Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. А. Аркадьев, А. К. Погребков, М. К. Поливанов,
Замечание о пуассоновой структуре для уравнения КдФ,
Докл. АН СССР, 1988, том 298, номер 2, 324–328

https://www.mathnet.ru/dan7826

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.82
21 января 2026 г., 09:13:53

Доклады Академии наук СССР
1988. Том 298, № 2

УДК 517.9 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В.А. АРКАДЬЕВ, А.К. ПОГРЕБКОВ, М.К. ПОЛИВАНОВ

ЗАМЕЧАНИЕ О ПУАССОНОВОЙ СТРУКТУРЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КдФ

(Представлено академиком Л.Д. Фаддеевым 4 XII 1986)

Перенесение на бесконечномерный случай классического аппарата гамильтоновой механики – скобок Пуассона и симплектических форм – приводит к некоторым специфическим затруднениям, связанным с функциональной природой динамических переменных, определением касательных векторов и соответственно с уточнением понятия гладкости. Яркий пример этой специфики бесконечномерного случая дает теория уравнения Кортевега–де Фриса [1]

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{1}$$

для которого были предложены различные формы скобок Пуассона:

гарднеровская скобка [2]

$$\{F, G\}_G = \int dx \frac{\delta F}{\delta u(x)} \left(\frac{\delta G}{\delta u(x)}\right)_x, \tag{2}$$

ее антисимметризованный вариант [3, 4]

$$\{F, G\}_{as} = \frac{1}{2} \int dx \left[\frac{\delta F}{\delta u(x)} \left(\frac{\delta G}{\delta u(x)}\right)_x - \left(\frac{\delta F}{\delta u(x)}\right)_x \frac{\delta G}{\delta u(x)}\right], \tag{3}$$

а также скобка со специальными граничными членами [5]

$$[F, G] = \{F, G\}_{as} + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta F}{\delta u(+)} \frac{\delta G}{\delta u(-)} - \frac{\delta F}{\delta u(-)} \frac{\delta G}{\delta u(+)}\right) \equiv \tag{4}$$

$$\equiv \int dx \int dy \frac{\epsilon(y-x)}{2} \left(\frac{\delta F}{\delta u(x)}\right)_x \left(\frac{\delta G}{\delta u(y)}\right)_y.$$

Мы имеем в виду здесь задачу (1) на всей оси $-\infty < x < +\infty$ в быстроубывающем случае. Точнее, $u = u(t, x)$ (аргумент t обычно будем опускать) – вещественная функция, непрерывно дифференцируемая по t и $\forall t$: $u(t, \cdot) \in \mathcal{S}$ – пространству Шварца. Индексы t и x означают соответствующие частные производные, в (4) $\epsilon(x)$ – знаковая функция, и введено обозначение

$$\frac{\delta F}{\delta u(\pm)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\delta F}{\delta u(x)}. \tag{5}$$

Видно, что эти скобки совпадают при обращении в нуль пределов (5) и порождают динамику (1): $u_t = \{u, H\}$ с гамильтонианом

$$H = \int dx (u(x)^3 + \tfrac{1}{2} u_x(x)^2). \tag{6}$$

Однако класс функционалов, для которых пределы в (5) равны нулю, слишком узок – в него не попадают, например, элементы приведенной матрицы монодромии

для вспомогательной линейной задачи

(7) $\quad -y_{xx} + u(x)y = k^2 y,$

а также ее данные рассеяния, в терминах которых устанавливается факт полной интегрируемости (1). Под элементами матрицы монодромии мы понимаем, как обычно, коэффициенты $a(k)$ и $b(k)$ в равенстве

(8) $\quad \varphi(x, k) = a(k)\psi(x, k) + b(k)\bar{\psi}(x, k),$

где $\varphi(x, k)$, $\psi(x, k) = e^{-ikx} + o(1)$ соответственно при $x \to -\infty$, $x \to +\infty$ – решения Йоста задачи (7). Вариации $\delta a(k)/\delta u(x)$, $\delta b(k)/\delta u(x)$ (см. [3–5]) не исчезают на бесконечности, а стремятся к некоторым пределам, которые также являются динамическими переменными. Именно потому, что необходимо определять скобку Пуассона на функционалах с $\delta F/\delta u(\pm) \neq 0$, для которых выражение (2) теряет антисимметрию, в работах [3, 4] рассматривалось выражение (3).

