Функциональный анализ и его приложения,
т. 2, вып. 4, 1968, 58—62.

ПРИНЦИПЫ РОДСТВЕННОСТИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М. А. Красносельский, Е. А. Лифшиц

В последние годы был установлен (см., например, [1]—[4]) ряд теорем, связывающих топологические характеристики различных векторных полей (на разных пространствах), порожденных одной и той же граничной задачей для обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти теоремы позволили установить разрешимость граничных задач для различных новых классов эволюционных уравнений (например, для уравнений с запаздывающим аргументом).

В настоящей статье рассматривается периодическая граничная задача для уравнений с неограниченными операторами. Такие уравнения, как хорошо известно (см., например, [5]—[7]), охватывают различные граничные задачи для уравнений параболического и гиперболического типов. Периодическую граничную задачу можно свести к задаче о нулях векторного поля сдвигов по траекториям уравнения и к задаче о нулях векторного поля с некоторым интегральным оператором в пространстве абстрактных функций. Устанавливаются формулы, связывающие вращения указанных полей на границах соответствующих областей.

1. Обозначим через C пространство непрерывных на отрезке $[0, \omega]$ функций со значениями в банаховом пространстве E. Норма в C вводится обычным образом: $\|x\|_C = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant \omega} \|x(t)\|_E$ $(x \in C)$.

Пусть действующий в E оператор — A производит сильно непрерывную полугруппу $T(t)$; $f(t, x)$ — оператор, действующий из $R^1 \times E$ в E. Рассмотрим дифференциальное уравнение *)

$$\frac{dx}{dt} + Ax = f(t, x). \tag{1}$$

Нас будут интересовать его решения, удовлетворяющие периодическому краевому условию:

$$x(0) = x(\omega). \tag{2}$$

В этом пункте мы будем предполагать, что оператор $f(t, x)$ непрерывен из $R^1 \times E$ в E, а оператор

$$Fx = \int_0^t T(t-s) f[s, x(s)]\, ds \tag{3}$$

вполне непрерывен в C.

---

*) Решением уравнения $\dot{x} + Ax = f(t, x)$ будем считать [9] такую функцию $x(t)$, что $f[t, x(t)]$ непрерывна, и которая представима формулой

$$x(t) = T(t)\, x(0) + \int_0^t T(t-s) f[s, x(s)]\, ds.$$

Пусть 1 не принадлежит спектру оператора $T(\omega)$. Тогда множество решений задачи (1) — (2) совпадает с множеством неподвижных точек вполне непрерывного в пространстве C оператора

$$Hx = T(t)[I - T(\omega)]^{-1}\int_0^{\omega} T(\omega - s) f[s, x(s)]\, ds + \int_0^t T(t-s) f[s, x(s)]\, ds. \quad (4)$$

Предположим теперь, что каждое начальное значение $z \in E$ определяет единственное решение Qz уравнения (1), которое определено на $[0, \omega]$. Мы будем предполагать, что Q — непрерывный и ограниченный оператор, действующий из E в C. Множество начальных значений решений задачи (1) — (2) совпадает с множеством неподвижных точек непрерывного в E оператора:

$$Uz = [I - T(\omega)]^{-1}[Qz(\omega) - T(\omega) z]. \quad (5)$$

Из тождества

$$Qz(\omega) - T(\omega) z = \int_0^{\omega} T(\omega - s) f[s, Qz(s)]\, ds \quad (6)$$

следует, что оператор (5) вполне непрерывен.

Таким образом, задача (1), (2) может быть сведена к задаче о неподвижных точках вполне непрерывных операторов H и U, действующих в различных банаховых пространствах C и E. Возникает вопрос, как связаны топологические характеристики вполне непрерывных векторных полей

$$\Phi x = x - Hx \qquad (x \in C), \quad (7)$$

$$\Psi z = z - Uz \qquad (z \in E). \quad (8)$$

Пусть ограниченные области $G \subset E$ и $\Omega \subset C$, не имеющие на своих границах Π и Γ нулей векторных полей (8) и (7) соответственно, обладают тем свойством, что множество нулей поля (8), лежащих в G, совпадает с множеством начальных значений нулей поля (7), лежащих в Ω. Такие пары областей мы будем называть *областями, имеющими одинаковую сердцевину.*

Теорема 1. *Пусть области $G \subset E$ и $\Omega \subset C$ имеют одинаковую сердцевину.*

Тогда вращение γ_1 векторного поля (7) *на* Γ *совпадает с вращением γ_2 векторного поля* (8) *на* Π.

