_r^*$, для которых $\rho^*[U]\leqslant\mu$. Как известно (см. [3]), множество $K(\mu, \lambda)$ выпукло и замкнуто и конечная точка $(v_T', w_T')'\in$ $\in\partial K(\sigma^1(\lambda), \lambda)$. Пусть $N(\lambda)$ — множество единичных внешних нормалей $(p', q')'$, $p\in\mathbf{R}^n$, $q\in\mathbf{R}^m$, к множеству $K(\sigma^1(\lambda), \lambda)$ в точке $(v_T', w_T')'$.

Лемма 2. *Пусть выполнены предположения A, B, C. Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *найдется* $\delta>0$ *такое, что если* $\lambda\in(0, \delta)$, *то* $(v_T', w_T')'\in$ $\in K(\sigma_0+\varepsilon, \lambda)$.

Доказательство. Допустим противное: существуют число $\varepsilon_0>0$ и сходящаяся к нулю последовательность $\{\lambda_k\}$ положительных чисел такие, что $(v_T', w_T')'\notin K(\sigma_0+\varepsilon_0, \lambda_k)$, $k=1, 2, \ldots$ Из выпуклости и замкнутости $K(\sigma_0+\varepsilon_0, \lambda_k)$ следует существование вектора $(p_k', q_k')'$, $p_k\in\mathbf{R}^n$, $q\in\mathbf{R}^m$, $\|(p_k', q_k')'\|=1$, обеспечивающего неравенство

$$p_k'(v-v_T)+q_k'(w-w_T)\leqslant 0 \text{ для всех } (v', w')'\in K(\sigma_0+\varepsilon_0, \lambda_k),\quad k=1, 2, \ldots; \tag{3}$$

не ограничивая общности, можем считать, что $(p_k', q_k')'\to(p_0', q_0')'$ при $k\to\infty$. В силу B при достаточно малом $\beta>0$ найдется управление $U_0\in\mathfrak{B}_r^*$, $\rho^*[U_0]\leqslant\sigma_0+\varepsilon_0/3$, переводящее объект $\mathscr{L}^0$ в состояние $v_T+\beta p_0$. Пусть $\theta\in(t_0, T)$ выбрано так, чтобы для функции

$$\tilde{U}(t)=\begin{cases} U_0(t), & t_0\leqslant t<\theta,\\ U_0(T), & \theta\leqslant t\leqslant T,\end{cases}$$

выполнялось неравенство

$$\beta\|p_0\|^2+\tilde{p}'p_0+\|q_0\|^2>0, \tag{4}$$

где $\tilde{p}=-\int\limits_{t_0}^{T} X(T, \tau)B_0(\tau)dU_0(\tau)+\int\limits_{t_0}^{T} X(T, \tau)B_0(\tau)d\tilde{U}(\tau)$.

Ясно, что $\rho^*[\tilde{U}]\leqslant\sigma_0+\varepsilon_0/3$ и, как вытекает из леммы 1,

$$\tilde{x}_k(T)\to v_T+\beta p_0+\tilde{p},\quad \tilde{y}_k(T)\to -A_{22}^{-1}(T)A_{21}(T)(v_T+\beta p_0+\tilde{p}) \text{ при } k\to\infty. \tag{5}$$

Положим $\theta_k = T - \sqrt{\lambda_k}$, $k=1, 2, \ldots$; тогда при всех достаточно больших k матрица

$$M_k = \frac{\alpha(\lambda_k)}{\lambda_k} \int_{\theta_k}^{T} Y(T, \tau, \lambda_k) B_2(\tau) B_2'(\tau) Y'(T, \tau, \lambda_k) d\tau$$

невырожденна (см. лемму 2 из [10]), а для функции

$$U_k(t) = \begin{cases} \tilde{U}(t), \ t_0 \leqslant t < \theta_k, \\ \tilde{U}(t) + \int_{\theta_k}^{t} B_2'(\tau) Y'(T, \tau, \lambda_k) d\tau M_k^{-1} [w_T + q_0 + \\ + A_{22}^{-1}(T) A_{21}(T)(v_T + \beta p_0 + \tilde{p})], \ \theta_k \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

