O. V. Shabanin, On the complexity of the disjunctive normal form of threshold functions,
Diskr. Mat., 2000, Volume 12, Issue 2, 85–92

Дискретная математика

том 12 выпуск 2 * 2000

УДК 519.7

О сложности дизъюнктивной нормальной формы пороговых функций

© 2000 г. О. В. Шабанин

В работе рассматривается задача оценки сложности дизъюнктивной нормальной формы (д. н. ф.), понимаемой как минимальное число простых импликант, входящих в запись д. н. ф. пороговых функций от n переменных. До этого было известно, что у почти всех пороговых функций сложность д. н. ф. не меньше $n^2/\log_2 n$. В работе доказаны неравенства, связывающие сложность д. н. ф. $L\nu(f)$ пороговой функции f с параметрами Чоу. С их помощью показано, что при достаточно больших n для почти всех пороговых функций

$$\log_2 L\nu(f) > n - 2\sqrt{2n\log_2 n}(1 + \delta(n)),$$

где $\delta(n)$ — любая функция такая, что $\delta(n) \to 0$ и $n\delta(n) \to \infty$ при $n \to \infty$.

Пороговой функцией (см. [1, 2, 6]) называется булева функция

$$f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$$

такая, что существуют действительные числа $w_1, \dots, w_n, T$, удовлетворяющие условию

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 \iff w_1x_2 + \ldots + w_nx_n \geqslant T.$$

При этом будем говорить, что функция f имеет реализацию $[w_1, \dots, w_n; T]$.

Под сложностью представления произвольной булевой функции в виде дизъюнктивной нормальной формы (д. н. ф.), или просто под сложностью д. н. ф., будем понимать число простых импликант, входящих в запись минимальной д. н. ф. (см. [7, 8]). Достаточно полный обзор результатов по теории сложности представления булевых функций в различных базисах из функциональных элементов можно найти в работе Р. Г. Нигматуллина [7]. Оценка сложности представления пороговых функций с помощью д. н. ф. представляет теоретический и практический интерес. Хорошо известен факт, что наибольшую сложность д. н. ф., равную $\binom{n}{[n/2]}$, в классе пороговых функций от n переменных имеет мажоритарная функция (см. [6]). Большая сложность д. н. ф. пороговых функций служит аргументом для использования в ряде случаев пороговых представлений булевых функций вместо представлений в виде д. н. ф. (см. [3]). С другой стороны, исследование сложности д. н. ф. пороговых функций тесно связано с проблемой алгоритмической сложности NP-полных задач. Например, известная задача о ранце:

максимизировать

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

при условии

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant b,$$

где x_i булевы, c_i, a_i, b — неотрицательные действительные числа, $i = 1, \dots, n$, может быть решена перебором всех максимальных допустимых решений, верхних нулей соответствующей монотонной функции.

Задача оценки сложности д. н. ф. пороговых функций предложена Ю. А. Зуевым. Ее постановку можно найти, например, в [5]. Наилучшая известная нижняя оценка приведена в работе Ю. А. Зуева и Л. И. Липкина [4], где доказано, что почти у всех пороговых функций сложность д. н. ф. не меньше $n^2/\log_2 n$. В данной работе показано, что при $n \to \infty$ для почти всех пороговых функций двоичный логарифм сложности д. н. ф. не меньше

$$n - 2\sqrt{2\log_2 n}(1 + \delta(n)),$$

где $\delta(n)$ — любая функция такая, что $\delta(n) \to 0$ и $n\delta(n) \to \infty$ при $n \to \infty$.

Будем считать, что векторы

$$(x_1, \dots, x_n), \quad (y_1, \dots, y_n), \quad x_i, y_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

связаны соотношением

$$(x_1, \dots, x_n) \leqslant (y_1, \dots, y_n),$$

если $x_i \leqslant y_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$, и соотношением

$$(x_1, \dots, x_n) < (y_1, \dots, y_n),$$

если $(x_1, \dots, x_n) \leqslant (y_1, \dots, y_n)$, но $(x_1, \dots, x_n) \neq (y_1, \dots, y_n)$.

Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется монотонной, если из условия $(x_1, \dots, x_n) \leqslant (y_1, \dots, y_n)$ следует, что $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leqslant f(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Нижней единицей монотонной функции $f(x_1, \dots, x_n)$ называется вектор $(a_1, \dots, a_n)$ такой, что $f(a_1, \dots, a_n) = 1$ и $f(b_1, \dots, b_n) = 0$ для любого $(b_1, \dots, b_n) < (a_1, \dots, a_n)$.