Однако для данных рассеяния имеется еще одна неприятность: значения второй вариационной производной на бесконечностях зависят от порядка предельных переходов.

(9) $$\frac{\delta^2 k^2 b(k)}{\delta u(+)\delta u(-)} - \frac{\delta^2 k^2 b(k)}{\delta u(-)\delta u(+)} \equiv \left(\lim_{x \to +\infty} \lim_{y \to -\infty} - \right.$$

$$\left. - \lim_{y \to -\infty} \lim_{x \to +\infty}\right) \frac{\delta^2 k^2 b(k)}{\delta u(x)\delta u(y)} = \frac{i\pi}{2}\,(kb(k))\delta(k).$$

Напомним, что в общем положении $kb(k)|_{k=0} \neq 0$ (см., например, [7]). Теперь, если проверить тождество Якоби для скобки (3), мы получим

(10) $\quad \{\{F, G\}_{\text{as}}, H\}_{\text{as}} + (\text{цикл}) =$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{\delta^2 F}{\delta u(+)\delta u(-)} - \frac{\delta^2 F}{\delta u(-)\delta u(+)}\right)\left(\frac{\delta G}{\delta u(+)}\,\frac{\delta H}{\delta u(-)} - \frac{\delta G}{\delta u(-)}\,\frac{\delta H}{\delta u(+)}\right) +$$

$$+ (\text{цикл}).$$

Видно, что правая часть, вообще говоря, в нуль не обращается, т.е. (3) в данной ситуации не есть скобка Пуассона. Заметим, что пример, когда $\dfrac{\delta^2 F}{\delta u(+)\delta u(-)} \neq$ $\neq \dfrac{\delta^2 F}{\delta u(-)\delta u(+)}$, помимо $k^2 b(k)$, дает более простой функционал вида

(11) $\quad \int dx \int dy\, u(x)u(y) \operatorname{arctg}(x + y).$

Простейший способ убедиться, что скобка (3) нарушает тождество Якоби, – вычислить левую часть в (10), выбрав в качестве F функционал (11), $G = \int\limits_{-\infty}^{0} dx u(x)$, а в качестве H – функционал

(12) $\quad Q = \int dx u(x).$

Этот функционал – известный первый интеграл в бесконечной серии локальных интегралов движения (см. [4]). Этот функционал является аннулятором для всех функционалов, вариации которых исчезают на бесконечности. Однако для интересующего нас общего случая

$$\{F, Q\}_{\text{as}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\delta F}{\delta u(+)} - \frac{\delta F}{\delta u(-)}\right) \neq 0.$$

В частности, $\{u(x), Q\}_{as} = 0$, но $\{b(k), Q\}_{as} \neq 0$. Именно для преодоления этого "парадокса" в [5] предложена скобка (4). Действительно, легко видеть, что для любого F: $[F, Q] = 0$. Нетрудно также убедиться, что она удовлетворяет тождеству Якоби: опасные члены вида правой части (10) для этой скобки отсутствуют.

В работе [5] вычислены скобки данных рассеяния по (4). При этом выяснился следующий удивительный факт: скобки непрерывных и дискретных частей данных рассеяния не расцепляются! На самом деле также обстоит дело для скобки (3), если аккуратно провести указанные в [3, 4] выкладки. Таким, образом возникает противоречие с результатом работы [6], где показано, что соответствующая симплектическая форма в терминах данных рассеяния диагональна по дискретным и непрерывным степеням свободы.

Оказывается, что разрешение всех этих парадоксов и трудностей, как отмечалось выше, лежит в уточнении понятий, участвующих в определении симплектической формы для бесконечномерного случая. Такое последовательное уточнение достаточно трудоемко. Здесь мы приведем лишь основные моменты построения и главные результаты.

Прежде всего, рассматривая свойства данных рассеяния, мы обнаруживаем, что без потери общности можно ограничить рассмотрение классом функционалов, имеющих две сильных (в смысле нормы в L^1) вариационных производных. При этом нельзя требовать обращения в нуль пределов типа (5) и (9). Можно считать, что $(\delta F/\delta u(x)_x \in \mathcal{S}$, причем если F зависит от некоторого параметра (пример: $F = b(k)$), то все эти утверждения следует понимать в смысле $\mathcal{S}'$ по этому параметру. Множество таких функционалов обозначим $\mathcal{F}$.