справедлива оценка $\rho^*[U_k] \leqslant \sigma_0 + 2\varepsilon_0/3$. Если для краткости обозначить $x_k(t) = x_{\lambda_k}(t; U_k)$, $y_k(t) = y_{\lambda_k}(t; U_k)$, то, как нетрудно убедиться, при $t \geqslant \theta_k$

$$x_k(t) - \tilde{x}_k(t) = \int_{\theta_k}^{t} \left[\Phi_{11}(t, \tau, \lambda_k) + \frac{\alpha(\lambda_k)}{\lambda_k} \Phi_{12}(t, \tau, \lambda_k) B_2(\tau) \right] \times$$

$$\times B_2'(\tau) Y'(T, \tau, \lambda_k) M_k^{-1} [w_T + q_0 + A_{22}^{-1}(T) A_{21}(T)(v_T + \beta p_0 + \tilde{p})] d\tau.$$

Отсюда видно, что $\{x_k - \tilde{x}_k\} \rightrightarrows 0$ на $[t_0, T]$; из (5) теперь следует:

$$\lim_{k\to\infty} x_k(T) = \lim_{k\to\infty} \tilde{x}_k(T) = v_T + \beta p_0 + \tilde{p}. \qquad (6)$$

Далее, легко проверить, что

$$y_k(T) - \tilde{y}_k(T) = \frac{1}{\lambda_k} \int_{\theta_k}^{T} Y(T, \tau, \lambda_k) A_{21}(\tau) (x_k(\tau) - \tilde{x}_k(\tau)) d\tau +$$

$$+ w_T + q_0 + A_{22}^{-1}(T) A_{21}(T)(v_T + \beta p_0 + \tilde{p});$$

из (5) теперь следует:

$$\lim_{k\to\infty} y_k(T) = w_T + q_0. \qquad (7)$$

Поскольку $(x_k'(T), y_k'(T))' \in K(\sigma_0 + \varepsilon_0, \lambda_k)$, то (см. (3)) $p_k'(x_k(T) - v_T) + q_k'(y_k(T) - w_T) \leqslant 0$, $k=1, 2, \ldots$ Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$ с учетом (6) и (7), получим противоречие с допущением (4).

Лемма 3. *Пусть выполнены предположения A, B, C. Пусть $\{\lambda_k\}$ — последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю, а $\{(p_k', q_k')'\}$ — последовательность векторов такая, что $(p_k', q_k')' \in N(\lambda_k)$ и $(p_k', q_k')' \to (p_0', q_0')'$ при $k \to \infty$. Тогда $q_0 = 0$.*

Доказательство. Сначала покажем, что существует такая константа $c > 0$, что

$$\liminf_{k\to\infty} \sigma^1(\lambda_k) \geqslant c. \qquad (8)$$

В самом деле, пусть указанный в (8) предел равен нулю; не умаляя общности, можно даже считать, что $\sigma^1(\lambda_k) \to 0$ при $k \to \infty$. Если $U_k \in P_{\lambda_k}^1$, $k=1, 2, \ldots$, то, очевидно,

$$v_T = \lim_{k\to\infty} x_k(T) = \lim_{k\to\infty} \Phi_{11}(T, t_0, \lambda_k) v_0 + \lim_{k\to\infty} \Phi_{12}(T, t_0, \lambda_k) w_0 +$$

$$+\lim_{k\to\infty}\int_{t_0}^{T}\left[\Phi_{11}(T,\tau,\lambda_k)B_1(\tau)+\frac{\alpha(\lambda_k)}{\lambda_k}\Phi_{12}(T,\tau,\lambda_k)B_2(\tau)\right]dU_k(\tau)=$$

$$=X(T,t_0)v_0=X(T,t_0)v_0+\int_{t_0}^{T}X(T,\tau)B_0(\tau)d\mathcal{U}(\tau),$$

где использовано управление $\mathcal{U}(t)\equiv 0$ на $[t_0, T]$; следовательно, $\mathcal{U}\in P_0$, причем $\rho^*[\mathcal{U}]=0$. Но, согласно B, имеем $\sigma_0=\rho^*[\mathcal{U}]>0$; полученное противоречие и доказывает неравенство (8).

