I. V. Grebennikova, On iterative method of constructing optimal control for singularly perturbed systems with delay,
Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform., 2009, Volume 9, Issue 3, 14–22

$$\omega_{ll}(f_0)_p \le 2E_{m_l,m_l}(f_0)_p \le 2\|f - S_{m_l,m_l}(f_0)\|_p \le 2\sum_{k=l+1}^{\infty} m_k^{-2/q}\omega_k \|D_{m_k,m_k} - D_{m_{k-1},m_{k-1}}\|_p \le$$

$$\le 4\sum_{k=l+1}^{\infty} m_k^{-2/q}\omega_k m_k^{2/q} \le C_1\omega_l.$$

С другой стороны, в силу условия теоремы

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(i+1)^{\gamma}(j+1)^{\delta}|\hat{f}(i,j)|^{\beta} \ge \sum_{l=1}^{\infty}(m_l^{-2/q}\omega_l)^{\beta}\sum_{i=m_{l-1}}^{m_l-1}\sum_{j=m_{l-1}}^{m_l-1}(i+1)^{\gamma}(j+1)^{\delta} \ge$$

$$\ge \sum_{l=1}^{\infty} m_l^{-2\beta/q}\omega_l^{\beta}N^{-2}m_l^{\gamma+\delta}\sum_{i=m_{l-1}}^{m_l-1}\sum_{j=m_{l-1}}^{m_l-1}1 \ge C_2\sum_{l=0}^{\infty} m_l^{\gamma+\delta+2-2\beta/q}\omega_l^{\beta} = \infty.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (*проект* НШ-2970.2008.01).

Библиографический список

1. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.
2. *Moricz F.* Approximation by double Walsh polynomials // Intern. J. Math. Math. Sci. 1992. V. 15, № 2. P. 209–220.
3. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
4. *Szasz O.* Fourier series and mean moduli of continuity // Trans. Amer. Math. Soc. 1937. V. 42, № 3. P. 366–395.
5. *Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: Элм, 1981.
6. *Схиртладзе И.А.* Об абсолютной сходимости рядов Фурье – Уолша // Сообщ. АН ГССР. 1971. Т. 64, № 2. С. 273–276.
7. *Схиртладзе И.А.* Об абсолютной сходимости и суммируемости простых и кратных рядов Фурье – Уолша // Сообщ. АН ГССР. 1973. Т. 69, № 1. С. 17–20.
8. *Tateoka J.* Absolute convergence of double Walsh – Fourier series // Acta Sci. Math. (Szeged). 2006. V. 72, № 1–2. P. 101–115.
9. *Sunouchi G.I.* Notes on Fourier analysis. XI. On the absolute summability of Fourier series // J. Math. Soc. Japan. 1949. V. 1, № 2. P. 122–129.
10. *Жак И.Е., Тиман М.Ф.* О суммировании двойных рядов // Мат. сб. 1954. Т. 35(77), № 1. С. 21–56.
11. *Волосивец С.С.* Приближение функций ограниченной p-флуктуации полиномами по мультипликативным системам // Analysis Math. 1995. V. 21, № 1. P. 61–77.
12. *Izumi M., Izumi S.* On absolute convergence of Fourier series // Arkiv för Matematik. 1967. V. 7, № 12. P. 177–184.

УДК 517.977

ОБ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫМИ СИСТЕМАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

И.В. Гребенникова

Уральский государственный университет, Екатеринбург,
кафедра прикладной математики
E-mail: giv001@usla.ru

Рассматривается задача управления по минимаксному критерию для сингулярно возмущенной системы с запаздыванием. Предлагается итерационная процедура построения управляющего воздействия, аппроксимирующего оптимальное решение с заданной степенью точности относительно малого положительного параметра.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная система с запаздыванием, оптимальное управление, фундаментальная матрица.

On Iterative Method of Constructing Optimal Control for Singularly Perturbed Systems with Delay

I.V. Grebennikova

Ural State University, Ekaterinburg,
Chair of applied mathematics
E-mail: giv001@usla.ru

The control problem for the singularly perturbed system with delay according to the minimax criterion is considered. Iterative procedure of constructing control response that approximates the optimal solution with given accuracy with respect to a small positive parameter is proposed.

Key words: singularly perturbed system with delay, optimal control, fundamental matrix.

ВВЕДЕНИЕ

Построение эффективных управляющих процедур для реальных систем обусловлено точностью используемых математических моделей. Детализация описания динамики управляемого процесса приводит к сложным структурам (часто нелинейным), включающим различные особенности. Это может определяться наличием нескольких взаимосвязанных подпроцессов с существенно различными временными масштабами, и удобный способ формализации в этом случае — введение сингулярных возмущений. В последние годы много работ посвящено проблемам оптимального управления такими системами (см. обзоры [1–3]). Зависимость текущей скорости изменения выходных переменных системы от их значений в предшествующие моменты времени приводит к моделям, которые описываются дифференциальными уравнениями с последействием [4]. Указанные особенности в значительной мере затрудняют использование известных результатов теории оптимального управления, практическую реализацию употребляемых методов и схем решения. Поэтому важным представляется качественное исследование асимптотических свойств управляемых сингулярно возмущенных систем (ансамблей траекторий, множеств достижимости), разработка на их основе аналитических способов представления (построения) решений.

