В. В. Пржиялковский, Хорошо сформированность и слабо хорошо сформированность,
Сиб. матем. журн., 2023, том 64, номер 4, 786–793

Сибирский математический журнал
Июль—август, 2023. Том 64, № 4

УДК 512.7

ХОРОШО СФОРМИРОВАННОСТЬ И СЛАБО ХОРОШО СФОРМИРОВАННОСТЬ

В. В. Пржиялковский

Аннотация. В литературе существует два разных определения хорошо сформированных многообразий во взвешенных проективных пространствах. Согласно одному из них хорошо сформированным называется многообразие, пересечение которого с особенностями объемлющего взвешенного проективного пространства имеет коразмерность как минимум два, тогда как согласно другому хорошо сформированным называется многообразие, не содержащее в коразмерности один страта особенностей объемлющего взвешенного проективного пространства. Показано, что эти определения на самом деле отличаются друг от друга, а также что они совпадают для квазигладких взвешенных полных пересечений размерности не меньше 3.

DOI 10.33048/smzh.2023.64.411

Ключевые слова: хорошо сформированность, взвешенные полные пересечения.

1. Мотивация

Одними из наиболее простых примеров алгебраических многообразий являются полные пересечения в проективных пространствах. Обобщением обычных полных пересечений являются взвешенные полные пересечения, т. е. нули взвешенных однородных многочленов, образующих регулярную последовательность. Однако благодаря численным свойствам весов и степеней, определяющих полные пересечения, может оказаться, что определяющие их многочлены имеют не так много параметров, поэтому эти пересечения могут иметь некоторые патологии. В частности, они могут быть особыми для любого выбора параметров. Есть две причины для того, чтобы подмногообразие взвешенного проективного пространства было особым: особенности объемлющего взвешенного проективного пространства и «собственные» особенности. Если многообразие не имеет «собственных» особенностей, то оно называется *квазигладким* и, при некоторых предположениях, ведет себя с многих точек зрения как гладкое (или, альтернативно, может быть рассмотрено как гладкий орбифолд). «Ожидаемое поведение» по отношению к особенностям объемлющего взвешенного проективного пространства называется *хорошо сформированностью.* Неформально говоря, это означает, что подмногообразие взвешенного проективного пространства особо в особых точках взвешенного проективного пространства, как того и следует ожидать.

Стандартными классическими ссылками в теории взвешенных полных пересечений являются работы Долгачева [1], Иано-Флетчера [2] и Димки [3]. Условие хорошо сформированности пропущено в [1]. Оно введено в [3] и [2] и широко

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-11-00164, https://rscf.ru/project/19-11-00164/.

используется для подмногообразий во взвешенных проективных пространствах. Проблема в том что определения в этих работах близки, но различны, что создает путаницу в их использовании. Для устранения этой путаницы мы показываем, что эти два определения действительно различны, но совпадают в важном «хорошем» случае. Мы называем условие, введенное в работе [3], хорошо сформированностью (см. определение 2.6), а введенное в работе [2] — слабой хорошо сформированностью (см. определение 2.8). Хорошо сформированные многообразия слабо хорошо сформированы. Мы приводим примеры (примеры 2.9 и 2.10), когда обратное неверно. Однако мы показываем (теорема 2.14), что обратное верно для квазигладких полных пересечений размерности не меньше 3. Это узаконивает использование для таких многообразий результатов из [2] и из других работ.

2. Результаты

Рассмотрим градуированное кольцо многочленов $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_N]$, веса образующих которого равны $\mathrm{wt}(x_i) = a_i$, и соответствующее взвешенное проективное пространство $\mathbb{P} = \mathbb{P}(a_0, \dots, a_N) = \operatorname{Proj} S$. Веса взвешенного проективного пространства не являются инвариантом. К примеру, одновременное увеличение градуировки дает изоморфизм

$$\mathbb{P}(aa_0, \dots, aa_N) \simeq \mathbb{P}(a_0, \dots, a_N).$$

Набор весов может быть еще больше упрощен.

Определение 2.1. Взвешенное проективное пространство $\mathbb{P}$ называется *хорошо сформированным*, если $\gcd(a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_N)$ для произвольного индекса $i = 0, \dots, N$.