Две функции называются однотипными, если одна может быть получена из другой перестановкой координат и заменой некоторых переменных на их отрицания.

Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется однородной, если существует монотонная функция $g(x_1, \dots, x_n)$, однотипная с функцией $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Заметим, что если f и g — однотипные функции, то сложности д. н. ф. функций f и g совпадают.

Для монотонной функции f обозначим через $L\nu(f)$ количество нижних единиц функции f. Для обобщенно-монотонной функции g пусть $L\nu(g)$ — количество нижних единиц монотонной функции, однотипной с функцией g. Корректность такого определения следует из предыдущего замечания.

Известно, что любая пороговая функция является однородной. Учитывая тот факт, что для монотонной функции нижние единицы и только они соответствуют простым импликантам в записи д. н. ф. (см. [8]), а также то, что сложности д. н. ф. однотипных функций совпадают, легко показать, что сложность д. н. ф. пороговой функции равна $L\nu(f)$.

Для удобства выкладок перейдем к базису $\{-1,1\}$. Всюда далее рассматриваем функции, отображающие $\{-1,1\}^n$ в $\{-1,1\}$. Двоичные функции в базисе $\{-1,1\}$ однозначно соответствуют булевым функциям при замене 0 на -1. Известно (см. [1]), что функция f является пороговой в базисе $\{0,1\}$ тогда и только тогда, когда f — пороговая функция в базисе $\{-1,1\}$. Все введенные выше определения несложно перенести на базис $\{-1,1\}$. При этом останутся верными и сформулированные выше результаты.

Пусть $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ — двоичная функция. Введем обозначение

$$f^{-1}(1)=\{(a_1,a_2,\dots,a_n)\in\{-1,1\}^n\colon f(a_1,a_2,\dots,a_n)=1\}.$$

Целочисленный вектор $(\Delta_0(f),\Delta_1(f),\dots,\Delta_n(f))$ называется характеристическим вектором (вектором Чоу) функции f (см. [1, 2, 6]), если

$$\Delta_0=2^{n-1}-|f^{-1}(1)|,$$
$$(\Delta_1(f),\dots,\Delta_n(f))=\sum_{(a_1,a_2,\dots,a_n)\in f^{-1}(1)}(a_1,a_2,\dots,a_n),$$

где суммирование векторов ведется в поле действительных чисел.

Основное свойство, определяющее исключительное внимание к изучению характеристического вектора в пороговой логике, состоит в следующем (см. [1, 2, 6]): если $f(x_1,\dots,x_n)$ — пороговая функция, то для любой функции $g(x_1,\dots,x_n)$, $g\neq f$, верно соотношение

$$(\Delta_0(g),\Delta_1(g),\dots,\Delta_n(g))\neq(\Delta_0(f),\Delta_1(f),\dots,\Delta_n(f)). \tag{1}$$

Докажем данный факт. Предположим, что выполнено равенство

$$(\Delta_0(g),\Delta_1(g),\dots,\Delta_n(g))=(\Delta_0(f),\Delta_1(f),\dots,\Delta_n(f))$$

для некоторой пороговой функции f с реализацией $[w_1,\dots,w_n;T]$ и произвольной g, не равной f. Введем обозначения $A=f^{-1}(1)$ и $B=g^{-1}(1)$. Из равенства $\Delta_0(g)=\Delta_0(f)$ следует, что $|A|=|B|$, а следовательно, $|A\setminus B|=|B\setminus A|$. Остальные равенства дают условие

$$\sum_{\bar a\in A}\bar a=\sum_{\bar a\in B}\bar a,$$

что равносильно равенству

$$\sum_{\bar a\in(A\setminus B)}\bar a=\sum_{\bar a\in(B\setminus A)}\bar a.$$

Домножим векторы в правой и левой части равенства скалярно на вектор $(w_1,\dots,w_n)$. Тогда по определению пороговой функции левая часть больше либо равна $T|A\setminus B|$, а правая часть меньше, чем $T|A\setminus B|$. Получаем противоречие. Следовательно, исходное утверждение доказано.