Допустим теперь, что утверждение леммы неверно, так что $\|q_0\|\neq 0$. Выберем числа $\gamma>0$ и k_0 так, чтобы для всякого $k>k_0$ и при $\theta_k=T-\sqrt{\lambda_k}$ выполнялись неравенства

$$p_0'(X(T,t_0)v_0-v_T)+\gamma\|q_0\|^2>0; \tag{9.a}$$

$$\int_{\theta_k}^{T}\|\alpha(\lambda_k)B_2'(\tau)Y'(T,\tau,\lambda_k)\|d\tau\|M_k^{-1}(w_T+\gamma q_0+$$

$$+A_{22}^{-1}(T)A_{21}(T)X(T,t_0)v_0)\|<c/2. \tag{9.б}$$

Если обозначить $x_k^0(t)=x_{\lambda_k}(t;\mathcal{U})$, $y_k^0(t)=y_{\lambda_k}(t;\mathcal{U})$, то в силу леммы 1

$$x_k^0(T)\to X(T,t_0)v_0,\quad y_k^0(T)\to -A_{22}^{-1}(T)A_{21}(T)X(T,t_0)v_0 \quad\text{при}\quad k\to\infty. \tag{10}$$

Определим функцию

$$\hat U_k(t)=\begin{cases}\mathcal{U}(t), & t_0\leqslant t<\theta_k,\\ \int_{\theta_k}^{t}B_2'(\tau)Y'(T,\tau,\lambda_k)d\tau M_k^{-1}[w_T+\gamma q_0+ & \\ +A_{22}^{-1}(T)A_{21}(T)X(T,t_0)v_0], & \theta_k\leqslant t\leqslant T,\end{cases}$$

и положим $\hat x_k(t)=x_{\lambda_k}(t;\hat U_k)$, $\hat y_k(t)=y_{\lambda_k}(t;\hat U_k)$. Тогда, учитывая (10), можно установить, что

$$\lim_{k\to\infty}\hat x_k(T)=\lim_{k\to\infty}x_k^0(T)=X(T,t_0)v_0,$$

$$\lim_{k\to\infty}\hat y_k(T)=\lim_{k\to\infty}y_k^0(T)+w_T+\gamma q_0+A_{22}^{-1}(T)A_{21}(T)X(T,t_0)v_0=w_T+\gamma q_0.$$

Кроме того, согласно (9.б), $\rho^*[\hat U_k]\leqslant c/2$ для всех достаточно больших k. Следовательно, $(\hat x_k'(T), \hat y_k'(T))'\in K(\sigma^1(\lambda_k),\lambda_k)$, а потому $p_k'(\hat x_k(T)-v_T)+q_k'(\hat y_k(T)-w_T)\leqslant 0$. В результате предельного перехода при $k\to\infty$ в этом неравенстве получаем противоречие с (9.a).

Напомним ряд утверждений [2], необходимых для дальнейшего. Введем матрицу $H(\tau,\lambda)=\Phi(T,\tau,\lambda)\left(B_1'(\tau)\ \frac{\alpha(\lambda)}{\lambda}B_2'(\tau)\right)'$; при всех достаточно малых $\lambda>0$ на любом фиксированном отрезке $[\theta_*,\theta^*]\subset(t_0,T)$ эта матрица равномерно ограничена. В случае задачи Z_λ^1 справедливо равенство

$$\sigma^1(\lambda)=\min\rho[H'(\cdot,\lambda)l], \tag{11}$$

где минимум берется по множеству векторов $l\in\mathbf{R}^{n+m}$, удовлетворяющих условию

$$l'((v_T', w_T')'-\Phi(T,t_0,\lambda)(v_0', w_0')')=1, \tag{12}$$

причем решение задачи (11), (12) является внешней нормалью к множеству $K(\sigma^1(\lambda), \lambda)$ в точке $(v'_T, w'_T)'$. В случае задачи Z_0 справедливо равенство

$$\sigma_0 = \min \rho[H'_0(\cdot)\bar{l}], \tag{13}$$

где минимум берется по множеству векторов $\bar{l} \in \mathbf{R}^n$, удовлетворяющих условию

$$\bar{l}'(v_T - X(T, t_0)v_0) = 1, \tag{14}$$

причем решение задачи (13), (14) является внешней нормалью к множеству $K_0(\sigma_0)$ в точке $v_T \in \partial K_0(\sigma_0)$.