В данной работе рассматриваются динамические объекты, математическими моделями которых являются сингулярно возмущенные системы (с малым параметром при части производных) с запаздыванием (по состоянию). Рассматривается задача оптимального управления в постановке [5, 6] для сингулярно возмущенных систем с запаздыванием в условиях неопределенности по начальным условиям. Терминальный функционал качества зависит как от быстрых, так и от медленных переменных. В основе предлагаемого метода лежит идея последовательных приближений фундаментальной матрицы исходной системы при ее блочном представлении (соответственно размерности медленных и быстрых переменных). При реализации метода используются результаты исследований [5–10], а также аппарат выпуклого анализа [11]. Оптимальное решение аппроксимируется с любой заданной точностью (относительного малого параметра), при этом не требуется чрезмерных условий гладкости (дифференцируемость не выше первого порядка), ограничений на класс допустимых управлений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается управляемая сингулярно возмущенная система (с малым параметром $\mu > 0$ при части производных) с запаздыванием $h > 0$ (по состоянию):

$$\begin{aligned} &dx(t)/dt = A_{11}(t)x(t) + A_{12}(t)y(t) + G_1(t)x(t-h) + B_1(t)u(t), \\ &\mu\, dy(t)/dt = A_{21}(t)x(t) + A_{22}(t)y(t) + G_2(t)x(t-h) + B_2(t)u(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где $t \in T = [t_0, t_1]$, $x \in R^n$, $y \in R^m$, A_{ij}, B_i, G_i, $i, j = 1, 2$ — матрицы соответствующих размеров с непрерывными элементами. Начальное состояние системы $x(t) = \psi(t)$, $t_0 - h \le t < t_0$, $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ точно неизвестно и заданы лишь ограничения $x_0 \in X_0$, $y_0 \in Y_0$, где X_0, Y_0 — выпуклые компакты в соответствующих пространствах, $\psi(t) \in \Psi(t)$, $t_0 - h \le t < t_0$, $\Psi(t)$ — заданное многозначное отображение со значениями в виде выпуклых компактов (в R^n), непрерывное по t в метрике Хаусдорфа. Реализации управления $u(t)$, $t \in T$ — измеримые, по Лебегу, функции, удовлетворяющие условию $u(\cdot) \in P$, P — слабо компактное выпуклое множество в $L_2^r(T)$. В данном случае $P = \{u(\cdot) \mid u(t) \in P(t),\ t \in T\}$, где $P(t)$ — заданное непрерывное, ограниченное, выпуклое многозначное отображение. Пусть выполнено следующее

Предположение 1. *Собственные значения $\lambda_s(t)$ матрицы $A_{22}(t)$ удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re}\lambda_s(t) < -2c < 0$ при $t \in T$, $c = \mathrm{const} > 0$.*

Тогда [12, с. 69] при достаточно малых μ $(0 < \mu \le \mu_0)$ фундаментальная матрица решений $Y[t, \tau]$ системы $\mu\, dy/dt = A_{22}(t)y$, $Y[\tau, \tau] = E_m$, E_m — единичная матрица $m \times m$, при $t_0 \le \tau \le t \le t_1$ имеет оценку

$$\|Y[t, \tau]\| \le c_0 \exp\{-c(t - \tau)/\mu\}, \tag{2}$$

$c_0 > 0$ — некоторая постоянная, $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Рассмотрим вырожденную систему, полученную из (1) при $\mu = 0$:

$$dx(t)/dt = A_0(t)x(t) + G_0(t)x(t-h) + B_0(t)u(t), \tag{3}$$

$$y(t) = -A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)x(t) - A_{22}^{-1}(t)G_2(t)x(t-h) - A_{22}^{-1}(t)B_2(t)u(t), \tag{4}$$

где $t \in T$, $A_0(t) = A_{11}(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)$, $G_0(t) = G_1(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)G_2(t)$, $B_0(t) = B_1(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)B_2(t)$.

Пусть $Z[t,\tau]$ и $X[t,\tau]$ есть фундаментальные матрицы решений соответственно систем (1) и (3) (при $u \equiv 0$), причем $X[\tau,\tau] = E_n$, $X[t,\tau] = 0$ при $\tau > t$; $Z[\tau,\tau] = E_{n+m}$. Матрицу $Z[t,\tau]$ представим в следующем блочном виде:

$$Z[t,\tau] = \begin{pmatrix} Z_{11}[t,\tau] & Z_{12}[t,\tau] \\ Z_{21}[t,\tau] & Z_{22}[t,\tau] \end{pmatrix},$$

здесь $Z_{11}[t,\tau]$, $Z_{12}[t,\tau]$, $Z_{21}[t,\tau]$, $Z_{22}[t,\tau]$ — матрицы с размерами соответственно $n\times n$, $n\times m$, $m\times n$, $m \times m$.

Введем следующие обозначения: $z' = (x', y')$, $Z_0 = X_0 \times Y_0$; $Z(t, u(\cdot), Z_0, \psi(\cdot))$, $Z_0(t, u(\cdot), X_0, \psi(\cdot))$, $t_0 \le t \le t_1$ — соответственно множества (ансамбли) траекторий $z(t, u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))$ системы (1), исходящих из Z_0, и $z_0(t, u(\cdot), x_0, \psi(\cdot))$ системы (3)–(4), исходящих из X_0, при некотором $\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)$ и фиксированном $u(\cdot) \in P$.

Определим функционал $J(\cdot)$: $J(u(\cdot)) = \max\limits_{z_0\in Z_0} \max\limits_{\psi(\cdot)\in\Psi(\cdot)} \varphi(z(t_1; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot)))$, где $\varphi(\cdot):\ R^{n+m} \to R$ — заданная выпуклая функция (с конечными значениями).