Заметим, что условие хорошо сформированности не является ограничительным. Действительно, из-за увеличения градуировки можно считать, что веса a_i не имеют общего делителя. Более того, для

$$b = \gcd(a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_N) = 1$$

рассмотрим отображение Веронезе, задаваемое вложением

$$\bigoplus_{i=0}^{\infty} S_{bi} \hookrightarrow \bigoplus_{i=0}^{\infty} S_i,$$

где S_j означает j-ю компоненту кольца S. Оно дает изоморфизм

$$\mathbb{P}(a_0, \dots, a_N) \cong \mathbb{P}(a_0/b, \dots, a_{i-1}/b, a_i, a_{i+1}/b \dots, a_N/b),$$

где числа a_i и b взаимно просты (подробности см. в [1, 1.3.1] и [2, лемма 5.7]). Таким образом, каждое взвешенное проективное пространство изоморфно хорошо сформированному. Это показывает, что условие хорошо сформированности для $\mathbb{P}$ не геометрическое, это просто соглашение на численное представление для $\mathbb{P}$ (мы рассматриваем взвешенные проективные пространства как многообразия, а не как орбифолды).

В отличие от обычных проективных пространств, взвешенные проективные пространства особы, если только все его веса не равны 1.

Лемма 2.2 (см., к примеру, [2, 5.15]). *Пусть $\mathbb{P}$ — хорошо сформированное взвешенное проективное пространство с координатами $x_0, \ldots, x_N$. Для каждого подмножества $J \subset \{0, \ldots, N\}$ такого, что наибольший общий делитель весов a_j для $j \in J$ больше 1, обозначим*

$$\Lambda_J = \{(x_0 : \ldots : x_N) \mid x_j = 0 \text{ для всех } j \notin J\}.$$

Особым множеством пространства $\mathbb{P}$ является объединение страт Λ_J.

Взвешенное проективное пространство является образом естественной проекции

$$p : \mathbb{A}^{N+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P},$$

которая задается действием тора $\mathbb{C}^*$. Прообраз $C_X^* = p^{-1}(X)$ подмногообразия $X \subset \mathbb{P}$ называется *проколотым аффинным конусом многообразия* X. Его замыкание C_X в $\mathbb{A}^{N+1}$ называется *аффинным конусом многообразия* X. Из-за действия тора $\mathbb{C}^*$ конус C_X^* не имеет изолированных особых точек.

Важным классом подмногообразий во взвешенных проективных пространствах являются квазигладкие многообразия.

Определение 2.3. Подмногообразие X взвешенного проективного пространства $\mathbb{P}$ называется *квазигладким*, если проколотый аффинный конус C_X^* гладок.

Определение 2.4. Подмногообразие $X \subset \mathbb{P}$ коразмерности $k \leq N$ называется *взвешенным полным пересечением мультистепени* $(d_1, \ldots, d_k)$, если оно задается идеалом $I = (f_1, \ldots, f_k)$, порожденным регулярной последовательностью однородных многочленов $f_1, \ldots, f_k \in S$ степеней $d_1, \ldots, d_k$ соответственно. Другими словами, $X = \operatorname{Proj} S/I \subset \mathbb{P}$.

Следующий пример показывает, что взвешенное полное пересечение в особом взвешенном проективном пространстве может быть гладким, даже если оно проходит через особенности объемлющего пространства.

Пример 2.5. Рассмотрим квадратичный конус в $\mathbb{P}^3$, иными словами, взвешенное проективное пространство $\mathbb{P} = \mathbb{P}(1, 1, 2)$. Пусть X — гиперповерхность степени 1 в $\mathbb{P}$, т. е. прямая на этом конусе. Тогда X проходит через особую точку пространства $\mathbb{P}$, т. е. вершину конуса, тогда как сама X, очевидно, гладкая.

Чтобы обосновать ожидание того, что полное пересечение должно быть особым в особом множестве объемлющего взвешенного проективного пространства, было введено понятие *хорошо сформированности.*

Определение 2.6 [3, определение 1]. Подмногообразие X взвешенного проективного пространства $\mathbb{P}$ называется *хорошо сформированным*, если $\mathbb{P}$ хорошо сформировано и

$$\dim(X) - \dim(X \cap \operatorname{Sing} \mathbb{P}) \geq 2,$$

где размерность пустого множества по определению считается равной -1.

Прямая на квадратичном конусе из примера 2.5 не является хорошо сформированной. Не хорошо сформированность в этом случае является причиной неожиданной гладкости. Похожий феномен может возникнуть в любой размерности.