Введем обозначения

$$f_0(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})=f(-1,x_1,\dots,x_{n-1}),$$
$$f_1(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})=f(1,x_1,\dots,x_{n-1}).$$

Тогда для характеристических векторов

$$(\Delta_0(f_0), \Delta_1(f_0), \dots, \Delta_n(f_0)), \qquad (\Delta_0(f_1), \Delta_1(f_1), \dots, \Delta_n(f_1))$$

функций f_0 и f_1 соответственно справедливы равенства

$$\Delta_i(f) = \Delta_{i-1}(f_0) + \Delta_{i-1}(f_1), \qquad i = 2, 3, \dots, n. \tag{2}$$

Нетрудно также заметить, что

$$|\Delta_i(f)| \leqslant 2^{n-1}, \qquad i = 0, 1, \dots, n. \tag{3}$$

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — пороговая функция с реализацией $[w_1, \dots, w_n; T]$. Для характеристического вектора

$$(\Delta_0(f), \Delta_1(f), \dots, \Delta_n(f))$$

хорошо известны следующие свойства (см. [2]):

$$w_i \geqslant 0 \implies \Delta_i(f) \geqslant 0, \qquad i = 1, 2, \dots, n, \tag{4}$$

$$w_i \leqslant 0 \implies \Delta_i(f) \leqslant 0, \qquad i = 1, 2, \dots, n, \tag{5}$$

$$w_i \geqslant w_j \implies \Delta_i(f) \geqslant \Delta_j(f), \qquad i, j = 1, 2, \dots, n. \tag{6}$$

Упорядочивая веса пороговой функции, можно дать описание структуры нижних единиц.

Рассмотрим пороговую функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ с реализацией

$$[w_1, \dots, w_n; T], \qquad w_1 \geqslant w_2 \geqslant \dots \geqslant w_n \geqslant 0, \tag{7}$$

и условием $f^{-1}(1) \neq \{-1, 1\}^n$. Тогда вектор $(a_1, \dots, a_k, 1, -1, \dots, -1)$ является нижней единицей функции f тогда и только тогда, когда

$$\begin{gathered} (a_1, \dots, a_k, 1, -1, \dots, -1) \in f^{-1}(1), \\ (a_1, \dots, a_k, -1, -1, \dots, -1) \notin f^{-1}(1). \end{gathered} \tag{8}$$

Докажем этот факт. Пусть условия (8) выполнены. Предположим, что вектор $(a_1, \dots, a_k, 1, -1, \dots, -1)$ не является нижней единицей. Тогда существует номер i, $1 \leqslant i \leqslant n$, такой, что $a_i = 1$ и

$$(a_1, \dots, a_{i-1}, -1, a_{i+1}, \dots, a_k, 1, -1, \dots, -1) \in f^{-1}(1).$$

Так как $w_i \geqslant w_k$ по условию (1), то

$$(a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_k, -1, -1, \dots, -1) \in f^{-1}(1),$$

получаем противоречие с (8).

В обратную сторону утверждение очевидно по определению нижней единицы.

Следующая лемма связывает сложность д. н. ф. с коэффициентами характеристического вектора пороговой функции.

Лемма. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n)$ — *пороговая функция с реализацией*

$$[w_1, \ldots, w_n; T], \qquad w_1 \geqslant w_2 \geqslant \ldots \geqslant w_n \geqslant 0. \tag{9}$$

Тогда для числа нижних единиц функции f *выполняется неравенство*

$$L\nu(f) \geqslant \Delta_i(f)/2^{n-i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Доказательство. Докажем неравенство (10) индукцией по числу переменных.

Для $n = 1$ либо $\Delta_1(f) = 0$, либо $\Delta_1(f) = 1$, и неравенство (10) очевидно.

Пусть неравенство (10) выполнено для всех пороговых функций с условиями (9) от не более чем $n - 1$ переменных. Докажем неравенство для функции от n переменных.

Пусть пороговая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет условиям (9). Тогда

$$\Delta_1(f) \geqslant \Delta_2(f) \geqslant \ldots \geqslant \Delta_n(f) \geqslant 0.$$

Учитывая, что $|\Delta_i(f)| \leqslant 2^{n-1}$, для $i = 1$ находим, что

$$L\nu(f) \geqslant 1 \geqslant \Delta_1(f)/2^{n-1}.$$

Если $f^{-1}(1) = \{-1, 1\}^n$, то $\Delta_1(f) = \ldots = \Delta_n(f) = 0$ и оценка (10) верна.