Лемма 4. *Пусть выполнены предположения A, B, C, D. Пусть $\{\lambda_k\}$ — последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю, а $\{l_k\}$ — последовательность векторов из $\mathbf{R}^{n+m}$ — решений задачи (11), (12) при $\lambda = \lambda_k$. Тогда $\{l_k\}$ — ограниченная последовательность.*

Доказательство. Допустим, что $\{l_k\}$ неограниченна; без потери общности будем считать, что $\|l_k\| \to \infty$, $l_k/\|l_k\| \to (p'_0, q'_0)'$ при $k \to \infty$. Из (11) вытекает, что при всяком $\tau \in (t_0, T)$

$$\frac{\sigma^1(\lambda_k)}{\|l_k\|} \geqslant \gamma\left[H'(\tau, \lambda_k)\frac{l_k}{\|l_k\|}\right], \quad k = 1, 2, \ldots$$

Так как $q_0 = 0$ (см. лемму 3), а, согласно лемме 2, $\{\sigma^1(\lambda_k)\}$ — ограниченная последовательность, то в последнем неравенстве можно сделать предельный переход при $k \to \infty$. В результате придем к соотношению

$$\sum_{i=1}^{n} p_0^i h^i(\tau) = 0, \quad (p_0^1, \ldots, p_0^n)' = p_0 \neq 0, \quad \tau \in (t_0, T),$$

противоречащему предположению D.

Доказательство теоремы 1 проведем методом от противного. Если утверждение теоремы неверно, то в силу леммы 2 найдутся $\{\lambda_k\} \to 0$, $\lambda_k > 0$ и $\tilde{\sigma} > 0$ такие, что

$$\lim_{k \to \infty} \sigma^1(\lambda_k) = \tilde{\sigma} < \sigma_0. \tag{15}$$

Пусть $l_k = (p'_k, q'_k)'$ — решение задачи (11), (12) при $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots$; можно считать, что $(p'_k, q'_k)' \to (p'_0, q'_0)'$ при $k \to \infty$. Запишем равенство (12) для $l = l_k$ и $\lambda = \lambda_k$ и перейдем в нем к пределу при $k \to \infty$; так как $q_0 = 0$, то получим (ср. с (14)):

$$p'_0(v_T - X(T, t_0)v_0) = 1. \tag{16}$$

Пусть теперь $\theta \in (t_0, T)$ выбрано так, что

$$\max_{t_0 \leqslant t \leqslant T} \gamma[H'_0(t)p_0] \leqslant \max_{t_0 \leqslant t \leqslant \theta} \gamma[H'_0(t)p_0] + \frac{\sigma_0 - \tilde{\sigma}}{2}. \tag{17}$$

Предельный переход при $k \to \infty$ в неравенстве $\max\limits_{t_0 \leqslant t \leqslant \theta} \gamma[H'(t, \lambda_k)l_k] \leqslant \sigma^1(\lambda_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, с учетом (15) и (17) дает

$$\rho[H'_0(\cdot)p_0] \leqslant \tilde{\sigma} + \frac{\sigma_0 - \tilde{\sigma}}{2} < \sigma_0. \tag{18}$$

Однако (16) и (18) противоречат свойству (13) числа σ_0.

5. Доказательство теоремы 2. Начнем с некоторых вспомогательных утверждений.

Лемма 5. *Пусть выполнены предположения A, B. Пусть $\{\lambda_k\}$ — последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю, а уп-*

равление $U_0 \in \mathfrak{V}_r^*$ *таково, что* $x_0(T)=v_T$; *здесь* $x_0(t)=x_0(t;\ U_0)$. *Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *найдется последовательность управлений* $\{U_k\}$, $U_k \in \mathfrak{V}_r^*$, *такая, что*

$$x_k(T)=v_T, \quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ \limsup_{k\to\infty} \rho^*[U_k] \leqslant \rho^*[U_0]+\varepsilon;$$

здесь $x_k(t)=x_{\lambda_k}(t;\ U_k)$.

Доказательство. Введем для краткости записи $E_\lambda(\tau)=\Phi_{11}(T,\ \tau,\ \lambda)B_1(\tau)+\dfrac{\alpha(\lambda)}{\lambda}\Phi_{12}(T,\ \tau,\ \lambda)B_2(\tau)$. Как показано в [7], матрица $M(\lambda_k)=\int\limits_{t_0}^{T} E_{\lambda_k}(\tau)E'_{\lambda_k}(\tau)d\tau$ стремится при $\lambda_k\to 0$ к невырожденной матрице.

