Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. Н. Дубинин, Асимптотическая формула для емкости конденсатора при вырождении всех его пластин, *Дальневост. матем. журн.*, 2023, том 23, номер 2, 184–189

DOI: 10.47910/FEMJ202316

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.91
25 марта 2025 г., 21:56:57

Дальневосточный математический журнал. 2023. Т. 23. № 2. С. 184–189

УДК 517.54
MSC2020 30C75, 30C85

© В. Н. Дубинин[1]

Асимптотическая формула для емкости конденсатора при вырождении всех его пластин

Приводится асимптотическая формула для емкости обобщенного конденсатора с переменными уровнями потенциала, областью задания конденсатора и вырождением всех его пластин.

Ключевые слова: *асимптотическая формула, конформная емкость конденсатора, функция Неймана.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202316

Получение асимптотических формул для емкостей различных видов представляет значительный интерес в связи с многочисленными приложениями этих формул в теории функций и смежных областях математики (см., например, работы [1–12] и библиографию в них). В недавней статье [13] установлена асимптотика емкости обобщенного конденсатора в случае, когда одна из его пластин фиксирована, а все другие стягиваются в наперед заданные точки, при этом уровни потенциала суть переменные величины, а множество, на котором определен конденсатор, стремится к фиксированной области. Настоящая заметка является продолжением этих исследований. Мы получаем аналог формулы (2) [13] в случае, когда вырождаются все пластины конденсатора. Доказательство новой асимптотической формулы следует доказательству Теоремы 2.4 [5] с некоторыми дополнениями и исправлениями. Всюду ниже мы придерживаемся определений и обозначений из книги [5].

Теорема 1. *Пусть D — конечносвязная область комплексной сферы $\overline{\mathbb{C}}$, ограниченная непрерывно дифференцируемыми жордановыми кривыми, и пусть $\{D(\varepsilon)\}$ — семейство конечносвязных областей в $\overline{\mathbb{C}}$, зависящих от параметра $\varepsilon > 0$, ограниченных жордановыми кривыми и такими, что расстояние между границами ∂D и $\partial D(\varepsilon)$ (по Хаусдорфу) есть величина $O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$. Пусть $\{z_k\}_{k=1}^{n}$, $n \geqslant 2$, — совокупность различных конечных точек области D;*

$$\delta_k(\varepsilon) = \delta_k - \alpha_k \varepsilon + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0,$$

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: `dubinin@iam.dvo.ru`

$\delta_k \neq 0$ и α_k — вещественные числа, $k = 1, \dots, n$. Предположим, что пластины $E_k(\varepsilon)$, $k = 1, \dots, n$, конденсатора $C(\varepsilon) = \Big(D(\varepsilon), \{E_k(\varepsilon)\}_{k=1}^n, \{\delta_k(\varepsilon)\}_{k=1}^n\Big)$ ограничены замкнутыми гладкими жордановыми кривыми, на которых выполняется

$$|z - z_k| = \mu_k\big(\exp(-\nu_k/\varepsilon)\big)\big(1 + o(1)\big), \quad \varepsilon \to 0, \tag{1}$$

$\mu_k > 0, \nu_k > 0, k = 1, \dots, n, \sum\limits_{k=1}^{n} \delta_k/\nu_k = 0$. Тогда справедлива асимптотическая формула

$$\begin{aligned} \operatorname{cap} C(\varepsilon) = 2\pi\varepsilon \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k^2}{\nu_k} - 2\pi\varepsilon^2 \Bigg\{ \sum_{k=1}^{n} \Bigg[2\frac{\alpha_k\delta_k}{\nu_k} + \frac{\delta_k^2}{\nu_k^2} \log \frac{N(D, z_k, z_n)}{\mu_k} \Bigg] + \\ + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n-1} \frac{\delta_k\delta_l}{\nu_k\nu_l} n_D(z_k, z_l, z_n) \Bigg\} + o(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \to 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$n_D(z, z_l, z_n) = H_D(z, z_l, z_n) - \log|z - z_l|$$