Доказательство. Определим вспомогательную область Ω_r в пространстве C равенством

$$\Omega_r = \{x \in C;\ x(0) \in G,\ \|x\|_C < r\}. \quad (9)$$

Легко видеть, что при достаточно больших r множества нулей поля (7), лежащих в $\overline{\Omega}$ и $\overline{\Omega}_r$, совпадают. Тогда число γ_1 равно вращению векторного поля (7) на границе Γ_r области (9):

$$\Gamma_r = \{x \in C;\ x(0) \in \Pi,\ \|x\| \leqslant r\} \cup \{x \in C;\ x(0) \in G,\ \|x\| = r\}. \quad (10)$$

Покажем, что векторы поля (7) ни в одной точке множества Γ_r не направлены противоположно векторам поля

$$\Phi_1 x = x - T(t) Ux(0) - \int_0^t T(t-s) f[s, x(s)]\, ds.$$

Действительно, в противном случае найдется элемент $x^0 \in \Gamma_r$, для которого

при некотором $\lambda \in [0, 1]$ выполнено равенство

$$x^0(t) = T(t)[I - T(\omega)]^{-1}\Big\{\lambda Q x^0(0)\big|_{t=\omega} - \lambda T(\omega) x^0(0) + \\ + (1-\lambda)\int_0^\omega T(\omega - s) f[s, x^0(s)]\, ds\Big\} + \int_0^t T(t-s) f[s, x^0(s)]\, ds.$$

Но тогда x^0 — решение уравнения (1), т. е. $x^0 = Qx^0(0)$. Используя (6), получаем равенство $x^0 = Hx^0$, противоречащее невырожденности поля (7) на Γ_r.

Определим семейство векторных полей

$$\Phi_1(\lambda, x) = x - S_\lambda T(t) Ux(0) - S_\lambda \int_0^t T(t-s) f[s, x(s)]\, ds,$$

где

$$S_\lambda x = \begin{cases} x(t) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \lambda \leqslant \omega, \quad x \in C, \\ x(\lambda) & \text{при } 0 \leqslant \lambda \leqslant t \leqslant \omega, \quad x \in C, \end{cases}$$

и покажем, что поля $\Phi_1(0, x)$ и $\Phi_1(\omega, x) \equiv \Phi_1 x$ гомотопны на Γ_r. Очевидно, оператор $S_\lambda x$ непрерывен по совокупности переменных $\lambda \in [0, \omega]$, $x \in C$. Поэтому достаточно проверить невырожденность семейства $\Phi_1(\lambda, x)$ на Γ_r. Из равенства

$$x^0(t) = S_\lambda T(t) Ux^0(0) + S_\lambda \int_0^t T(t-s) f[s, x^0(s)]\, ds$$

вытекает, что функция $x^0(t)$ совпадает с решением $Qx^0(0)$ уравнения (1) на отрезке $[0, \lambda]$ и не зависит от t на отрезке $[\lambda, \omega]$; полагая в этом равенстве $t = 0$, получим также, что элемент $x^0(0)$ пространства E является неподвижной точкой оператора U. Из сказанного следует, что x^0 не лежит ни в одной из двух частей множества Γ_r (см. (10)), если выполнено неравенство $r > \sup\limits_{z \in \hat{G}} \| Qz \|$.

Итак, вращение γ_1 векторного поля (7) на Γ совпадает с вращением на Γ_r (при достаточно больших r) векторного поля $\Phi_2 x = \Phi_1(0, x) = x - Ux(0)$ $(x \in C)$. Оператор $Ux(0)$ действует из C в пространство C_0 функций-констант. Следовательно, вращение поля Φ_2 совпадает с вращением поля $\overline{\Phi}_2 x = x - Ux(0)$ $(x \in C_0)$ на границе области $\Omega_r \cap C_0$.