Задача 1. *Среди управлений $u(\cdot) \in P$ найти оптимальное $u^0 = u^0(\cdot)$, доставляющее минимум функционалу J на множестве P: $\varepsilon^0(t_1) = J(u^0) = \min\limits_{u(\cdot)\in P} J(u(\cdot))$.*

Решение задачи 1 описывается следующими соотношениями (используя [6]):

$$\varepsilon^0(t_1) = \min_{u(\cdot)\in P} \max_{l\in R^{n+m}} \max_{z_0\in Z_0} \max_{\psi(\cdot)\in\Psi(\cdot)} \{l' z(t_1; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot)) - \varphi^*(l)\} =$$

$$= \max\{\chi^0(l,\mu) \mid l \in R^{n+m}\} = \chi^0(l^0,\mu), \tag{5}$$

$$\chi^0(l,\mu) = -h^{**}(l) - \rho(-r(\cdot; t_1, l, \mu) \mid P),$$

$$h(l) = \varphi^*(l) - \rho(l' Z[t_1,t_0] \mid Z_0) -$$

$$- \int\limits_{t_0}^{t_0+h} \rho(((p' Z_{11}[t,\tau] + q' Z_{21}[t,\tau])G_1(\tau) + (1/\mu)(p' Z_{12}[t,\tau] + q' Z_{22}[t,\tau])G_2(\tau)) \mid \Psi(\tau-h))d\tau,$$

$$r(\tau; t, l, \mu) = (p' Z_{11}[t,\tau] + q' Z_{21}[t,\tau])B_1(\tau) + (1/\mu)(p' Z_{12}[t,\tau] + q' Z_{22}[t,\tau])B_2(\tau),$$

где $l' = (p', q')$, $p \in R^n$, $q \in R^m$; $\varphi^*(l)$ — функция, сопряженная [11] к $\varphi(z)$; $h^{**}(l) = \overline{(\mathrm{co}\, h)}(l)$ — замыкание выпуклой оболочки [11] функции $h(l)$; $\rho(s|X)$ — опорная функция множества X на элементе s. Оптимальное управление $u^0(\cdot,\mu)$ удовлетворяет условию минимума: для почти всех $\tau \in T$

$$\min_{u(\tau)\in P(\tau)} r(\tau; t_1, l^0, \mu)u(\tau) = r(\tau; t_1, l^0, \mu)u^0(\tau,\mu). \tag{6}$$

Полученные $u^0(\cdot,\mu)$, l^0, $\varepsilon^0(t_1)$ зависят от параметра μ. Однако эти величины при $\mu \to +0$ могут не сходиться [8] к соответствующим решениям задачи 1 для вырожденной системы . Поэтому важным представляется построить аппроксимацию оптимального управления $u^0(\cdot,\mu)$, доставляющую оптимальное значение $\varepsilon^0(t_1) = J(u^0(\cdot,\mu))$ с заданной точностью (относительно μ). В данной работе в основе предложенного способа определения требуемых приближений лежит возможность представления блоков $Z_{ij}[t,\tau;\mu]$ $(i,j = 1,2)$ в виде пределов равномерно сходящихся на $[t_0,t_1]$ последовательностей (при $0 < \mu \le \mu_0$, μ_0 достаточно мало) $Z_{ij}^{(k)}[t,\tau;\mu]$, $k = 0,1,2,\ldots$

2. АСИМПТОТИКА ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

Пусть $\hat{Z}[t,\tau]$ — решение матричного уравнения $d\hat{Z}[t,\tau]/dt = A(t)\hat{Z}[t,\tau]+G(t)\hat{Z}[t-h,\tau]+B(t)u(t)$; $Z_1[t,\tau]$ — решение матричного уравнения $dZ_1[t,\tau]/dt = A(t)Z_1[t,\tau] + G(t)Z_1[t-h,\tau]$, причем $Z_1[\tau,\tau] = E_n, Z_1[t,\tau] = 0$ при $\tau > t$; $Z_0[t,\tau]$ — решение матричного уравнения $dZ_0[t,\tau]/dt = A(t)Z_0[t,\tau]$, причем $Z_0[\tau,\tau] = E_n$. Тогда по формуле Коши [13] получаем

$$Z_1[t,\tau] = Z_0[t,\tau] + \int\limits_{\tau}^{t} Z_0[t,s]G(s)Z_1[s-h,\tau]ds,$$

$$\hat{Z}[t,\tau] = Z_1[t,\tau] + \int\limits_{\tau}^{t} Z_1[t,s]B(s)u(s)ds. \tag{7}$$

Применяя формулу (7) для каждого блока матрицы $Z[t,\tau]$, получим следующее утверждение.

Лемма 1. *Матрицы $Z_{ij}[t,\tau]$, $i,j = 1,2$, $t_0 \le \tau \le t \le t_1$, удовлетворяют уравнениям:*

$$Z_{11}[t,\tau] = X[t,\tau] + \mu \int\limits_{\tau}^{t} X[t,s]A_{12}(s)A_{22}^{-1}(s)(dZ_{21}[s,\tau]/ds)ds, \tag{8}$$

$$Z_{12}[t,\tau] = \mu \int\limits_{\tau}^{t} X[t,s]A_{12}(s)A_{22}^{-1}(s)(dZ_{22}[s,\tau]/ds)ds, \tag{9}$$

$$Z_{21}[t,\tau] = (1/\mu) \int\limits_{\tau}^{t} Y[t,s](A_{21}(s)Z_{11}[s,\tau] + G_2(s)Z_{11}[s-h,\tau])ds,$$

$$Z_{22}[t,\tau] = Y[t,\tau] + (1/\mu) \int\limits_{\tau}^{t} Y[t,s](A_{21}(s)Z_{12}[s,\tau] + G_2(s)Z_{12}[s-h,\tau])ds.$$