означает функцию Неймана области D с полюсами в точках z_l и z_n, а

$$N(D, z_l, z_n) = \exp(H_D(z_l, z_l, z_n)),$$

$l = 1, \dots, n-1, N(D, z_n, z_n) := 1.$

Доказательство. Нетрудно убедиться, что формула вида (2) не зависит от выбора конкретных пластин $E_k(\varepsilon)$, $k = 1, \dots, n$, удовлетворяющих условиям (1) (см. [5, Лемма 2.1]). Ввиду конформной инвариантности емкости достаточно рассмотреть случай, когда область D ограничена конечным числом аналитических жордановых кривых и точка $z_n = 0$. Кроме того, учитывая монотонность емкости конденсатора [5, Теорема 1.15], можем считать, что граничные точки области $D(\varepsilon)$ получаются сдвигом граничных точек D вдоль нормали к ∂D на одну и ту же величину $O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$.

Введем сокращенные обозначения:

$$\begin{gathered} n(z, z_k) = n_D(z, z_k, 0), \quad n_\varepsilon(z, z_k) = n_{D(\varepsilon)}(z, z_k, 0); \quad k = 1, dots, n-1, \\ R_k = N(D, z_k, 0),\ R_k(\varepsilon) = N(D(\varepsilon), z_k, 0),\ \lambda_k = \varepsilon/(\varepsilon \log \mu_k - \nu_k), \quad k = 1, \dots, n. \end{gathered}$$

Следуя [5], при достаточно малом значении параметра ε рассмотрим вспомогательную функцию

$$\mathrm{g}(z) = \sum_{k=1}^{n-1} \delta_k(\varepsilon) \sum_{l=1}^{n-1} \beta_{lk} n_\varepsilon(z, z_l),$$

где

$$\beta_{lk} = \begin{cases} -\lambda_k\lambda_l n_\varepsilon(z_k, z_l), & l \neq k, \\ -\lambda_k\left[1 + \lambda_k \log R_k(\varepsilon)\right], & l = k, \end{cases}$$

$k, l = 1, \dots, n-1$. Функция g гармоническая в $\overline{D(\varepsilon)} \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} \{z_k\}$, а на границе $\partial D(\varepsilon)$ удовлетворяет условию $\partial\mathrm{g}/\partial n = 0$. В каждой точке $z_k, k = 1, \dots, n$, функция g имеет логарифмическую особенность. Отсюда заключаем, что при любом $k, 1 \leqslant k \leqslant n$, граница множества

$$\mathcal{E}_k(\varepsilon) = \Big\{ z: \ |z - z_k| < \mu_k \exp(-\,\nu_k/(2\varepsilon)), \ \mathrm{g}(z)/\delta_k(\varepsilon) \geqslant 1 \Big\}$$

представляет собой замкнутую аналитическую жорданову кривую.

Для точек $z \in \partial\mathcal{E}_k(\varepsilon)$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, выполняется

$$1 = -\,\lambda_k\big[1 + \lambda_k \log R_k(\varepsilon)\big] n_\varepsilon(z, z_k) - \sum_{\substack{l\,=\,1\\ l\,\neq\,k}}^{n-1} \lambda_k \lambda_l n_\varepsilon(z_k, z_l) n_\varepsilon(z, z_l) -$$

$$- \sum_{\substack{j\,=\,1\\ j\,\neq\,k}}^{n-1} \frac{\delta_j(\varepsilon)}{\delta_k(\varepsilon)} \Bigg\{ \lambda_k \lambda_j n_\varepsilon(z_k, z_j) n_\varepsilon(z, z_k) + \lambda_j [1 + \lambda_j \log R_j(\varepsilon)] n_\varepsilon(z, z_j) +$$

$$+ \sum_{\substack{l\,=\,1\\ l\,\neq\,j,\ l\,\neq\,k}}^{n-1} \lambda_l \lambda_j n_\varepsilon(z_l, z_j) n_\varepsilon(z, z_l) \Bigg\} = -\,\lambda_k\big[1 + \lambda_k \log R_k + O(\varepsilon^2)\big] n(z, z_k) -$$

$$- \sum_{\substack{j\,=\,1\\ j\,\neq\,k}}^{n-1} \frac{\delta_j(\varepsilon)}{\delta_k(\varepsilon)} \Big\{ \lambda_k \lambda_j (n(z_k, z_j) + O(\varepsilon)) n(z, z_k) + \lambda_j n(z_k, z_j) \Big\} + O(\varepsilon^2) =$$