Основное наше уточнение относится к определению касательных векторов (касательных векторных полей). А именно, оказывается, что касательный вектор ξ как дифференциальный оператор первого порядка на множестве $\mathcal{F}$ следует задавать функцией $\xi(x) \in \mathcal{S}$ и параметром ξ_0 по правилу

$$(13)\quad \xi F = \int dx\, \xi(x) \frac{\delta F}{\delta u(x)} + \xi_0 \left(\frac{\delta F}{\delta u(+)} - \frac{\delta F}{\delta u(-)} \right).$$

Таким образом, $\xi = (\xi(x), \xi_0)$, т.е. возникло одномерное расширение обычного понятия касательного вектора, естественно отражающее ненулевые асимптотики $\delta F/\delta u(\pm)$. Легко убедиться, что такое определение касательного вектора удовлетворяет всем обычным свойствам: правилу Лейбница и условию, что коммутатор двух векторов есть вектор. Заметим, что последнее не совсем тривиально, поскольку у нас

$$\frac{\delta^2 F}{\delta u(+)\delta u(-)} \neq \frac{\delta^2 F}{\delta u(-)\delta u(+)}.$$

С учетом этого расширения понятия вектора симплектическая форма Захарова–Фаддеева [6] записывается в виде

$$(14)\quad \omega(\xi, \eta) = \int dx \int dy\, \frac{\epsilon(y-x)}{2}\, \xi(x)\eta(y) - \int dx (\xi_0 \eta(x) - \eta_0 \xi(x)),$$

где $\xi = (\xi(x), \xi_0)$, $\eta = (\eta(x), \eta_0)$ – векторы. Легко проверить, что (14) действительно задает симплектическую форму – кососимметрическую, невырожденную и замкнутую. Более того, эта форма точна:

$$\omega = d\Omega, \quad \Omega(\xi) = \int dx \int dy\, \frac{\epsilon(x-y)}{4}\, u(y)\xi(x) + \frac{\xi_0}{2} \int dx u(x).$$

Теперь уже обычным образом строится оператор I, отображающий дифференциалы dF функционалов из $\mathcal{F}$ в множество векторов по правилу

$$(15)\quad \omega(\xi, IdF) = dF(\xi) = \xi F$$

для любого ξ. Записывая искомый вектор в виде $IdF = ((IdF)(x),\ (IdF)_0)$, из сравнения (13) и (14) получаем

$$(16)\quad (IdF)(x) = -\left(\frac{\delta F}{\delta u(x)}\right)_x, \quad (IdF)_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta F}{\delta u(+)} + \frac{\delta F}{\delta u(-)}\right).$$

Последняя из этих формул наглядно демонстрирует необходимость проведенного одномерного расширения касательного вектора: в его отсутствие оператор I определен лишь на дифференциалах таких функционалов, для которых

$$\frac{\delta F}{\delta u(+)} + \frac{\delta F}{\delta u(-)} = 0.$$

В этот класс не попадают ни $a(k)$, ни Q, ни другие нужные нам функционалы. В нашем случае область определения I охватывает все dF для любых F из $\mathcal{F}$.

Скобка Пуассона, как обычно, задается равенством

$$\{F, G\} = \omega(IdF, IdG),$$

что с учетом (14) и (16) дает выражение, отличающееся от (4) знаком граничного члена:

$$(17)\quad \{F, G\} = \{F, G\}_{as} - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta F}{\delta u(+)}\frac{\delta G}{\delta u(-)} - \frac{\delta F}{\delta u(-)}\frac{\delta G}{\delta u(+)}\right).$$

По построению эта скобка на множестве рассматриваемых функционалов антисимметрична, невырождена и удовлетворяет тождеству Якоби. Убедиться в этих свойствах легко и непосредственной выкладкой. Проверка тождества Якоби сводится фактически к проверке того, что члены, нарушающие это тождество для скобки $\{\cdot, \cdot\}_{as}$ (см. (10)), компенсируются граничным слагаемым в (17).