Пример 2.7. Обобщая пример 2.5, рассмотрим натуральное число $N \geq 2$ и взвешенное проективное пространство $\mathbb{P} = \mathbb{P}(1, 1, 2^{N-1})$ с взвешенными однородными координатами $x_0, \ldots, x_N$. Рассмотрим гиперповерхность X степени 1, определенную уравнением $x_0 = 0$. По лемме 2.2 особое множество пространства $\mathbb{P}$ определено уравнениями $x_0 = x_1 = 0$. Многообразие X проходит через это множество; более того, $\operatorname{Sing}\mathbb{P}$ имеет коразмерность 1 в X, поэтому X не хорошо сформировано. Заметим, что $X \simeq \mathbb{P}(1, 2^{N-1}) \simeq \mathbb{P}^{N-1}$; в частности, X гладко.

В [2, 6.9] дано другое определение хорошо сформированности (и неоднократно использовано, см., к примеру, доказательство [2, теорема 6.17]). Мы будем называть введенное понятие *слабо хорошо сформированностью.*

Пример 2.8. Многообразие $X \subset \mathbb{P}$ называется *слабо хорошо сформированным*, если $\mathbb{P}$ хорошо сформировано и X не содержит особых линейных стратов пространства $\mathbb{P}$, коразмерность которых в X равна 1.

Очевидно, каждое хорошо сформированное многообразие слабо хорошо сформировано. Следующий пример показывает, что обратное неверно.

Пример 2.9. Рассмотрим градуированную алгебру $S = \mathbb{C}[x_1, x_2, y_1, y_2, y_3]$, где

$$\operatorname{wt}(x_1) = \operatorname{wt}(x_2) = 1, \quad \operatorname{wt}(y_1) = \operatorname{wt}(y_2) = \operatorname{wt}(y_3) = 2.$$

Пусть $\mathbb{P} = \operatorname{Proj} S = \mathbb{P}(1, 1, 2, 2, 2)$. Положим

$$f_1 = x_1^3 + x_2^3 + x_1 y_1 + x_2 y_2 \quad \text{и} \quad f_2 = x_1^4 + x_2^4 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.$$

Пусть X — поверхность в $\mathbb{P}$, определенная уравнениями $f_1 = f_2 = 0$. Легко можно убедиться, что X квазигладкая. Эта поверхность не хорошо сформирована, но слабо хорошо сформирована, так как пересечение $X \cap \operatorname{Sing}\mathbb{P}$ задается в $\mathbb{P}$ уравнениями

$$x_0 = x_1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0;$$

таким образом, $X \cap \operatorname{Sing}\mathbb{P}$ — это кривая на поверхности X. Заметим, что, рассмотрев второе отображение Веронезе многообразия X, можно убедиться, что эта поверхность гладкая. Более подробно, обозначим i-ю градуированную компоненту алгебры S через S_i и положим

$$S_{(2)} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} S_{2i}.$$

Пусть

$$R = \mathbb{C}[u_1, u_2, u_3, z_1, z_2, z_3]$$

и $\mathbb{P}' = \operatorname{Proj} R \cong \mathbb{P}^5$. Рассмотрим сюръективный гомоморфизм градуированных алгебр $R \to S_{(2)}$, при котором образами переменных

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ z_1,\ z_2,\ z_3,$$

являются

$$x_1^2,\ x_2^2,\ x_1 x_2,\ y_1,\ y_2,\ y_3$$

соответственно. Этот гомоморфизм определяет вложение образа отображения Веронезе $v_2(\mathbb{P}) \cong \mathbb{P}$ в $\mathbb{P}'$, он задается уравнением $u_1 u_2 - u_3^2 = 0$. Положим $J = (f_1, f_2)$ и $J_{(2)} = J \cap S_{(2)}$, так что $J_{(2)}$ является идеалом, задающим образ $X_{(2)}$ поверхности X в $\mathbb{P}'$. Идеал $J_{(2)}$ порожден xf_1, yf_1 и f_2. Таким образом, $X_{(2)}$ задается уравнениями

$$\begin{aligned} u_1^2 + u_2 u_3 + u_1 z_1 + u_3 z_2 = u_1 u_3 + u_2^2 + u_3 z_1 + u_2 z_2 \\ = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = u_1 u_2 - u_3^2 = 0 \end{aligned}$$

в $\mathbb{P}'$. Можно проверить, что эти уравнения задают гладкое многообразие, так что $X \subset \mathbb{P}$ гладко. Заметим также, что все сказанное выше верно для общих многочленов f_1 и f_2 степеней 3 и 4 соответственно.