Уравнения (8) и (9) преобразуются к виду

$$Z_{11}[t,\tau] = X[t,\tau] - \int\limits_{\tau}^{t} (dZ_{12}^{(0)}[t,s]/ds)A_{22}^{-1}(s)(A_{21}(s)Z_{11}[s,\tau] + G_2(s)Z_{11}[s-h,\tau])ds, \tag{10}$$

$$Z_{12}[t,\tau] = Z_{12}^{(0)}[t,\tau] - \int\limits_{\tau}^{t} \frac{dZ_{12}^{(0)}[t,s]}{ds}A_{22}^{-1}(s)(A_{21}(s)Z_{12}[s,\tau] + G_2(s)Z_{12}[s-h,\tau])ds,$$

где матрица $Z_{12}^{(0)}[t,\tau]$ определяется формулой $Z_{12}^{(0)}[t,\tau] = \int\limits_{\tau}^{t} X[t,s]A_{12}(s)Y[s,\tau]ds$.

Теорема 1. *Существуют достаточно малое число $\mu_0 > 0$ и постоянная $N > 0$, такие что в области $0 < \mu \le \mu_0$, $t_0 \le \tau \le t \le t_1$ выполняются оценки*

$$\begin{gathered} \|Z_{11}[t,\tau]\| \le N/(1-\mu N); \|Z_{12}[t,\tau]\| \le \mu N(1-e^{-c(t-\tau)/\mu})/(1-\mu N), \\ \|Z_{21}[t,\tau]\| \le N(1-e^{-c(t-\tau)/\mu})/(1-\mu N), \\ \|Z_{22}[t,\tau]\| \le c_0 e^{-c(t-\tau)/\mu} + \mu N^2(1-e^{-c(t-\tau)/\mu})/(1-\mu N). \end{gathered} \tag{11}$$

Доказательство. Пользуясь методом последовательных приближений Пикара, решение (10) можно представить как предел равномерно сходящейся на отрезке $[t_0,t_1]$ следующей последовательности (при $0 < \mu \le \mu_0$, μ_0 достаточно мало): $Z_{11}^{(0)}[t,\tau] = X[t,\tau]$, $Z_{11}^{(k+1)}[t,\tau] = X[t,\tau] - \int\limits_{\tau}^{t} (dZ_{12}^{(0)}[t,s]/ds)A_{22}^{-1}(s)(A_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s,\tau] + G_2(s)Z_{11}^{(k)}[s-h,\tau])ds$, $k = 0,1,2,\ldots$

В силу ограниченности $X[t,\tau]$, $t_0 \le \tau \le t \le t_1$, с учетом оценки (2), при $0 < \mu \le \mu_0$ справедливы неравенства:

$$\|X[t,\tau]\| \le N_0, \qquad \left\|Z_{12}^{(0)}[t,\tau]\right\| \le \mu N_1 c_0(1-e^{-c(t-\tau)/\mu})/c,$$

$$\left\|\int\limits_{\tau}^{t}(dZ_{12}^{(0)}[t,s]/ds)A_{22}^{-1}(s)(A_{21}(s)X[s,\tau]+G_2(s)X[s-h,\tau])ds\right\|\leq \mu N_0N_1c_0/c,$$

$$\left\|Z_{11}^{(k+1)}[t,\tau]-Z_{11}^{(k)}[t,\tau]\right\|\leq \mu^{k+1}N_0(N_1c_0/c)^{k+1},\qquad k=0,1,2,\ldots,$$

где $N_0>0$, $N_1>0$ — некоторые постоянные. Отсюда непосредственно следует (при соответствующем выборе $N>0$) оценка (11) для $Z_{11}[t,\tau]$. Аналогично получаются остальные неравенства, причем в области $0<\mu\leq\mu_0$, $t_0\leq\tau\leq t\leq t_1$ имеем:

$$\left\|Z_{12}^{(k+1)}[t,\tau]-Z_{12}^{(k)}[t,\tau]\right\|\leq \mu^{k+2}N_0N_1^{k+1}(c_0/c)(1-e^{-c(t-\tau)/\mu}),$$

$$\left\|Z_{21}^{(k+1)}[t,\tau]-Z_{21}^{(k)}[t,\tau]\right\|\leq \mu^{k+1}N_0N_1^{k+1}(c_0/c)(1-e^{-c(t-\tau)/\mu}), \tag{12}$$

$$\left\|Z_{22}^{(k+1)}[t,\tau]-Z_{22}^{(k)}[t,\tau]\right\|\leq \mu^{k}N_0N_1^{k}(c_0/c)^2(\mu(1-e^{-c(t-\tau)/\mu})-c(t-\tau)e^{-c(t-\tau)/\mu}),\ k=0,1,2,\ldots$$

Теорема 1 доказана.

Рекуррентные формулы для вычисления $Z_{ij}[t,\tau]$, $i,j=1,2$, определяющие асимптотику фундаментальной матрицы, есть:

$$Z_{11}^{(k+1)}[t,\tau]=X[t,\tau]-\int\limits_{\tau}^{t}(dZ_{12}^{(0)}[t,s]/ds)A_{22}^{-1}(s)(A_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s,\tau]+G_2(s)Z_{11}^{(k)}[s-h,\tau])\,ds,$$

$$Z_{22}^{(k+1)}[t,\tau]=Y[t,\tau]+\int\limits_{\tau}^{t}Z_{21}^{(k)}[t,s]A_{12}(s)Y[s,\tau]\,ds,\qquad Z_{12}^{(k)}[t,\tau]=\int\limits_{\tau}^{t}Z_{11}^{(k)}[t,s]A_{12}(s)Y[s,\tau]\,ds,$$

$$Z_{21}^{(k)}[t,\tau]=(1/\mu)\int\limits_{\tau}^{t}Y[t,s](A_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s,\tau]+G_2(s)Z_{11}^{(k)}[s-h,\tau])\,ds,\quad k=0,1,2,\ldots,$$

причем $Z_{11}^{(0)}[t,\tau]=X[t,\tau]$, $Z_{22}^{(0)}[t,\tau]=Y[t,\tau]$.