Между пространствами C_0 и E существует естественный изоморфизм J, причем векторное поле $\overline{\Phi}_2$ имеет вид $\overline{\Phi}_2 x = J\Psi J^{-1} x$ $(x \in C_0)$, где Ψ — векторное поле (8). Следовательно, γ_2 совпадает с вращением поля (8) на границе области $J^{-1}(\Omega_r \cap C_0) = G$. Теорема доказана.

2. Предположим теперь, что оператор $f(t, x)$ определен лишь на плотном множестве значений $x \in E$. Тогда эквивалентное задаче (1), (2) векторное поле не может быть определено равенством (7). В этом пункте мы укажем метод, позволяющий в широком классе случаев строить эквивалентные вполне непрерывные векторные поля.

Предположим, что аддитивный и однородный оператор B обладает следующими свойствами:

а) Существует непрерывный в E обратный оператор B^{-1}.

б) Область определения $D(B)$ оператора B содержит множество значений полугруппы $T(t)$ при $t > 0$.

в) Оператор B коммутирует с полугруппой $BT(t)z = T(t)Bz$ $(z \in D(B))$.

г) Правая часть $f(t, z)$ определена при $z \in D(B)$ и оператор $f(t, B^{-1}x)$ непрерывен и ограничен из $[0, \omega] \times E$ в E.

д) Для любой функции $x(t) \in C$ и любого $t_0 \in [0, \omega]$ элемент $\int_0^t T(t_0 - s)\, x(s)\, ds$ принадлежит $D(B)$ и оператор $Kx = B\int_0^t T(t-s)\, x(s)\, ds$ вполне непрерывен в пространстве C.

Отметим, что в качестве оператора B удобно брать дробные степени A^{ε} $(0 < \varepsilon < 1)$ оператора A; при этом свойства б) и в), очевидно, выполнены.

Определим вполне непрерывный оператор H_1 формулой

$$H_1 x = BT(t)[I - T(\omega)]^{-1} \int_0^{\omega} T(\omega - s) f[s, B^{-1}x(s)]\, ds + \\ + B\int_0^t T(t-s) f[s, B^{-1}x(s)]\, ds \qquad (x \in C). \quad (11)$$

Каждое решение $y(t)$ уравнения (1) принадлежит $D(B)$ при $t > 0$; следовательно, решение $y^*(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию (2), принадлежит $D(B)$ при всех $t \in [0, \omega]$. Непрерывная функция $x^*(t) = By^*(t)$ является неподвижной точкой оператора H_1. Обратно, каждая неподвижная точка x^* оператора H_1, очевидно, определяет решение $B^{-1}x^*(t)$ задачи (1), (2).

Таким образом, задача (1), (2) эквивалентна задаче о неподвижных точках вполне непрерывного оператора (11), действующего в C.

Пусть теперь каждое начальное значение z из $D(B)$ определяет единственное решение Qz уравнения (1). Мы будем предполагать, что BQB^{-1} — непрерывный и ограниченный оператор, действующий из E в C.

Легко видеть, что множество неподвижных точек вполне непрерывного в пространстве E оператора

$$U_1 z = B[I - T(\omega)]^{-1}[QB^{-1}z|_{t=\omega} - T(\omega)B^{-1}z] \quad (12)$$

является образом множества начальных значений решений задачи (1), (2) при применении оператора B.

Так же, как в п. 1, возникает вопрос о связи вращений вполне непрерывных векторных полей

$$\Phi_1 x = x - H_1 x \qquad (x \in C), \quad (13)$$
$$\Psi_1 z = z - U_1 z \qquad (z \in E) \quad (14)$$

на границах соответствующих областей. Будем говорить, что ограниченные области $\Omega \subset C$ и $G \subset E$ имеют *одинаковую сердцевину* относительно полей (13) и (14), если на границах Γ и Π этих областей нет нулей соответствующих полей и множество нулей поля (14), лежащих в G, совпадает с множеством значений при $t = 0$ нулей поля (13), лежащих в Ω.

Теорема 2. *Вращения векторных полей* (13) *и* (14) *на границах областей, имеющих одинаковую сердцевину, совпадают.*

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 1.