Этот пример хорошо сформированного, но не слабо хорошо сформированного полного пересечения может быть обобщен на высшие размерности.

Пример 2.10. Положим $\mathbb{P} = \mathbb{P}(1^2, 2^{N-1})$. Обозначим через

$$x_1, x_2, y_1, \dots, y_{N-1}$$

координаты на $\mathbb{P}$ весов

$$\mathrm{wt}(x_1) = \mathrm{wt}(x_2) = 1, \quad \mathrm{wt}(y_i) = 2, \ i = 1, \dots, N-1.$$

Пусть f_1 и f_2 — два общих многочлена степеней 3 и 4 соответственно. Рассмотрим взвешенное полное пересечение $X \subset \mathbb{P}$, которое определяется уравнениями $f_1 = f_2 = 0$. Очевидно, X слабо хорошо сформировано, но не хорошо сформировано. Действительно, $X \cap \operatorname{Sing} \mathbb{P}$ задается в $\mathbb{P}$ уравнениями

$$x_0 = x_1 = f_2(0, 0, y_1, \dots, y_{N-1}) = 0.$$

Таким образом, оно имеет размерность $N - 3 = \dim(X) - 1$, но не является линейным стратом пространства $\mathbb{P}$.

Разница между примерами 2.9 и 2.10 для $N > 4$ в том, что многообразие из первого примера гладко, но имеет размерность 2, а из второго может иметь произвольную размерность, но не является гладким и даже квазигладким.

Замечание 2.11. В [2] принято соглашение рассматривать общие взвешенные полные пересечения, т. е. задающиеся общими многочленами заданной степени. Однако примеры 2.9 и 2.10 показывают, что понятия хорошо сформированности и слабо хорошо сформированности могут отличаться и для общих полных пересечений.

Понятие хорошо сформированности, на наш взгляд, более правильное, чем понятие слабо хорошо сформированности. К примеру, одной из важнейших теорем о взвешенных полных пересечениях является следующая формула присоединения.

Теорема 2.12 (см. [1, теорема 3.3.4; 2, 6.14]). *Пусть $X \subset \mathbb{P}(a_0, \dots, a_N)$ — квазигладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение гиперповерхностей степеней $d_1, \dots, d_k$. Тогда*

$$\omega_X \cong \mathscr{O}_X \left(\sum d_i - \sum a_j \right).$$

В [1] эта теорема доказана без условия хорошо сформированности. В [2] она сформулирована для слабо хорошо сформированных многообразий. Однако доказательство содержит пробел, и на самом деле в нем используется предположение хорошо сформированности. К примеру, если бы теорема 2.12 выполнялась для многообразия X из примера 2.9, то было бы выполнено $-K_X \sim \mathscr{O}_X(1)$, откуда $K_X^2 = \frac{3 \cdot 4}{1^2 \cdot 2^3} = \frac{3}{2}$, что невозможно, так как X гладко.

Кроме того, по [4, предложение 2.11] гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}$ не пересекает особое множество пространства $\mathbb{P}$; этот результат также неверен для слабо хорошо сформированных взвешенных полных пересечений, что показано в примере 2.9.

Для того чтобы сформулировать главный результат заметки, дадим необходимое техническое определение.

Определение 2.13 (ср. [2, определение 6.5]). Взвешенное полное пересечение $X \subset \mathbb{P}(a_0, \dots, a_N)$ мультистепени $(d_1, \dots, d_k)$ называется *пересечением с линейным конусом*, если $d_j = a_i$ для некоторых i и j.

Заметим, что общее полное пересечение (ср. замечание 2.11) изоморфно взвешенному полному пересечению, которое не является пересечением с линейным конусом, так как мы можем изоморфно спроектировать его в меньшее взвешенное проективное пространство.

Оказывается, препятствиями к совпадению понятий хорошо сформированности и почти хорошо сформированности *для взвешенных полных пересечений* являются в точности те, что возникли в примерах 2.9 и 2.10. Более точно, верно следующее.

Теорема 2.14. *Пусть X — квазигладкое взвешенное полное пересечение размерности не меньше 3, которое не является пересечением с линейным конусом. Тогда X хорошо сформировано тогда и только тогда, когда оно слабо хорошо сформировано.*

Доказательство этой теоремы следующее. По [2, теорема 6.17] полное пересечение, удовлетворяющее условиям теоремы 2.14, слабо хорошо сформировано. Модифицируя доказательство из процитированной работы, доказываем (теорема 2.17), что при этих условиях полное пересечение хорошо сформировано, что влечет утверждение теоремы.