Для задачи 1 соотношение (5) можно представить [14] в виде

$$\varepsilon^0(t_1)=\min_{u(\cdot)\in P}\max_{p,q}\{\rho(p'Z_{11}[t_1,t_0]+q'Z_{21}[t_1,t_0]|X_0)+\rho(p'Z_{12}[t_1,t_0]+q'Z_{22}[t_1,t_0]|Y_0)+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_1}[(p'Z_{11}[t_1,\tau]+q'Z_{21}[t_1,\tau])B_0(\tau)+(1/\mu)q'Y[t_1,\tau]B_2(\tau)-\xi(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau)]u(\tau)d\tau+ \tag{13}$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_0+h}\rho((p'Z_{11}[t_1,\tau]+q'Z_{21}[t_1,\tau])G_0(\tau)-\tilde{\xi}(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)G_2(\tau)|\Psi(\tau-h))d\tau-\varphi^*(p,q)\},$$

где $\xi(\tau,t_1,p,q)=\frac{d}{d\tau}[p'Z_{12}[t_1,\tau]+(1/\mu)\int\limits_{\tau}^{t_1}q'Y[t_1,s]A_{21}(s)Z_{12}[s,\tau]ds]$, $\tilde{\xi}(\tau,t_1,p,q)=\frac{d}{d\tau}[p'Z_{12}[t_1,\tau]+$ $+(1/\mu)\int\limits_{\tau}^{t_0+h}q'Y[t_1,s]A_{21}(s)Z_{12}[s,\tau]ds]$.

На основании теоремы А. Лебега [15, с. 259] при $0<\mu\leq\mu_0$ (μ_0 достаточно мало) для любых $u(\cdot)\in P(\cdot)$, $p\in R^n$, $q\in R^m$ справедливы оценки

$$\left\|\int\limits_{t_0}^{t_0+h}\rho(\tilde{\xi}(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)G_2(\tau)|\Psi(\tau-h))d\tau\right\|\leq\omega(\mu)[\|p\|+N_2\|q\|],$$

$$\left\|\int\limits_{t_0}^{t_1}\xi(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau)u(\tau)d\tau\right\|\leq\omega(\mu)[\|p\|+N_1\|q\|], \tag{14}$$

где $\omega(\mu)=o(1)$; N_1, $N_2>0$ — некоторые постоянные.

3. АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 1

Используя последовательности $Z_{ij}^{(k)}[t,\tau,\mu]$, $i,j=1,2$, $k=0,1,2,\ldots$, можно аппроксимировать решение задачи 1 с любой заданной точностью (относительно μ, $0<\mu\le\mu_0$). Будем предполагать, что элементы матриц $A_{12}(\tau)$, $A_{22}^{-1}(\tau)$ имеют на T ограниченные производные. Построим управляющее воздействие $u_\mu^{(k)}(\cdot)$, доставляющее оптимальное значение $\varepsilon^0(t_1)$ с точностью $o(\mu^k)$. Из (13) имеем

$$\varepsilon^0(t_1)=\min_{u(\cdot)\in P}\max_{p,q}\{\rho[p'Z_{11}^{(k)}[t_1,t_0]+q'Z_{21}^{(k)}[t_1,t_0]+\xi_1^{(k)}(t_0,t_1,p,q)|X_0]+$$

$$+\rho[p'Z_{12}^{(k)}[t_1,t_0]+q'Z_{22}^{(k)}[t_1,t_0]+\xi_2^{(k)}(t_0,t_1,p,q)|Y_0]+\int\limits_{t_0}^{t_1}r^{(k)}(\tau,t_1,p,q)u(\tau)d\tau+ \tag{15}$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_0+h}\rho(r_h^{(k)}(\tau,t_1,p,q)|\Psi(\tau-h))d\tau+\int\limits_{t_0}^{t_1}[\xi_1^{(k)}(\tau,t_1,p,q)B_0(\tau)+\xi^{(k)}(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau)]u(\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_0+h}\rho(\xi_1^{(k)}(\tau,t_1,p,q)G_0(\tau)+\tilde\xi^{(k)}(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)G_2(\tau)|\Psi(\tau-h))d\tau-\varphi^*(p,q)\},\quad p\in R^n,q\in R^m,$$

где

$$\xi_i^{(k)}(\tau,t,p,q)=p'(Z_{1i}[t,\tau]-Z_{1i}^{(k)}[t,\tau])+q'(Z_{2i}[t,\tau]-Z_{2i}^{(k)}[t,\tau]),\qquad i=1,2,$$

$$\xi^{(k)}(\tau,t,p,q)=-p'\frac{d}{d\tau}(Z_{12}[t,\tau]-Z_{12}^{(k-1)}[t,\tau])-(1/\mu)\int\limits_{\tau}^{t}q'Y[t,s]A_{21}(s)\frac{d}{d\tau}(Z_{12}[s,\tau]-Z_{12}^{(k-1)}[s,\tau])ds,$$

$$\tilde\xi^{(k)}(\tau,t,p,q)=-p'\frac{d}{d\tau}(Z_{12}[t,\tau]-Z_{12}^{(k-1)}[t,\tau])-(1/\mu)\int\limits_{\tau}^{t_0+h}q'Y[t,s]A_{21}(s)\frac{d}{d\tau}(Z_{12}[s,\tau]-Z_{12}^{(k-1)}[s,\tau])ds,$$

