Ю. Г. Никоноров, Гомотопический аналог теоремы Хелли и существование квазинеподвижных точек, *Сиб. матем. журн.*, 1994, том 35, номер 3, 644–646

Сибирский математический журнал
Май—июнь, 1994. Том 35, № 3

УДК 515.143

ГОМОТОПИЧЕСКИЙ АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ХЕЛЛИ И СУЩЕСТВОВАНИЕ КВАЗИНЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК

Ю. Г. Никоноров

В данной работе доказан гомотопический аналог известной теоремы Хелли о выпуклых множествах в $\mathbb{R}^n$. Среди разнообразных приложений — доказательство существования квазинеподвижных по Уламу (см. [1, с. 63]) точек для некоторого класса топологических пространств.

Будем обозначать через S^i и B^i соответственно i-мерную сферу и i-мерный шар, через $\mathrm{Sim}_k = [P_1, P_2, \dots, P_k]$ — $(k-1)$-мерный симплекс с вершинами $P_1, P_2, \dots, P_k$, через $[P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_s}]$ — подсимплекс с вершинами $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_s}$.

Пусть T — топологическое пространство. Далее будем считать, что $\pi_{-1}(T) = 0$ означает непустоту пространства T, при $i \geqslant 0$ равенство $\pi_i(T) = 0$ означает, что любое непрерывное отображение из i-мерной сферы в T продолжается до непрерывного отображения $(i+1)$-мерного шара (S^i отождествляется с границей B^{i+1}). В соответствии с общепринятой терминологией при $\pi_0(T) = 0$ будем называть T *линейно связным*, при $\pi_1(T) = 0$ — *односвязным*.

Теорема 1. *Пусть T — топологическое пространство, и пусть A_1, $A_2, \dots, A_k$ — открытые множества в T,*

$$\pi_{k-2}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = 0, \quad \pi_{k-s-2}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_s}) = 0$$

при $s = 1, \dots, k-1$. Тогда $\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i \neq \varnothing$.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится одно из следствий леммы Шпернера (см. [2, с. 505]).

Предложение. *Пусть Sim_k покрыт замкнутыми множествами B_1, $B_2, \dots, B_k$, причем $[P_{i_1}, \dots, P_{i_s}] \subset B_{i_1} \cup \dots \cup B_{i_s}$. Тогда $\bigcap\limits_{i=1}^{k} B_i \neq \varnothing$.*

Допустим, что $\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i = \varnothing$. Пользуясь гомеоморфностью $[P_{i_1}, \dots, P_{i_s}]$ и B^{s-1}, а также условиями на гомотопические классы, нетрудно построить по индукции непрерывное отображение $f : \mathrm{Sim}_k \to T$ со следующими свойствами:

$$f(\mathrm{Sim}_k) \subset \bigcup_{i=1}^{k} A_i, \quad f([P_{i_1}, \dots, P_{i_s}]) \subset \bigcap_{i \notin \{i_1, \dots, i_s\}} A_i$$

при $s = 1, \dots, k-1$. Рассмотрим множества $B_i = \mathrm{Sim}_k \setminus f^{-1}(A_i)$, B_i — замкнутые множества в Sim_k. Докажем, что $[P_{i_1}, \dots, P_{i_s}] \subset B_{i_1} \cup \dots \cup B_{i_s}$

при $s = 1, \dots, k-1$. Допустим противное, пусть $x \in [P_{i_1}, \dots, P_{i_s}]$ и $x \notin B_{i_1} \cup \dots \cup B_{i_s}$. Но в таком случае $f(x) \in A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_s}$, кроме того, по построению $f(x) \in \bigcap\limits_{i \notin \{i_1, \dots, i_s\}} A_i$, т. е. $\bigcap\limits_{i=1}^{k} B_i \neq \varnothing$, чего не может быть. Также легко заметить, что $\mathrm{Sim}_k \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} B_i$, иначе было бы $\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i \neq \varnothing$. Покрытие Sim_k множествами B_i удовлетворяет условиям предложения. Значит, существует точка $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} B_i$, но тогда $f(x) \notin \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$, это противоречит тому, что $f(\mathrm{Sim}_k) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$. Следовательно, допущение $\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i = \varnothing$ неверно.

Из теоремы 1 непосредственно получаем

Следствие 1. *Пусть T — односвязное топологическое пространство, A_1, A_2, A_3 — открытые линейно связные множества в T с непустыми попарными пересечениями, $T \subset A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Тогда $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \neq \varnothing$.*