Фиксируем $\varepsilon>0$, положим $\beta=\sup\limits_{\{\lambda_k\}}\|M^{-1}(\lambda_k)\| \int\limits_{t_0}^{T}\|E_{\lambda_k}(\tau)\|d\tau$ и выберем $\theta\in(t_0,\ T)$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\left\|\int\limits_{\theta}^{T} X(T,\ \tau)B_0(\tau)d(U_0(\tau)-U_0(T))\right\| \leqslant \varepsilon/2(\beta+1). \tag{19}$$

Далее, зададим функцию $\tilde U(t)$, как это указано в доказательстве леммы 2. Ясно, что $\rho^*[\tilde U]\leqslant\rho^*[U_0]$, и в силу леммы 2 при всех достаточно больших k

$$\|\tilde x_k(T)-\tilde x_0(T)\|\leqslant\varepsilon/2(\beta+1); \tag{20}$$

здесь $\tilde x_k(t)=x_{\lambda_k}(t;\ \tilde U)$, $\tilde x_0(t)=x_0(t;\ \tilde U)$. Наконец, определим

$$U_k(t)=\tilde U(t)+\int\limits_{t_0}^{t} E'_{\lambda_k}(\tau)d\tau M^{-1}(\lambda_k)(v_T-\tilde x_k(T)), \quad k=1,\ 2,\ \ldots$$

Нетрудно убедиться, что $\{U_k\}$ — искомая последовательность: равенство $x_k(T)=v_T$ очевидно, а с учетом (19) и (20) получаем

$$\rho^*[U_k]\leqslant\rho^*[\tilde U]+\|v_T-\tilde x_k(T)\| \int\limits_{t_0}^{T}\|E_{\lambda_k}(\tau)\|d\tau\|M^{-1}(\lambda_k)\|\leqslant$$

$$\leqslant\rho^*[U_0]+(\|v_T-\tilde x_0(T)\|+\|\tilde x_0(T)-\tilde x_k(T)\|)\beta\leqslant\rho^*[U_0]+\varepsilon.$$

Лемма 6. *Пусть выполнены предположения А, В. Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *найдется* $\delta>0$ *такое, что если* $\lambda\in(0,\ \delta)$, *то* $\sigma^2(\lambda)\leqslant\sigma_0+\varepsilon$.

Доказательство достаточно просто проводится от противного с привлечением леммы 5.

Напомним следующий результат [2]: в случае задачи Z_λ^2 справедливо равенство

$$\sigma^2(\lambda)=\min\rho[E'_\lambda(\cdot)\bar l], \tag{21}$$

где минимум берется по множеству векторов $\bar l\in\mathbf{R}^n$, удовлетворяющих условию

$$\bar l'(v_T-\Phi_{11}(T,\ t_0,\ \lambda)v_0-\Phi_{12}(T,\ t_0,\ \lambda)w_0)=1. \tag{22}$$

Лемма 7. *Пусть выполнены предположения А, В. Пусть* $\{\lambda_k\}$ — *последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю, а* $\{\bar l_k\}$ — *последовательность векторов из* $\mathbf{R}^n$ — *решений задачи (21), (22) при* $\lambda=\lambda_k$. *Тогда* $\{\bar l_k\}$ — *ограниченная последовательность.*

Доказательство этой леммы принципиально не отличается от изложенного выше обоснования леммы 4.

Доказательство теоремы 2 не приводится, поскольку оно без особого труда получается с помощью рассуждений, вполне аналогичных тем, которыми была установлена теорема 1 (с использованием приведенных лемм).

6. Доказательство теоремы 3. Предварительно установим следующую лемму, имеющую приложения и в теории функций.

Лемма 8. *Пусть* $\{\Phi_k\}$ — *такая последовательность* r-*вектор-функций* $\Phi_k(t)=(\varphi_k^1(t), \ldots, \varphi_k^r(t))'$, $t_0\leqslant t\leqslant T$, $\Phi_k(t_0)=0$, $k=1, 2, \ldots$, *с ограниченным полным изменением* $\rho^*[\Phi_k]<\infty$, $k=1, 2, \ldots$, *что*:

а) *в каждой точке* $t\in[t_0, T]$ *она сходится к функции* $\Phi_0(t)=(\varphi_0^1(t), \ldots, \varphi_0^r(t))'$, *причем* $\rho^*[\Phi_0]<\infty$, $\Phi_0(t_0+0)=\Phi_0(t_0)$, $\Phi_0(T-0)=\Phi_0(T)$, $\min\limits_{0\leqslant\mu\leqslant 1}\|\Phi_0(\theta)-(\mu\Phi_0(\theta+0)+(1-\mu)\Phi_0(\theta-0))\|=0$ *при всяком* $\theta\in(t_0, T)$;

б) $\rho^*[\Phi_k]\to\rho^*[\Phi_0]$ *при* $k\to\infty$. *Тогда* $R(\Phi_k, \Phi_0)\to 0$ *при* $k\to\infty$.