Нам потребуются некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 2.15 [5, с. 83]. *Рассмотрим положительные целые числа s, m и r и неотрицательное целое число u. Пусть $g_{i,j}$, $1 \le i \le r$, $1 \le j \le m$, — многочлены от s переменных, т. е. регулярные функции на аффинном пространстве $\mathbb{A}^s$. Обозначим через Z многообразие всех точек P в $\mathbb{A}^s$, в которых матрица*

$$\begin{pmatrix} g_{1,1}(P) & \dots & g_{1,m}(P) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{r,1}(P) & \dots & g_{r,m}(P) \end{pmatrix}$$

имеет ранг не больше u. Тогда Z либо пусто, либо $\operatorname{codim}(Z) \le (r-u)(m-u)$.

Лемма 2.16. *Пусть X — квазигладкое взвешенное полное пересечение положительной размерности. Тогда X неприводимо.*

Доказательство. Предположим, что X приводимо. Обозначим через X_1 одну из его неприводимых компонент. Из теоремы связности Хартсхорна (см. [6, теорема 18.12]) следует, что X связно. Пусть X_2 — другая компонента многообразия X, пересекающая X_1 в некоторой точке P. Пусть $C_{X_1}, C_{X_2} \subset C_X$ — аффинные конусы соответствующих компонент. Тогда пересечение C_{X_1} и C_{X_2} содержит аффинный конус над P и, таким образом, C_X особо вдоль этого конуса. Однако это противоречит предположению квазигладкости. □

Докажем основной результат.

Теорема 2.17. *Пусть $\mathbb{P}$ — хорошо сформированное взвешенное проективное пространство, а $X \subset \mathbb{P}$ — квазигладкое взвешенное полное пересечение* *размерности не меньше* 3*, не являющееся пересечением с линейным конусом. Тогда X хорошо сформировано.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{P} = \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_N)$. Обозначим через x_i координаты на $\mathbb{P}$ с $\mathrm{wt}(x_i) = a_i$. Пусть $f_1, \ldots, f_k$ — регулярная последовательность, задающая X. Предположим, что X не хорошо сформировано. Пусть Λ — страт особенностей пространства $\mathbb{P}$ такой, что $\mathrm{codim}_X(X \cap \Lambda) \leq 1$. Без потери общности можно считать, что Λ определен в $\mathbb{P}$ уравнениями $x_l = \ldots = x_N = 0$. Пусть δ — наибольший общий делитель весов $a_0, \ldots, a_{l-1}$. Заменив если необходимо страт Λ на больший, можно предполагать, что ни один из весов $a_l, \ldots, a_N$ не делится на δ.

Предположим, что $\mathrm{codim}_X(X \cap \Lambda) = 0$. Тогда, так как X неприводимо по лемме 2.16, получим $X \subset \Lambda$. Это значит, что степени переменных $x_l, \ldots, x_N$ обращаются в нуль на X. Однако это невозможно. Действительно, если x_i^a лежит в идеале, порожденном $f_1, \ldots, f_k$, то и x_i тоже лежит, так как X квазигладко и, следовательно, приведено. Таким образом,

$$x_i = \alpha_{i_1} f_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_r} f_{i_r}$$

для некоторых ненулевых многочленов α_{i_j}. Так как многообразие X не является пересечением с линейным конусом, имеем $\deg(f_{i_j}) < a_i$, $j = 1, \ldots, r$; более того, так как многочлены f_{i_j} непостоянны, выполнено $\deg(\alpha_{i_j}) < a_i$, $j = 1, \ldots, r$. Таким образом, ни один из многочленов α_{i_j} и f_{i_j} не зависит от x_i, что невозможно.

Предположим теперь, что $\mathrm{codim}_X(X \cap \Lambda) = 1$. По [3, лемма 3(i)] имеем

$$1 = \mathrm{codim}_X(X \cap \Lambda) = k(\delta) - N(\delta) + N - k + 1,$$

где $k(\delta)$ — число степеней d_j, делящихся на δ, а $N(\delta) = l$ — число весов a_i, делящихся на δ. Отсюда

$$N - N(\delta) = k - k(\delta).$$

Обозначим это неотрицательное число через r. Без потери общности можно считать, что δ не делит $d_1, \ldots, d_r$. Это значит, что многочлены $f_1, \ldots, f_r$ обращаются в нуль на Λ. Рассмотрим линейное подпространство $C_\Lambda \subset \mathbb{A}^{N+1}$, определенное уравнениями $x_l = \ldots = x_N = 0$; таким образом, C_Λ является аффинным конусом для Λ.