$$r^{(k)}(\tau,t,p,q)=(p'Z_{11}^{(k)}[t,\tau]+q'Z_{21}^{(k)}[t,\tau])B_0(\tau)+(1/\mu)q'Y[t,\tau]B_2(\tau)-\frac{d}{d\tau}[p'Z_{12}^{(k-1)}[t,\tau]+$$

$$+(1/\mu)\int\limits_{\tau}^{t}q'Y[t,s]A_{21}(s)Z_{12}^{(k-1)}[s,\tau]ds]A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau),$$

$$r_h^{(k)}(\tau,t,p,q)=(p'Z_{11}^{(k)}[t,\tau]+q'Z_{21}^{(k)}[t,\tau])G_0(\tau)-\frac{d}{d\tau}(p'Z_{12}^{(k-1)}[t,\tau]+$$

$$+(1/\mu)\int\limits_{\tau}^{t_0+h}q'Y[t,s]A_{21}(s)Z_{12}^{(k-1)}[s,\tau]ds)A_{22}^{-1}(\tau)G_2(\tau).$$

Используя оценки (12) и (14), получим следующий результат.

Лемма 2. *Существуют достаточно малое число $\mu_0>0$ и постоянная $N>0$, такие что для любых $t_0\le\tau\le t\le t_1$, $p\in R^n,q\in R^m$, $0<\mu\le\mu_0$ справедливы неравенства:*

$$\left\|\frac{d}{d\tau}(Z_{12}[t,\tau]-Z_{12}^{(k-1)}[t,\tau])\right\|\le\mu^{k+1}N^{k+2}(c_0/c)(1-e^{-c(t-\tau)/\mu}),$$

$$\left\|\xi_i^{(k)}(\tau,t,p,q)\right\|\le\mu^{k+1}N^{k+2}(\|p\|+\|q\|\,(c_0/c)(1-e^{-c(t-\tau)/\mu})),\qquad i=1,2.$$

Пусть $\alpha_k(\mu)>0:\alpha_k(\mu)=o(1)$, $\alpha_k(\mu)/\mu\to+\infty$ при $\mu\to+0$, причем для $\tau\in[t_0,t_1-\alpha_k(\mu)]$ выполняется $\|Y[t_1,\tau]\|\le c_0\exp\{-c(t_1-\tau)/\mu\}<c_0\mu^{k+2}N_1$, где $N_1>0$ — некоторая постоянная. Тогда имеем

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}r^{(k)}(\tau,t_1,p,q)u(\tau)d\tau=\int\limits_{t_0}^{t_1-\alpha_k(\mu)}r_1^{(k)}(\tau,t_1,p,q)u(\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^{\alpha_k(\mu)/\mu} r_2^{(k)}(s,t_1,p,q)u(t_1-\mu s)ds+\hat{\xi}_k(l,\mu), \tag{16}$$

где $\left|\hat{\xi}_k(l,\mu)\right| \le \|l\|\,\hat{\omega}_k(\mu)$, $\hat{\omega}_k(\mu)=o(\mu^{k+1})$ при $0<\mu\le\mu_0$; причем функции $r_i^{(k)}(\tau,t_1,p,q)$, $i=1,2$, определяются следующим образом:

при $t_0\le\tau\le t\le t_1-\alpha_k(\mu)$

$$r_1^{(k)}(\tau,t_1,p,q)=(p'Z_{11}^{(k)}[t_1,\tau]+$$

$$+\int\limits_0^{\alpha_k(\mu)/\mu} q'\Phi[t_1,s](A_{21}(t_1-\mu s)Z_{11}^{(k)}[t_1-\mu s,\tau]+G_2(t_1-\mu s)Z_{11}^{(k)}[t_1-\mu s-h,\tau])ds)B_0(\tau)-$$

$$-\frac{d}{d\tau}(p'Z_{12}^{(k-1)}[t_1,\tau]+\int\limits_0^{\alpha_k(\mu)/\mu} q'\Phi[t_1,s]A_{21}(t_1-\mu s)Z_{12}^{(k-1)}[t_1-\mu s,\tau]ds)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau),$$

при $0\le s<\alpha_k(\mu)/\mu$

$$r_2^{(k)}(s,t_1,p,q)=[q'\Phi[t_1,s]+\frac{d}{ds}(p'Z_{12}^{(k-1)}[t_1,t_1-\mu s]+$$

$$+\int\limits_0^{s} q'\Phi[t_1,\sigma]A_{21}(t_1-\mu\sigma)Z_{12}^{(k-1)}[t_1-\mu\sigma,t_1-\mu s]d\sigma)A_{22}^{-1}(t_1-\mu s)]B_2(t_1-\mu s)+\mu[p'Z_{11}^{(k)}[t_1,t_1-\mu s]+$$

$$+\int\limits_0^{s} q'\Phi[t_1,\sigma](A_{21}(t_1-\mu\sigma)Z_{11}^{(k)}[t_1-\mu\sigma,t_1-\mu s]+G_2(t_1-\mu\sigma)Z_{11}^{(k)}[t_1-\mu\sigma-h,t_1-\mu s])d\sigma]B_0(t_1-\mu s),$$

где $\Phi[t_1,s]=Y[t_1,t_1-\mu s]$.

Таким образом, из представлений (15), (16) получаем следующий результат.