Доказательство. Покажем сначала, что в условиях леммы для всякого $t\in[t_0, T]$ и любого $k=1, 2, \ldots$ найдутся точка $\tau_k(t)\in[t_0, T]$ и число $\mu_k(t)\in[0, 1]$ такие, что

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{t_0\leqslant t\leqslant T}\max_{1\leqslant i\leqslant r}\max\{|t-\tau_k(t)|, |g_k^i(t)-\varphi_k^i(t)|\}=0; \tag{23}$$

здесь для краткости

$$g_k^i(t)=\mu_k(t)\varphi_0^i(\tau_k(t)+0)+(1-\mu_k(t))\varphi_0^i(\tau_k(t)-0),$$

$$i=1, \ldots, r, \quad k=1, 2, \ldots \tag{24}$$

Допустим, что (23) не имеет места. Тогда существуют число $\varepsilon_0>0$, подпоследовательность последовательности $\{\Phi_k\}$ (которую обозначим тем же символом), последовательность $\{s_k\}\subset[t_0, T]$ (пусть $s_k\to s_0$ при $k\to\infty$) и индекс $j\in\{1, \ldots, r\}$ такие, что

$$\min_{0\leqslant\mu\leqslant 1,\ t_0\leqslant t\leqslant T}\max\{|t-s_k|, |\varphi_k^j(s_k)-(\mu\varphi_0^j(t+0)+(1-\mu)\varphi_0^j(t-0))|\}>\varepsilon_0.$$

Отсюда заключаем, что для достаточно больших k точка $\varphi_k^j(s_k)$ лежит вне ε_0-окрестности отрезка с концами $\varphi_0^j(s_0+0)$ и $\varphi_0^j(s_0-0)$, т. е.

$$\min_{0\leqslant\mu\leqslant 1}|\varphi_k^j(s_k)-(\mu\varphi_0^j(s_0+0)+(1-\mu)\varphi_0^j(s_0-0))|>\varepsilon_0 \text{ при } k>k_0. \tag{25}$$

Выберем $\eta\in(0, \varepsilon_0/2)$ так, чтобы для всех $t\in\Delta^-=(s_0-\eta, s_0)\cap(t_0, T)$ или $t\in\Delta^+=(s_0, s_0+\eta)\cap(t_0, T)$ выполнялось неравенство

$$|\varphi_0^j(t)-\varphi_0^j(s_0-0)|<\varepsilon_0/8 \text{ или } |\varphi_0^j(t)-\varphi_0^j(s_0+0)|<\varepsilon_0/8 \tag{26}$$

соответственно. Далее, фиксируем разбиение $\{\theta_\nu\}$, $\nu=1, \ldots, m$, отрезка $[t_0, T]$, при котором для полного изменения $\rho^*[\varphi_0^j]$ функции $\varphi_0^j(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant T$, справедлива оценка

$$\rho^*[\varphi_0^j]<\sum_{\nu=2}^{m}|\varphi_0^j(\theta_\nu)-\varphi_0^j(\theta_{\nu-1})|+\varepsilon_0/8; \tag{27}$$

можно считать, что это разбиение содержит точку s_0 и по крайней мере по одной точке из Δ^- и Δ^+ (если, конечно, они не пусты). Наконец, возьмем k_0 столь большим, что

$$|\varphi_k^j(\theta_\nu)-\varphi_0^j(\theta_\nu)|<\varepsilon_0/8m \text{ при } k>k_0,\ \nu=1, \ldots, m. \tag{28}$$

Пусть при всех $k=1, 2, \ldots$ имеем $s_k>s_0$ (случай $s_k<s_0$ рассматривается аналогично; равенство $s_k=s_0$ невозможно из-за (25) и (28)). Обозначим через θ^+ ближайшую справа к s_0 точку разбиения $\{\theta_\nu\}$; до-