Следствие 2. *Пусть T — локально линейно связное и односвязное топологическое пространство, A и B — связные открытые множества в T такие, что $A \cap B = \varnothing$; $T \setminus A$ и $T \setminus B$ — связные множества. Тогда $T \setminus (A \cup B)$ — связное множество.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если T не является связным, то, поскольку $T \setminus A$ и $T \setminus B$ — связные множества, легко получить, что A и B — единственные компоненты в T, и в этом случае $T \setminus (A \cup B) = \varnothing$. Пусть T — связное пространство. Допустим, что $T \setminus (A \cup B)$ несвязно, тогда существуют непересекающиеся множества C_1 и C_2 такие, что $T \setminus (A \cup B) \subset C_1 \cup C_2$; при $i = 1, 2$ $(T \setminus (A \cup B)) \cap C_i \neq \varnothing$. Легко видеть, что среди компонент связности множества C_i существует компонента, пересекающаяся как с A, так и с B (иначе либо $T \setminus B$, либо $T \setminus A$ было бы несвязным). Обозначим одну из таких компонент через $\widetilde{C}_i$. Рассмотрим множества: $\widetilde{A}$ — объединение A и всех отличных от $\widetilde{C}_1$ компонент C_1 и C_2, пересекающихся с A; $\widetilde{B}$ — объединение B и всех компонент, отличных от $\widetilde{C}_1$ и не вошедших в $\widetilde{A}$. Так как T связное, то $\widetilde{B}$ — связное множество. $\widetilde{C}_2 \subset \widetilde{A}$, следовательно, попарные пересечения множеств $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}_1$ непусты, по построению $\widetilde{A} \cap \widetilde{B} \cap \widetilde{C}_1 = \varnothing$. Но T — локально линейно связное пространство, значит, $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{C}_1$ — линейно связные открытые множества, и мы получили противоречие со следствием 1. Значит, $T \setminus (A \cup B)$ — связное множество.

Непрерывное отображение $\eta : T \to T$ называется ***инволюцией***, если оно совпадает со своим обратным. Пусть f — непрерывное отображение T в себя. Следуя Уламу, назовем $p \in T$ квазинеподвижной точкой преобразования f относительно непрерывной функции $\varphi : T \to \mathbb{R}^n$, если $\varphi(p) = \varphi(f(p))$. Следующая теорема показывает, что для определенного класса пространств любая инволюция обладает квазинеподвижной точкой относительно произвольного непрерывного отображения топологического пространства в плоскость $\mathbb{R}^2$.

Теорема 2. *Пусть T — связное, локально линейно связное и односвязное топологическое пространство с инволюцией η. Пусть $\varphi : T \to \mathbb{R}^2$ — непрерывное отображение. Тогда найдется точка $p \in T$ такая, что $\varphi(p) = \varphi(\eta(p))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если инволюция обладает неподвижной точкой, то все очевидно. Пусть неподвижных точек не существует. Рассмотрим отображение $f : T \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = \varphi(x) - \varphi(\eta(x))$. Допустим, что утверждение теоремы неверно, тогда $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Покроем $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ открытыми множествами C_1, C_2, D_1, D_2 со следующими условиями:

$$C_1 = -C_2, \quad D_1 = -D_2, \quad C_1 \cap C_2 = \varnothing, \quad D_1 \cap D_2 = \varnothing, \quad C_i \cap D_j \neq \varnothing.$$

Рассмотрим компоненты связности прообразов множеств C_1, C_2, D_1, D_2 при отображении f. Обозначим множество этих компонент через W. Заметим, что элементы множества W разбиваются на пары вида $(A, \eta(A))$, где $A \cap \eta(A) = \varnothing$.

Назовем подмножество $V \subset W$ *хорошим*, если выполняются следующие условия:

1) $\bigcup\limits_{A \in M} A$ — связное множество,

2) $\eta(A) \notin V$ для любого $A \in V$.

Легко видеть, что хорошие множества, упорядоченные по включению, образуют индуктивное множество. По лемме Цорна существует M — максимальное хорошее множество. Очевидно, что таким же будет множество $N = \{A \in W \mid \eta(A) \in M\}$. По условию 2 $N \cap M = \varnothing$. Докажем, что $M \cup N = W$. Пусть $W \setminus (M \cup N) \neq \varnothing$. Тогда в силу связности T существует $B \in W \setminus (M \cup N)$ такое, что либо $B \cap \big(\bigcup\limits_{A \in M} A \big) \neq \varnothing$, либо $B \cap \big(\bigcup\limits_{A \in N} A \big) \neq \varnothing$, но в таком случае либо M, либо N не является максимальным хорошим множеством. Следовательно, $W = M \cup N$. Так как T связное, то существует $P \in M$ такое, что $P \cap \big(\bigcup\limits_{A \in N} A \big) \neq \varnothing$, тогда $\eta(P) \in N$ и $\eta(P) \cap \big(\bigcup\limits_{A \in M} A \big) \neq \varnothing$. Пусть $S = \bigcup\limits_{A \in N \setminus \{\eta(P)\}} A$. Все компоненты S пересекаются с $\eta(P)$, так как $\bigcup\limits_{A \in N} A$ — связное множество. Существует компонента A_1 множества S, пересекающаяся также с P. Положим $A_2 = \eta(P) \cup (S \setminus A_1)$, $A_3 = \bigcup\limits_{A \in M} A$. По построению A_i — связные, открытые, попарно пересекающиеся подмножества T, $T = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. В силу локальной линейной связности T A_i линейно связные. Применяя следствие 1, получаем, что $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \neq \varnothing$. Так как A_i представляют собой объединения попарно не пересекающихся семейств компонент из W, то существуют три различные компоненты из W, имеющие непустое общее пересечение. Очевидно, что образ общей точки этих компонент должен принадлежать сразу трем из множеств C_1, C_2, D_1, D_2, чего не может быть. Мы пришли к противоречию из-за допущения, что $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Таким образом, теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Улам С.* Нерешенные математические задачи. М.: Наука, 1964.
2. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.

г. Новосибирск *Статья поступила 19 мая 1993 г.*