Теорема 2. *При $0<\mu\le\mu_0$ (μ_0 достаточно мало) для любых $p\in R^n$, $q\in R^m$ выполняются соотношения:*

$$\chi^0(p,q)=\chi^{(k)}(p,q)+\widehat{\xi}_k(p,q),$$

причем $\left|\widehat{\xi}_k(p,q)\right|\le\|l\|\,\widehat{\omega}_k(\mu)$, $\widehat{\omega}_k(\mu)=O(\mu^{k+1})$;

$$\varepsilon^0(t_1)=\varepsilon^{(k)}(t_1)+O(\mu^{k+1}), \tag{17}$$

где

$$\chi^{(k)}(p,q)=-h_{(k)}^{**}(p,q)-\int\limits_{t_0}^{t_1-\alpha_k(\mu)}\rho(-r_1^{(k)}(\tau,t_1,p,q)\mid P(\tau))d\tau-\int\limits_0^{\alpha_k(\mu)/\mu}\rho(-r_2^{(k)}(s,t_1,p,q)\mid V(s))ds,$$

$$V(s)=P(t_1-\mu s),$$

$$h_{(k)}(p,q)=\varphi^*(p,q)-\rho(p'Z_{11}^{(k)}[t_1,t_0]+\int\limits_0^{\alpha_k(\mu)/\mu} q'\Phi[t_1,s](A_{21}(t_1-\mu s)Z_{11}^{(k)}[t_1-\mu s,t_0]+$$

$$+G_2(t_1-\mu s)Z_{11}^{(k)}[t_1-\mu s-h,t_0])ds\mid X_0)-\rho(p'Z_{12}^{(k)}[t_1,t_0]+$$

$$+\int\limits_0^{\alpha_k(\mu)/\mu} q'\Phi[t_1,s](A_{21}(t_1-\mu s)Z_{12}^{(k)}[t_1-\mu s,t_0]+G_2(t_1-\mu s)Z_{12}^{(k)}[t_1-\mu s-h,t_0])ds\mid Y_0)-$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t_0+h}\rho(r_h^{(k)}(\tau,t_1,p,q)|\Psi(\tau-h))d\tau,$$

$$\varepsilon^{(k)}(t_1) = \max\{\chi^{(k)}(p,q) \mid p \in R^n, q \in R^m\} = \chi^{(k)}(p^{(k)}, q^{(k)}). \qquad (18)$$

Предположение 2.

(i) Система (3) *вполне управляема* [5] *на* T.

(ii) Для любого $t \in T \quad \mathrm{rank}\{B_2(t), A_{22}(t)B_2(t), \ldots, A_{22}^{m-1}(t)B_2(t)\} = m$.

(iii) Максимум в (18) *достигается на векторе* $(l^{(k)})' = (p^{(k)'}, q^{(k)'})$ *таком, что*

$$r_1^{(k)}(\tau, t_1, p^{(k)}, q^{(k)}) \neq 0, \qquad q^{(k)} \neq 0.$$

Следует заметить, что в условиях предположения 2 задача 1 разрешима [5, с. 110; 6, с. 76], т.е. существует управление $u^0(\cdot) \in P(\cdot)$, удовлетворяющее (6) при $0 < \mu \leq \mu_0$, причем вектор $(l^0)' = (p^{0'}, q^{0'})$, максимизирующий (5), отличен от нулевого.

Теорема 3. *Пусть выполнено предположение* 2. *Тогда при* $0 < \mu \leq \mu_0$ *(μ_0 достаточно мало) управляющее воздействие*

$$u_\mu^{(k)}(\tau) = \begin{cases} u^{(k)}(\tau), & t_0 \leq \tau \leq t_1 - \alpha_k(\mu), \\ v^{(k)}((t_1-\tau)/\mu), & t_1 - \alpha_k(\mu) < \tau \leq t_1, \end{cases}$$

доставляет оценку $\varepsilon^0(t_1)$ *с точностью* $O(\mu^{k+1})$:

$$\varepsilon^0(t_1) = J(u^0(\cdot)) = J(u_\mu^{(k)}(\cdot)) + O(\mu^{k+1}), \qquad (19)$$

причем $u^{(k)}(\cdot)$, $v^{(k)}(\cdot)$ *определяются условиями: при почти всех* $\tau \in [t_0, t_1 - \alpha_k(\mu)]$, $s \in [0, \alpha_k(\mu)/\mu)$

$$r_1^{(k)}(\tau, t_1, p^{(k)}, q^{(k)}) u^{(k)}(\tau) = \min_{u(\tau)\in P(\tau)} r_1^{(k)}(\tau, t_1, p^{(k)}, q^{(k)}) u(\tau),$$

$$r_2^{(k)}(s, t_1, p^{(k)}, q^{(k)}) v^{(k)}(s) = \min_{v(s)\in V(s)} r_2^{(k)}(s, t_1, p^{(k)}, q^{(k)}) v(s).$$

Доказательство. Утверждение вытекает из свойств функции

$$L_{(k)}(p,q;u(\cdot),v(\cdot)) = -h_{(k)}^{**}(p,q) + \int\limits_{t_0}^{t_1-\alpha_k(\mu)} r_1^{(k)}(\tau,t_1,p,q)u(\tau)d\tau + \int\limits_0^{\alpha_k(\mu)/\mu} r_2^{(k)}(s,t_1,p,q)v(s)ds,$$

а именно элементы $p^{(k)}$, $q^{(k)}$, $u^{(k)}(\cdot)$, $v^{(k)}(\cdot)$ определяют седловую точку $L_{(k)}(p,q;u(\cdot),v(\cdot))$: для $p \in R^n$, $q \in R^m$, $u \in P(\cdot)$, $v \in V(\cdot)$

$$L_{(k)}(p,q;u^{(k)}(\cdot),v^{(k)}(\cdot)) \leq L_{(k)}(p^{(k)},q^{(k)};u^{(k)}(\cdot),v^{(k)}(\cdot)) \leq L_{(k)}(p^{(k)},q^{(k)};u(\cdot),v(\cdot)),$$