$$= \big(\lambda_k \log|z - z_k|\big) \Bigg[1 + \lambda_k \log R_k + \sum_{\substack{j\,=\,1\\ j\,\neq\,k}}^{n-1} \frac{\delta_j(\varepsilon)}{\delta_k(\varepsilon)} \lambda_j n(z_k, z_j) + O(\varepsilon^2) \Bigg] -$$

$$-\,\lambda_k \log R_k - \sum_{\substack{j\,=\,1\\ j\,\neq\,k}}^{n-1} \frac{\delta_j(\varepsilon)}{\delta_k(\varepsilon)} \lambda_j n(z_k, z_j) + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \to 0.$$

Мы воспользуемся тем фактом, что при сделанных выше допущениях, касающихся границ множеств D и $D(\varepsilon)$ справедливы равенства

$$n_\varepsilon(z, z_k) = n(z, z_k) + O(\varepsilon), \quad z \in D(\varepsilon) \cap D,$$
$$\log R_k(\varepsilon) = \log R_k + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

После простых вычислений получаем, что на границе множества $\mathcal{E}_k(\varepsilon)$ выполняется

$$\lambda_k \log|z - z_k| = 1 + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \to 0,$$

и, следовательно, справедливо асимптотическое равенство (1).

Рассмотрим теперь строение множества $\partial\mathcal{E}_n(\varepsilon)$. Напомним, что согласно определению функции Неймана

$$n_\varepsilon(z, z_l) = \log|z| + o(1) \text{ при } z \to 0$$

[5, часть 2.1]. Кроме того, $n_\varepsilon(z, z_l)$ — гармоническая функция в проколотой окрестности начала координат. Отсюда

$$n_\varepsilon(z, z_l) = \log|z| + H(z),$$

где $H(z)$ — некоторая гармоническая функция в окрестности точки $z=0$ и $H(0)=0$. Поэтому можно записать

$$n_\varepsilon(z,z_l) = \log|z| + O(|z|), \quad z\to 0, \quad l=1,\dots,n-1.$$

Учитывая этот факт, получаем, что для точек $z\in\partial\mathcal{E}_n(\varepsilon)$ выполняется[1)]

$$1 = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\delta_k(\varepsilon)}{\delta_n(\varepsilon)}\sum_{l=1}^{n-1}\beta_{lk}\big(\log|z|+O(\varepsilon^2)\big) = \big(\log|z|+O\left(\varepsilon^2\right)\big)\times$$

$$\times\left\{-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\delta_k(\varepsilon)}{\delta_n(\varepsilon)}\lambda_k\big[1+\lambda_k\log R_k(\varepsilon)\big]-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\delta_k(\varepsilon)}{\delta_n(\varepsilon)}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n-1}\lambda_k\lambda_l n_\varepsilon(z_k,z_l)\right\} =$$

$$=\lambda_n\log|z|\left\{-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\lambda_k(\delta_k-\alpha_k\varepsilon)}{\lambda_n(\delta_n-\alpha_n\varepsilon)}\big[1+\lambda_k\log R_k\big]-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\delta_k}{\delta_n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n-1}\frac{\lambda_k\lambda_l}{\lambda_n}n(z_k,z_l)+o(\varepsilon)\right\}+O(\varepsilon^3)=$$

$$=\lambda_n\log|z|\left\{1+\frac{\varepsilon\nu_n}{\delta_n}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\delta_k}{\nu_k}\left(\frac{\alpha_k}{\delta_k}-\frac{\alpha_n}{\delta_n}\right)+\frac{\delta_k}{\nu_k^2}\log\frac{R_k\mu_n^{\nu_k/\nu_n}}{\mu_k}\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n-1}\frac{\delta_k}{\nu_k\nu_l}n(z_k,z_l)\right]+\right.$$

$$\left.+o(\varepsilon)\right\}+O(\varepsilon^3), \quad \varepsilon\to 0.$$

При отображении $z\mapsto az, a>0$, емкость конденсатора $C(\varepsilon)$ не меняется, в то время как следующие величины преобразуются по правилу:

$$R_k\mapsto R_k a^2,\ n(z_k,z_l)\mapsto n(z_k,z_l)+\log a, \quad k,l=1,\dots,n-1;$$
$$\delta_k\mapsto\delta_k,\ \alpha_k\mapsto\alpha_k,\ \mu_k\mapsto\mu_k a,\ \nu_k\mapsto\nu_k, \quad k,l=1,\dots,n.$$