пустим, что при $k>k_0$ выполняется и неравенство $\theta^+>s_k$. Тогда из (25), (26), (28) следует

$$|\varphi_k^j(\theta^+)-\varphi_k^j(s_k)|+|\varphi_k^j(s_k)-\varphi_k^j(s_0)|\geqslant|\varphi_0^j(s_0+0)-\varphi_k^j(s_k)|-$$

$$-|\varphi_k^j(\theta^+)-\varphi_0^j(\theta^+)|-|\varphi_0^j(\theta^+)-\varphi_0^j(s_0+0)|+|\varphi_k^j(s_k)-\varphi_0^j(s_0)|-$$

$$-|\varphi_k^j(s_0)-\varphi_0^j(s_0)|\geqslant|\varphi_0^j(s_0+0)-\varphi_0^j(s_0)|+\varepsilon_0-\varepsilon_0/8m-$$

$$-\varepsilon_0/8-\varepsilon_0/8>|\varphi_0^j(\theta^+)-\varphi_0^j(s_0)|-|\varphi_0^j(s_0+0)-\varphi_0^j(\theta^+)|+$$

$$+5\varepsilon_0/8\geqslant|\varphi_0^j(\theta^+)-\varphi_0^j(s_0)|+\varepsilon_0/2.$$

Используя эту оценку, а также (27) и (28), находим:

$$\rho^*[\varphi_0^j]<2\sum_{\nu=1}^{m}|\varphi_0^j(\theta_\nu)-\varphi_k^j(\theta_\nu)|+\rho^*[\varphi_k^j]+\varepsilon_0/8-\varepsilon_0/2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{8m}\varepsilon_0 m-\frac{3\varepsilon_0}{8}+\rho^*[\varphi_k^j]=\rho^*[\varphi_k^j]-\frac{\varepsilon_0}{8},$$

что, однако, противоречит следующему факту, вытекающему из условия б) леммы: $\rho^*[\varphi_k^i]\to\rho^*[\varphi_0^i]$ при $k\to\infty$, $i=1,\ldots,r$.

Таким образом, равенство (23) доказано. Утверждение леммы немедленно получается, если принять во внимание это равенство и лемму 2 из [4, ч. I].

Доказательство теоремы 3 проведем методом от противного. Если утверждение теоремы неверно, то существуют число $\varepsilon_0>0$, последовательность $\{\lambda_k\}\to 0$, $\lambda_k>0$, и последовательность $\{U_k\}$, $U_k\in P^2_{\lambda_k}$, такие, что для всякого $U_0\in P_0$

$$R(U_k,\ U_0)+R(x_k,\ x_0)+\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\left\|\int_{t_0}^{t}(y_k(\tau)+A_{22}^{-1}(\tau)A_{21}(\tau)x_0(\tau))\,d\tau\right\|>\varepsilon_0,$$

$$k=1,\ 2,\ \ldots; \tag{29}$$

здесь $x_k(t)=x_{\lambda_k}(t;\ U_k)$, $y_k(t)=y_{\lambda_k}(t;\ U_k)$, $x_0(t)=x_0(t;\ U_0)$.

В силу теоремы 2 имеем: $\rho^*[U_k]\to\sigma_0$ при $k\to\infty$. Отсюда с учетом результатов [7] заключаем, что $\{\rho^*[x_k]\}$ — ограниченная последовательность. Теорема Хелли позволяет теперь выделить такую подпоследовательность последовательности $\{U_k\}$ (она обозначается тем же символом), что $\{U_k\}$ и $\{x_k\}$ сходятся в каждой точке $t\in[t_0,\ T]$ к некоторым вектор-функциям $\tilde U(t)$ и $\tilde x(t)$ соответственно. Непосредственно проверяется, что $\tilde x(t)=x_0(t;\ \tilde U)$ и $\rho^*[\tilde U]\leqslant\sigma_0$, а потому $\tilde U\in P_0$.