Матрица Якоби многочленов $f_1, \ldots, f_k$ в точке $P \in C_\Lambda$ имеет вид

$$J(P) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & g_{1,l}(P) & \ldots & g_{1,N}(P) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & g_{r,l}(P) & \ldots & g_{r,N}(P) \\ \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_0}(P) & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_N}(P) \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_0}(P) & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \frac{\partial f_k}{\partial x_N}(P) \end{pmatrix}$$

для квазиоднородных многочленов

$$g_{ji} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\bigg|_{x_l = \ldots = x_N = 0}$$

от переменных $x_0, \ldots, x_{l-1}$. Обозначим

$$G(P) = \begin{pmatrix} g_{1,l}(P) & \ldots & g_{1,N}(P) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{r,l}(P) & \ldots & g_{r,N}(P) \end{pmatrix}.$$

Обозначим через Z множество всех точек $P \in C_\Lambda \subset \mathbb{A}^{N+1}$ таких, что $\operatorname{rk} G(P) < r$. Очевидно, $\operatorname{rk} J(P) < k$ для всех $P \in Z$. Многообразие Z непусто. Действительно, оно содержит центр координат $0 \in \mathbb{A}^{N+1}$, так как иначе некоторые из многочленов g_{ji} были бы константами, и X был бы пересечением с линейным конусом. Таким образом, по лемме 2.15 имеем

$$\operatorname{codim}_{C_\Lambda}(Z) \le (r-(r-1))(N-l+1-(r-1)) = N - N(\delta) - r + 2 = 2.$$

Аффинный конус C_X особый в точках многообразия $Z \cap C_X$, т. е. точках многообразия Z, для которых выполнены условия $f_{r+1} = \ldots = f_k = 0$. Обозначим через $Z_\mathbb{P}$ образ многообразия Z во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}$, так что $Z = C_{Z_\mathbb{P}}$. Пусть $S \subset X$ — пересечение многообразий $Z_\mathbb{P}$, Λ и общих нулей многочленов $f_{r+1}, \ldots, f_k$ в $\mathbb{P}$. Тогда

$$\operatorname{codim}_\mathbb{P}(S) \le \operatorname{codim}_\mathbb{P}(Z) + \operatorname{codim}_\mathbb{P}(\Lambda) + (k-r) \le 2 + (N-l+1) + (k-r) = k+3.$$

Отсюда

$$\dim(S) \ge N-(k+3) = \dim(X) - 3 \ge 0.$$

В частности, это значит, что S непусто, и, таким образом, аффинный конус C_S как минимум одномерен. Однако мы знаем, что аффинный конус C_X особ вдоль C_S. Таким образом, X не квазигладко. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. $\square$

Благодарность. Эта заметка возникла как побочный продукт работы над совместной с К. А. Шрамовым книгой “Weighted complete intersections”. Я благодарен ему за обсуждения, без которых эта заметка не была бы написана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dolgachev I.* Weighted projective varieties // Group actions and vector fields. Berlin: Springer-Verl., 1982. P. 34–71. (Lecture Notes Math.; V. 956).
2. *Iano-Fletcher A. R.* Working with weighted complete intersections // Explicit birational geometry of 3-folds. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2000. P. 101–173. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; V. 281).
3. *Dimca A.* Singularities and coverings of weighted complete intersections // J. Reine Angew. Math. 1986. V. 366. P. 183–193.
4. *Przyjalkowski V., Shramov C.* Bounds for smooth Fano weighted complete intersections // Commun. Number Theory Phys. 2020. V. 14, N 3. P. 511–553.
5. *Arbarello E., Cornalba M., Griffiths Ph., Harris, J.* Geometry of algebraic curves. V. I. New-York: Springer-Verl., 1985. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; V. 267).
6. *Eisenbud D.* Commutative algebra with a view toward algebraic geometry. Berlin; New York: Springer-Verl., 1995. (Graduate Texts Math.; V. 150).

Поступила в редакцию 10 февраля 2023 г.
После доработки 27 апреля 2023 г.
Принята к публикации 16 мая 2023 г.

Пржиялковский Виктор Владимирович (ORCID 0000-0002-2202-8069)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
ул. Губкина, 8, Москва 119991
`victorprz@mi-ras.ru, victorprz@gmail.com`