Отсюда следует, что при данном отображении не меняется вид асимптотической формулы (2). Постоянную a можно подобрать таким образом, чтобы выражение в квадратных скобках в последнем соотношении обратилось в нуль:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\delta_k}{\nu_k}\left(\frac{\alpha_k}{\delta_k}-\frac{\alpha_n}{\delta_n}\right)+\frac{\delta_k}{\nu_k^2}\log\frac{R_k\mu_n^{\nu_k/\nu_n}}{\mu_k}\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n-1}\frac{\delta_k}{\nu_k\nu_l}n(z_k,z_l)=0. \qquad (3)$$

Действительно, после указанной выше замены параметров в (3) к левой части (3) добавится слагаемое

$$-\frac{\delta_n}{\nu_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\nu_k}\log a,$$

[1]В этой части аналогичного доказательства [5, часть 2.3] допущена неточность, которая не повлияла на результат вычислений.

где множитель перед $\log a$ отличен от нуля (воспользовались равенством $\sum\limits_{k=1}^{n}\delta_k/\nu_k = 0$). Таким образом, можно априори считать, что выполняется равенство (3). В этом случае получаем

$$\lambda_n \log|z| = 1 + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0,$$

и, следовательно, справедливо равенство (1) при $k=n$. Ранее мы показали (1) для $k=1,\dots,n-1$. Поэтому при нахождении формулы для емкости конденсатора $C(\varepsilon)$ достаточно ограничится пластинами $\mathcal{E}_k(\varepsilon)$ вместо $E_k(\varepsilon)$, $k=1,\dots,n$.

По принципу Дирихле

$$\operatorname{cap} C(\varepsilon) = \iint\limits_{D(\varepsilon)\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{n}\mathcal{E}_k(\varepsilon)} |\nabla \mathrm{g}|^2 dxdy = -\sum_{k=1}^{n}\delta_k(\varepsilon)\int\limits_{\partial\mathcal{E}_k(\varepsilon)}\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial n}ds =$$

$$= 2\pi\sum_{k=1}^{n-1}\delta_k(\varepsilon)\sum_{l=1}^{n-1}\delta_l(\varepsilon)\beta_{kl} - 2\pi\delta_n(\varepsilon)\sum_{k=1}^{n-1}\delta_k(\varepsilon)\sum_{l=1}^{n-1}\beta_{lk}.$$

Здесь дифференцирование производится по направлению внешней нормали к границе множеств $\mathcal{E}_k(\varepsilon)$, $k=1,\dots,n$. С учетом предыдущих выкладок и равенства (3) получаем

$$\frac{1}{2\pi}\operatorname{cap} C(\varepsilon) = -\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k\delta_k^2(\varepsilon)\left[1+\lambda_k\log R_k(\varepsilon)\right] -$$

$$-\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n-1}\lambda_k\lambda_l\delta_k(\varepsilon)\delta_l(\varepsilon)n_\varepsilon(z_k,z_l) - \lambda_n\delta_n^2(\varepsilon)\big(1+o(\varepsilon)\big) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n-1}\left[-\frac{\varepsilon}{\nu_k} - \frac{\varepsilon^2\log\mu_k}{\nu_k^2} + o\left(\varepsilon^2\right)\right]\left[\delta_k^2 - 2\alpha_k\delta_k\varepsilon + o(\varepsilon)\right]\left[1 - \frac{\varepsilon}{\nu_k}\log R_k + O\left(\varepsilon^2\right)\right] -$$

$$-\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n-1}\left[-\frac{\varepsilon}{\nu_k}+O\big(\varepsilon^2\big)\right]\left[-\frac{\varepsilon}{\nu_l}+O\big(\varepsilon^2\big)\right]\left[\delta_k-\alpha_k\varepsilon+o(\varepsilon)\right]\left[\delta_l-\alpha_l\varepsilon+o(\varepsilon)\right]n(z_k,z_l) -$$