Так как $\{U_k\}$ и $\tilde U$ удовлетворяют условиям леммы 8, то

$$R(U_k,\ \tilde U)\to 0\ \text{ при }\ k\to\infty. \tag{30}$$

Далее, согласно лемме 8, имеет место соотношение (23), в котором (как и в (24)) вместо $\varphi_k^i(t)$ и $\varphi_0^i(t)$ записаны соответствующие компоненты векторов $U_k(t)$ и $\tilde U(t)$. Это соотношение вместе с леммой 2 из [4, ч. I], дает возможность утверждать, что

$$R(x_k,\ \tilde x)\to 0\ \text{ при }\ k\to\infty. \tag{31}$$

Наконец, из (1) и (2) без особого труда получаем

$$\lim_{k\to\infty}\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\left\|\int_{t_0}^{t}(y_k(\tau)+A_{22}^{-1}(\tau)A_{21}(\tau)\tilde x(\tau))\,d\tau\right\|=0. \tag{32}$$

Остается заметить, что (30)—(32) несовместимы с неравенством (29), записанным для $U_0=\tilde U\in P_0$ и $x_0(\tau)=\tilde x(\tau)$.

Литература

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов.— М.: Наука, 1976.— 392 с.
2. Красовский Н. Н. Теория управления движением/Линейные системы.—М.: Наука, 1968.—476 с.
3. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления.—М.: Наука, 1972.—576 с.
4. Гичев Т. Р., Розов Н. Х.— Дифференц. уравнения, 1979, т. 15, № 11, с. 1933—1939; 1980, т. 16, № 2, с. 208—213.
5. Гичев Т. Р., Розов Н. Х.— В сб.: Всесоюзная конференция по асимптотическим методам в теории сингулярно-возмущенных уравнений. Тезисы докладов. Ч. I.— Алма-Ата: Наука, 1979, с. 47—49.
6. Сендов Бл. Хаусдорфовые приближения.— София: БАН, 1979.—372 с.
7. Gičev T. R., Dontchev A. L. Linear optimal control system with singular perturbation and convex performance index.— Serdica, 1978, vol. 4, p. 24—35.
8. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.— М.: Наука, 1973.—272 с.
9. Gičev T. R., Dontchev A. L. Convergence of the solution of singularly perturbed linear differential equations.— Годишн. на вуз, сер. Прилож. мат., 1979, т. 15, № 1, с. 69—82.
10. Dontchev A. L., Gičev T. R. Convex singularly perturbed optimal control problem with fixed final state. Controllability and convergence.— Math. Operationsforsch. Statist., ser. Optimization, 1979, vol. 10, N 3, p. 345—355.

Институт математики и механики
Болгарской Академии наук,
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
17 сентября 1982 г.

УДК 517.977.1

Е. Л. ТОНКОВ

О МНОЖЕСТВЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Эта статья продолжает исследования работ [1—6] и посвящена структуре множества управляемости уравнения

$$\dot{x}=A_0(t)x+B_0(t)u, \quad t\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

фазовым пространством которого служит евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ размерности n, а множеством допустимых управлений — совокупность всех измеримых функций $t\to u(t)$ со значениями в фиксированном *компакте* $U\subset\mathbb{R}^m$. Часть результатов статьи анонсирована в [4, 5].

1. Основные определения и обозначения. Удобно в дальнейшем отождествлять уравнение (1) с функцией $t\to\varphi_0(t)=(A_0(t), B_0(t))$, определенной на $\mathbb{R}=(-\infty, \infty)$ и принимающей значения в пространстве $\mathrm{Hom}\,(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^n)$ линейных операторов из $\mathbb{R}^{n+m}$ в $\mathbb{R}^n$. Всюду далее предполагается, что функция φ_0 *ограничена и равномерно непрерывна на* $\mathbb{R}$.

Пусть $D_\tau(\varphi_0, \sigma)\doteq D_\tau(\varphi_0, \sigma, U)$ — множество управляемости уравнения φ_0 на отрезке $[\tau, \tau+\sigma]$. Напомним, что $x^0\in D_\tau(\varphi_0, \sigma)$ в том и только в том случае, если найдется измеримое управление $u^0: [\tau, \tau+\sigma]\to U$ такое, что задача

$$\dot{x}=A_0(t)x+B_0(t)u^0(t), \quad x(\tau)=x, \quad x(\tau+\sigma)=0,$$

имеет решение. Уравнение φ_0 называется *глобально управляемым* *),

*) Часто пользуются таким определением (см., например, [9]): уравнение φ_0 глобально управляемо, если $D_0(\varphi_0)=\mathbb{R}^n$, где $D_0(\varphi_0)$ — объединение $D_0(\varphi_0,\sigma)$ по всем $\sigma\geqslant 0$. Легко показать, что эти два определения эквивалентны.