причем (пользуясь (18))

$$\varepsilon^{(k)}(t_1) = \min_{u(\cdot),v(\cdot)} \max_{p,q} L_{(k)}(p,q;u(\cdot),v(\cdot)) = \max_{p,q} \min_{u(\cdot),v(\cdot)} L_{(k)}(p,q;u(\cdot),v(\cdot)) =$$
$$= L_{(k)}(p^{(k)},q^{(k)};u^{(k)}(\cdot),v^{(k)}(\cdot)), \quad p \in R^n,\ q \in R^m,\ u \in P(\cdot),\ v \in V(\cdot).$$

Тогда получим

$$J(u_\mu^{(k)}(\cdot)) = \max_{p\in R^n, q\in R^m} \{L_{(k)}(p,q;u^{(k)}(\cdot),v^{(k)}(\cdot)) + \hat{\xi}_k(p,q;\mu)\}, \qquad (20)$$

где $\hat{\xi}_k(p,q;\mu)$ имеет такой же как в (17) порядок малости по μ $(0 < \mu \leq \mu_0)$, и максимум в (20) достигается на некотором векторе $\hat{l} \in \mathrm{co}\, M^{(k)}$, где $M^{(k)} = \{l \in R^{n+m} \mid l \in \partial\varphi(z),\ z \in Z(t_1; u_\mu^{(k)}(\cdot), Z_0),\ \varphi(z) = J(u_\mu^{(k)}(\cdot))\}$, $\partial\varphi(z)$ — субдифференциал функции φ в точке z [11], $\mathrm{co}\, M^{(k)}$ — выпуклая оболочка $M^{(k)}$ (в данном случае $M^{(k)}$ — компакт в R^{n+m}).

Таким образом, имеем $J(u_\mu^{(k)}(\cdot)) = \varepsilon^{(k)}(t_1) + O(\mu^{k+1})$ при $(0 < \mu \leq \mu_0)$, и, следовательно, справедливо равенство (19). Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Дмитриев М.Г., Курина Г.А.* Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–51.

2. *Kokotovic P.V., Khalil H.K., O'Reilly J.* Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design. SIAM, 1999. 200 c.

3. *Калинин А.И.* Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем. Минск: Экоперспектива, 2000. 294 с.

4. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981. 100 с.

5. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.

6. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.

7. *Кремлёв А.Г.* Асимптотические свойства ансамбля траекторий сингулярно возмущенной системы в задаче оптимального управления // Автоматика и телемеханика. 1993. № 9. С. 61–78.

8. *Кремлёв А.Г.* Об оптимальном управлении ансамблем траекторий сингулярно возмущенной квазилинейной системы // Диф. уравнения. 1994. Т. 30, № 11. С. 1892–1904.

9. *Кремлёв А.Г., Гребенникова И.В.* Об асимптотике оптимального управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием // Математика. Информационные технологии. Образование: Материалы науч.-прктич. конф. Ч. 1. Оренбург: Изд-во ГОУ ОГУ, 2006. С. 36–38.

10. *Гребенникова И.В., Кремлёв А.Г.* О начальной аппроксимации минимаксной задачи управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием // Качество науки — качество жизни: Материалы науч.-прктич. конф. Тамбов: Изд-во ТГТУ, 2007. С. 89–92.

11. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 492 с.

12. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 192 с.

13. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 547 с.

14. *Кремлёв А.Г., Гребенникова И.В.* Об асимптотике ансамбля траекторий управляемой сингулярно возмущенной системы с запаздыванием // Новости научной мысли – 2006: Материалы науч.-прктич. конф. Т. 4. Днепропетровск: Наука и образование, 2006. С. 65–69.

15. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 498 с.

УДК 519.872

МЕТОД АНАЛИЗА СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ДИНАМИЧЕСКИМ УПРАВЛЕНИЕМ ИНТЕНСИВНОСТЯМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

В.И. Долгов, Ю.И. Митрофанов, Е.С. Рогачко

Саратовский государственный университет,
кафедра системного анализа и автоматического управления
E-mail: DolgovVI@sysan.ru, MitrophanovYuI@info.sgu.ru,
RogachkoES@info.sgu.ru

Предлагаются модель эволюции и метод анализа замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания с динамическим управлением интенсивностями обслуживания. Приводятся способ вычисления стационарного распределения и формулы для вычисления стационарных характеристик сетей. Дается пример анализа сети обслуживания рассматриваемого типа. Как показали результаты анализа и имитационного моделирования данной сети, метод имеет достаточную для практических приложений точность.

Ключевые слова: сети массового обслуживания, интенсивности обслуживания, управление интенсивностями обслуживания, анализ сетей массового обслуживания.

Method for Analysis of Queueing Networks with Dynamic Control of Service Rates

V.I. Dolgov, Yu.I. Mitrophanov, E.S. Rogachko

Saratov State University,
Chair of Systems Analysis and Automatic Control
E-mail: DolgovVI@sysan.ru, MitrophanovYuI@info.sgu.ru,
RogachkoES@info.sgu.ru

Model of evolution and a method for analysis of closed exponential queueing networks with dynamic control of service rates are proposed. A method of computing of the stationary distribution and formulas for calculating of stationary characteristics of the networks are presented. An example of analysis of considered type queueing network is given. According to the results of analysis and simulation of this network the accuracy of this method is sufficient for practical application.

Key words: queueing networks, service rates, service rates control, analysis of queueing networks.