$$-\left[\varepsilon/\nu_n - (\varepsilon^2\log\mu_n)/\nu_n^2 + o\left(\varepsilon^2\right)\right]\left[\delta_n^2 - 2\alpha_n\delta_n\varepsilon + o(\varepsilon)\right](1+o(\varepsilon)) =$$

$$= \varepsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{\delta_k^2}{\nu_k} - \varepsilon^2\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[2\frac{\alpha_k\delta_k}{\nu_k} + \frac{\delta_k^2}{\nu_k^2}\log\frac{R_k}{\mu_k}\right] + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n-1}\frac{\delta_k\delta_l}{\nu_k\nu_l}n(z_k,z_l)\right\} + o\big(\varepsilon^2\big), \quad \varepsilon\to 0.$$

Теорема доказана. □

Приведенное доказательство распространяется на случай, когда некоторые пластины конденсатора $C(\varepsilon)$ стягиваются к граничным точкам области D, но только при условии, что в окрестности этих точек границы областей D и $D(\varepsilon)$ совпадают при любом $\varepsilon\to 0$. В общем случае вопрос об асимптотике емкости конденсатора остается открытым.

Список литературы

[1] В. Н. Дубинин, “Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения”, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **237** (1997), 56–73.

[2] D. Karp, “Capacity of a condenser whose plates are circular arcs”, *Complex Variables, Theory and Application*, **50**:2 (2005), 103–122.

[3] D. Karp, E. Prilepkina, “Reduced modules with free boundary and its applications”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, **34**:2 (2009), 353–378.

[4] V. N. Dubinin, M. Vuorinen, “Robin functions and distortion theorems for regular mappings”, *Math. Nachr.*, **283**:11 (2010), 1589–1602.

[5] V. N. Dubinin, *Condenser Capacities and Symmetrization in Geometric Function Theory*, Springer, Basel, 2014.

[6] K. A. Gulyaeva, S. I. Kalmykov, E. G. Prilepkina, “Extremal decomposition problems in the Euclidean space”, *Int. J. Math. Anal. (Ruse)*, **9** (2015), 2763–2773.

[7] С. И. Калмыков, Е. Г. Прилепкина, “О p-гармоническом радиусе Робена в евклидовом пространстве”, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **449** (2016), 196–213.

[8] V. N. Dubinin, E. G. Prilepkina, “Optimal Green energy points on the circles in d-space”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **499**:2 (2021), Article 125055.

[9] E. G.Prilepkina, A. S. Afanaseva-Grigoreva, “Optimal discrete Neumann energy in a ball and an annulus”, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **19**:1 (2022), 109–119.

[10] С. Р. Насыров, В. З. Нгуен, “Асимптотика внешнего конформного модуля четырехсторонника при его растяжении”, *Изв. вузов. Матем.*, **5** (2023), 89–95.

[11] Ф. Г. Авхадиев, И. Р. Каюмов, С. Р. Насыров, “Экстремальные проблемы в геометрической теории функций”, *Успехи математических наук*, **78**:2(470) (2023), 3–70.

[12] Laura Abatangelo, Corentin L´ena, and Paolo Musolino, “Asymptotic behavior of generalized capacities with applications to eigenvalue perturbations: the higher dimensional case”, 2023, arXiv: 2305.06953 [math.AP].

[13] В. Н. Дубинин, В. Ю. Ким, “О конденсаторах с переменными пластинами, уровнями потенциала и областью задания”, *Дальневост. матем. журн.*, **22**:1 (2022), 55–60.

Поступила в редакцию
12 июля 2023 г.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №23-21-00056, https://rscf.ru/project/23-21-00056/.

Dubinin V. N. An asymptotic formula for the capacity of a condenser when all its plates are degenerate. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2023. V. 23. No 2. P. 184–189.

[1] Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

ABSTRACT

An asymptotic formula is given for the capacity of a generalized condenser with variable potential levels, the domain of the condenser and the degeneracy of all its plates.

Key words: *functional asymptotic formula, conformal capacity, condenser, Neumann function.*