3. Пусть имеются два различных оператора B' и B'', удовлетворяющих требованиям а) — д) п. 2 (например, две различные дробные степени оператора A). Естественно ожидать, что между топологическими характеристиками векторных полей Φ_1', Φ_1'' должна быть простая связь. Действительно, справедлива

Теорема 3. *Пусть ограниченные области $\Omega' \subset C$ и $\Omega'' \subset C$, не имеющие на своих границах Γ' и Γ'' нулей векторных полей Φ_1' и Φ_1'', таковы, что $(B')^{-1}$ — образ множества нулей поля Φ_1', лежащих в Ω', совпадает с $(B'')^{-1}$ — образом множества нулей поля Φ_1'', лежащих в Ω''.*

Тогда вращение γ' векторного поля Φ_1' на Γ' совпадает с вращением γ'' векторного поля Φ_1'' на Γ''.

Доказательство. Пусть C' и C'' — множества функций из C, принимающих при каждом $t \in [0, \omega]$ значения, лежащие в $D(B')$ и $D(B'')$ соответственно, и остающихся непрерывными при применении операторов B' и B''. Ясно, что линеалы C' и C' — банаховы пространства относительно норм: $\|x\|' = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant \omega} \|B'x(t)\|_E \quad (x \in C')$, $\|x\|'' = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant \omega} \|B''x(t)\|_E \quad (x \in C'')$. Условия б) — д) гарантируют действие и полную непрерывность в каждой паре пространств $C' \to C'$, $C' \to C''$, $C'' \to C'$, $C'' \to C'$ оператора

$$Hx = T(t)[I - T(\omega)]^{-1} \int_0^\omega T(\omega - s) f[s, x(s)]\, ds + \int_0^t T(t - s) f[s, x(s)]\, ds. \quad (15)$$

Векторные поля Φ_1' и Φ_1'' могут быть представлены в виде

$$\Phi_1' x = x - B'H(B')^{-1}x \qquad (x \in C), \quad (16)$$

$$\Phi_1'' x = x - B''H(B'')^{-1}x \qquad (x \in C). \quad (17)$$

Очевидно, операторы $(B')^{-1}$ и $(B'')^{-1}$ являются изоморфизмами пространства C с пространствами C' и C'' соответственно. Поэтому из (16), (17) следует, что числа γ' и γ'' совпадают с вращениями вполне непрерывного векторного поля

$$\Phi x = x - Hx \quad (18)$$

на границах областей $(B')^{-1}(\Omega')$ и $(B'')^{-1}(\Omega'')$ в пространствах C' и C''.

Остается заметить, что в силу условий теоремы в $(B')^{-1}(\Omega')$ и $(B'')^{-1}(\Omega'')$ лежит одно и то же множество нулей поля (18), и сослаться на принцип инвариантности вращения, доказанный в [8]. Теорема доказана.

4. Построения статьи без существенных изменений переносятся на уравнения вида $dx/dt + A(t)x = f(t, x)$ с переменным оператором $A(t)$. При таком обобщении существенную роль играют тонкие результаты П. Е. Соболевского (см. [9]).

Доказанные в статье теоремы можно применить для получения признаков существования периодических решений у уравнений с запаздывающим аргументом по стандартной схеме [1] — [3].

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 4 марта 1968 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Красносельский М. А., Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений, М., «Наука», 1966.
2. Лифшиц Е. А., О принципах двойственности для задачи о периодических решениях дифференциальных уравнений высших порядков, ДАН СССР **165**, № 2 (1965), 277—280.
3. Красносельский М. А. и Лифшиц Е. А., Принципы двойственности для граничных задач, ДАН СССР **176**, № 5 (1967), 999—1001.
4. Борздыко В. И., Положительные периодические решения дифференциальных уравнений с отклоняюшимися аргументами в банаховом пространстве, ДАН ТаджССР **10**, № 8 (1967), 9—14.
5. Хилле Э. и Филлипс Р. С., Функциональный анализ и полугруппы, М., ИЛ, 1962.
6. Иосида К., Функциональный анализ, М., «Мир», 1967
7. Соболевский П. Е., Об уравнениях параболического типа в банаховых пространствах, Труды Моск. матем. о-ва **X** (1962), 297—350.
8. Красносельский М. А. и Стрыгин В. В, Принцип инвариантности вращения векторного поля, УМН **20**, вып. 4 (1965), 200—203.
9. Крейн С. Г, Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах, М, «Наука», 1967.