Пусть теперь $i \geqslant 2$ и

$$f^{-1}(1) \neq \{-1, 1\}^n. \tag{11}$$

Рассмотрим две функции

$$f_{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = f(-1, x_1, \ldots, x_{n-1}),$$
$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = f(1, x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Тогда f_{-1} и f_1 — пороговые функции, как следует из условий (2), (4)–(6), для них

$$\Delta_1(f_\varepsilon) \geqslant \Delta_2(f_\varepsilon) \geqslant \ldots \geqslant \Delta_n(f_\varepsilon) \geqslant 0, \qquad \varepsilon \in \{-1, 1\}, \tag{12}$$

и

$$\Delta_i(f) = \Delta_{i-1}(f_0) + \Delta_{i-1}(f_1), \qquad i = 2, 3, \ldots, n. \tag{13}$$

Покажем, что

$$L\nu(f) = L\nu(f_{-1}) + L\nu(f_1). \tag{14}$$

Для этого достаточно доказать, что вектор $(\varepsilon, a_1, \ldots, a_{n-1})$ является нижней единицей функции f тогда и только тогда, когда вектор $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ является нижней единицей функции f_ε, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

Пусть $(\varepsilon, a_1, \ldots, a_{n-1})$ — нижняя единица функции f. Определим число k следующим образом: если $a_{n-1} = 1$, то $k = n$, если $a_{n-1} = -1$, то k найдем из условия

$$a_k = 1, \quad a_{k+1} = a_{k+2} = \ldots = a_n = -1.$$

Ввиду условия (11) такое k существует.

По доказанному выше $(\varepsilon, a_1, \dots, a_k, 1, -1, \dots, -1)$ — нижняя единица функции f тогда и только тогда, когда

$$(\varepsilon, a_1, \dots, a_k, 1, -1, \dots, -1) \in f^{-1}(1),$$

$(\varepsilon, a_1, \dots, a_k, -1, -1, \dots, -1) \notin f^{-1}(1)$ тогда и только тогда, когда

$$(a_1, \dots, a_k, 1, -1, \dots, -1) \in f_\varepsilon^{-1}(1)$$

и

$$(a_1, \dots, a_k, -1, -1, \dots, -1) \notin f_\varepsilon^{-1}(1)$$

тогда и только тогда, когда $(a_1, \dots, a_k, 1, -1, \dots, -1)$ — нижняя единица функции f_ε. Следовательно, равенство (14) доказано.

Из условий теоремы и свойств (3), (5) и (6) следует, что функции f_{-1} и f_1, зависящие от $(n-1)$-й переменной, удовлетворяют предположениям индукции. Таким образом, используя равенства (13) и (14), находим, что

$$\begin{aligned} L\nu(f) &= L\nu(f_{-1}) + L\nu(f_1) \geqslant \Delta_{i-1}(f_{-1})/2^{(n-1)-(i-1)} + \Delta_{i-1}(f_1)/2^{(n-1)-(i-1)} \\ &= (\Delta_{i-1}(f_{-1}) + \Delta_{i-1}(f_1))/2^{n-i} \geqslant \Delta_i(f)/2^{n-i}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следствие. *Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — пороговая функция, и пусть*

$$|\Delta_1^*(f)| \geqslant |\Delta_2^*(f)| \geqslant \dots \geqslant |\Delta_n^*(f)| \geqslant 0$$

суть числа $|\Delta_1(f)|, |\Delta_2(f)|, \dots, |\Delta_n(f)|$, расположенные в порядке убывания.

Тогда

$$L\nu(f) \geqslant |\Delta_i^*(f)|/2^{n-i}, \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Для доказательства основной теоремы понадобится следующий известный результат. Обозначим через $F(n)$ число двоичных пороговых функций от n переменных. В [5] показано, что при $n \to \infty$

$$\log_2 F(n) > n^2 - n \log_2 n + O(n). \tag{15}$$

Теорема. *При $n \to \infty$ для почти всех пороговых функций для сложности д. н. ф. $L\nu(f)$ выполнено неравенство*

$$\log_2 L\nu(f) > n - 2\sqrt{2n \log_2 n}(1 + \delta(n)),$$

где $\delta(n)$ — любая функция такая, что $\delta(n) \to 0$ и $n\delta(n) \to \infty$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — пороговая функция. Как отмечалось выше, сложность д. н. ф. функции f равна $L\nu(f)$. Пусть функция $\varepsilon(n)$ удовлетворяет условиям $0 < \varepsilon(n) < 1$ и $\varepsilon(n) \log_2 n \to \infty$ при $n \to \infty$. Положим

$$p(n) = 1 - 2\sqrt{(2 + \varepsilon(n)) \log_2 n / n}.$$

Располагая числа $|\Delta_1(f)|, |\Delta_2(f)|, \dots, |\Delta_n(f)|$ в порядке убывания, получим последовательность

$$|\Delta_1^*(f)| \geqslant |\Delta_2^*(f)| \geqslant \dots \geqslant |\Delta_n^*(f)| \geqslant 0.$$

Согласно следствию

$$L\nu(f) \geqslant |\Delta_i^*(f)|/2^{n-i}, \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Оценим число пороговых функций $H_1(n)$ от n переменных, для которых

$$|\Delta^*_{[np(n)]}(f)| < 2^{np(n)},$$

где $[np(n)]$ — целая часть числа $np(n)$.