Поскольку мы исходим из симплектической формы (14), для которой дискретные и непрерывные спектральные переменные задачи (7) разделяются, более того, каноничны (см. [6]), то же самое справедливо и для скобки (17). Непосредственная проверка этого достаточно трудоемка, и мы ее здесь не проводим.

Как уже говорилось, эта скобка не вырождена. Для интеграла Q из (12) имеем

$$(18)\quad \{F, Q\} = -\left(\frac{\delta F}{\delta u(+)} - \frac{\delta F}{\delta u(-)}\right).$$

Отсюда видно, что Q относительно скобки (17) – "псевдоаннулятор" в том же смысле, что и для (3). В работе [5] показано, что если исходить из наивной скобки (3), то скобка Фаддеева–Тахтаджяна (4) возникает как скобка Дирака [8], где в качестве одной из связей используется условие $Q = \mathrm{const}$. Легко проверить, что, начиная с нашей скобки (17), мы также получаем (4) как скобку Дирака. Это и объясняет причину зацепления непрерывного и дискретного спектров для (4): в указанную связь входят переменные обоих типов. В отдельной работе мы приведем явные выражения для скобок данных рассеяния как по (4), так и по (17), и сравним их свойства.

Насколько нам известно, скобка (17) ранее не рассматривалась. Однако интересно отметить, что при рассмотрении унитарных представлений группы гладких отображений окружности [9] возникает аналог билинейной формы (17) для интервала $[0, 2\pi]$. Мы благодарим И.А. Семенова-Тян-Шанского, указавшего нам на эту работу и объяснившего нам, что нарушение тождества Якоби в случае, когда имплектический оператор имеет ядро, известно в общем случае [10].

Математический институт им. В.А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
19 XII 1986

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gardner C.S., Green J.M., Kruscal M.D., Miura R.M.* – Phys. Rev. Lett., 1967, vol. 19, № 19, p. 1095–1097. 2. *Gardner C.S.* – J. Math. Phys., 1971, vol. 12, № 8, p. 1548–1551. 3. *Захаров В.Е., Манаков С.В.* – ТМФ, 1974, т. 19, № 3, с. 332–343. 4. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 320 с. 5. *Faddeev L.D., Takhtajan L.A.* – Lett. Math. Phys., 1985, vol. 10, № 2/3, p. 183–188. 6. *Захаров В.Е., Фаддеев Л.Д.* – Функц. анализ и его прилож., 1971, т. 5, № 4, с. 18–27. 7. *Калоджеро Ф., Дегасперис А.* Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений. М.: Мир, 1985. 469 с. 8. *Дирак П.А.М.* Лекции по квантовой механике. М.: Мир, 1968. 83 с. 9. *Segal G.* – Comm. Math. Phys., 1981, vol. 80, № 3, p. 301–342. 10. *Семенов-Тян-Шанский М.А.* – Функц. анализ и его прилож., 1983, т. 17, № 4, с. 17–33.

УДК 519.6:517.956.3 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А.В. БАЕВ

О РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 11 XI 1987)

1. Определение физических характеристик слоисто-неоднородной среды является важной проблемой диагностики. Большое практическое значение имеют такие задачи геофизики, как обратная задача электроразведки [1], магнито-теллурического зондирования [2], обратная динамическая [3] и спектральная [4] задачи сейсмики. В рамках модели горизонтально-однородной Земли эти задачи сводятся в той или иной форме к обратной задаче рассеяния для плоскослоистой среды.

В настоящей работе рассмотрим обратную задачу рассеяния, состоящую в определении коэффициента $a(y)$ в волновом уравнении

$$w_{tt} = a^2(y) w_{yy}, \quad -\infty < y, t < \infty,$$

где $a(y) \in C^1\left(\bigcup_{n=1}^{N} (y_{n-1}, y_n)\right)$, в точках y_n функция $a(y)$ имеет ненулевые скачки, а при $y < 0$ и $y > y_N$ $a(y)$ постоянна. Как правило, при постановке обратной задачи считают известными как падающую из области $y < 0$ волну $\varphi(t - y/a(-0))$, так и рассеянную в ту же область волну $F(t + y/a(-0))$. Оказывается, что подобная