Заметим, что для данной функции f от n переменных количество функций, однотипных с ней (полученных перестановкой переменных и заменой некоторых переменных их отрицаниями), не превосходит $2^n n!$. Отсюда следует, что $H_1(n) \leqslant 2^n n! H(n)$, где $H(n)$ — количество пороговых функций, удовлетворяющих условиям

$$\Delta_1(f) \geqslant \Delta_2(f) \geqslant \dots \geqslant \Delta_n(f) \geqslant 0, \tag{16}$$

$$\Delta_{[np(n)]}(f) < 2^{np(n)}. \tag{17}$$

Согласно основному свойству характеристического вектора пороговой функции (1) $H(n)$ не превосходит количества характеристических векторов двоичных функций с ограничениями (16) и (17).

Таким образом, $H(n)$ не превосходит числа всевозможных целочисленных векторов $(\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n)$ с ограничениями

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \Delta_i &\leqslant 2^{2n(p)}, && i = [n(p(n)], [np(n)] + 1, \dots, n, \\ 0 \leqslant \Delta_i &\leqslant 2^{n-1}, && i = 1, 2, \dots, [n(p(n)] - 1, \\ -2^{n-1} \leqslant \Delta_0 &\leqslant 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$H(n) \leqslant (2^n + 1)(2^{n-1} + 1)^{[np(n)]} 2^{np(n)(n-[np(n)])}.$$

Отсюда,

$$\log_2 H(n) \leqslant n^2 p(n) + np(n)(n - np(n) + 1) + \log_2 n.$$

При $n \to \infty$ разность

$$\begin{aligned} \log_2 H_1(n) - \log_2 F(n) &< (n^2 p(n) + np(n)(n - np(n) + 1) + \log_2 n + n + n\log_2 n) \\ &\quad - (n^2 - n\log_2 n + o(n\log_2 n)) \\ &= -n^2(1 - p(n))^2 + np(n) + 2n\log_2 n + O(n)) \\ &= -\varepsilon(n) n \log_2 n + O(n) \end{aligned}$$

стремится к $-\infty$ согласно выбору $\varepsilon(n)$.

Отсюда следует, что $H_1(n)/F(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Таким образом, показано, что для почти всех пороговых функций выполняется неравенство

$$|\Delta^*_{[np(n)]}(f)| \geqslant 2^{np(n)}. \tag{18}$$

Согласно следствию

$$L\nu(f) \geqslant \Delta^*_{[np(n)]}(f)/2^{n-[np(n)]}. \tag{19}$$

Тогда из (18) и (19) следует, что для почти всех пороговых функций

$$L\nu(f) \geqslant 2^{np(n)}/2^{n-np(n)} \geqslant 2^{n(2p(n)-1)}.$$

Следовательно,

$$\log_2 L\nu(f) \geqslant n\left(1 - 2\sqrt{(2+\varepsilon(n))\frac{\log_2 n}{n}}\right).$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. Бутаков Е. А., *Методы синтеза релейных устройств из пороговых элементов.* Энергия, Москва, 1970.
2. Дертоузос М., *Пороговая логика.* Мир, Москва, 1967.
3. Зуев Ю. А., Пороговые функции и пороговые представления булевых функций. *Математические вопросы кибернетики* (1994) **5**, 5–61.
4. Зуев Ю. А., Липкин Л. И., Регулярные булевы функции с заданной сложностью дезъюнктивных нормальных форм. *Методы дискретного анализа в изучении булевых функций и графов.* ИМ СО АН СССР, Новосибирск, 1989, **48**, 17–22.
5. Зуев Ю. А., Асимптотика логарифма числа пороговых функций алгебры логики. *Докл. АН СССР* (1989) **306**, №3, 528–530.
6. Muroga S., *Threshold Logic and its Applications.* Wiley, New York, 1971.
7. Нигматуллин Р. Г., *Сложность булевых функций.* Наука, Москва, 1990.
8. Яблонский С. В., *Введение в дискретную математику.* Наука, Москва, 1979.
9. Яблонский С. В., *Дискретная математика и математическая кибернетика.* Наука, Москва, 1974.

Статья поступила 17.05.1999.