Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

N. Yu. Netsvetaev, Diffeomorphism and stable diffeomorphism of simply connected manifold,
Algebra i Analiz, 1990, Volume 2, Issue 2, 112–120

https://www.mathnet.ru/eng/aa176

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.84
April 19, 2025, 01:51:05

© 1990 г.

Н.Ю.Нецветаев

ДИФФЕОМОРФНОСТЬ И СТАБИЛЬНАЯ ДИФФЕОМОРФНОСТЬ ОДНОСВЯЗНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

В работе доказывается, что если два односвязных многообразия размерности 4k+2 строго стабильно диффеоморфны, то они и диффеоморфны. Это же доказывается для многообразий размерности 4k>4, в одно из которых вкладывается $S^n \times S^n$ с выколотой точкой.

§ 1. Введение и формулировки основных результатов

Все многообразия ниже предполагаются гладкими, связными, ориентированными.

Вопрос о том, диффеоморфны ли два многообразия, заданные тем или иным способом, является классическим для дифференциальной топологии. В ряде алгебро-геометрических и топологических ситуаций, как оказывается, весьма плодотворен подход к нему, связанный с понятием стабильной диффеоморфности.

О п р е д е л е н и е. Связную сумму $M \# p(S^n{\times}S^n)$ многообразия M размерности $2n$ и p экземпляров $S^n{\times}S^n$ назовем его p-й *стабилизацией*. Многообразия M и M' называются *стабильно диффеоморфными*, если они обладают диффеоморфными стабилизациями:

$$M \# a(S^n{\times}S^n) \cong M' \# b(S^n{\times}S^n).$$

Назовем многообразия M и M' *строго стабильно диффеоморфными*, если порядки этих стабилизаций совпадают: $a=b$.

В отличие от диффеоморфности стабильная диффеоморфность сравниваемых многообразий часто гарантируется выполнением некоторых легко проверяемых условий, см. [1,2,3]. Поэтому особый интерес вызывает соотношение между диффеоморфностью и строгой стабильной диффеоморфностью.

Оказывается, что по крайней мере для односвязных многообразий эти понятия почти равносильны, как это демонстрируют главные результаты настоящей заметки. До их формулировки дадим еще одно определение.

О п р е д е л е н и е. Назовем многообразие M *стабильным*, если ему диффеоморфно всякое строго стабильно диффеоморфное ему многообразие.

1.1. Т е о р е м а. *Односвязные* $(4k+2)$*-мерные многообразия стабильны.*

Ключевые слова: связная сумма, строгая стабильная диффеоморфность, стабильные многообразия.

1.2. Т е о р е м а. *Первые стабилизации односвязных многообразий размерности $4k>4$ уже стабильны.*

Теоремы 1.1 и 1.2 и некоторые их приложения, относящиеся к полным пересечениям в $\mathbb{C}P^N$, анонсированы в заметках [4,5]. По поводу этих и других приложений см. статью автора „Diffeomorphity criteria for smooth manifolds and algebraic varieties" с изложением его доклада на Международной Мальцевской конференции по алгебре, проходившей в Новосибирске в августе 1989 г. Труды конференции публикуются Американским математическим обществом в серии „Lecture Notes in Mathematics".

Организация материала. Теоремы 1.1 и 1.2 доказываются в § 5 и 6. В § 2,3 доказываются вспомогательные алгебраические утверждения о целочисленных билинейных формах, в § 4 строятся автодиффеоморфизмы, используемые в доказательстве.

Пользуюсь возможностью поблагодарить М. Крека, любезно приславшего мне работы [2,3], а также А.С. Меркурьева, В.В. Никулина, И.А. Панина, Ю.Г. Тетерина и С.В. Чмутова за полезные обсуждения.

§ 2. Кососимметрические формы, оснащенные квадратичным вычетом

Главный результат этого параграфа - предложение 2.2.

2.1. О б о з н а ч е н и я. Пусть H - конечно порожденная свободная абелева группа - „решетка" - и $\Phi: H\times H \longrightarrow \mathbb{Z}$ - билинейная кососимметрическая форма, значения которой мы обычно будем записывать в виде произведения аргументов: $\Phi(x,y)=xy$. Пусть $q: H \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ - квадратичная $\mathbb{Z}_2$-форма, ассоциированная с Φ, т.е. такое отображение, что для любых $x,y\in H$ имеет место равенство

$$q(x+y) - q(x) - q(y) = \Phi(x,y) \bmod 2.$$

С произвольным $a\in H$ связана так называемая трансвекция $t_a: H \longrightarrow H$ - это преобразование решетки H, определяемое формулой

$$t_a(x) = x - (x,a)\ a.$$

Нетрудно видеть, что t_a^2, а если $q(a)=1$, то и t_a являются преобразованиями решетки H, сохраняющими формы Φ и q. Обозначим группу преобразований, порожденную квадратами трансвекций t_a^2, через $\Gamma_{t^2}(H)$, а группу преобразований, порожденную $\Gamma_{t^2}(H)$ и трансвекциями t_a с $q(a)=1$, обозначим через $\Gamma_t(H)$.

Для доказательства теоремы 1.1 нам потребуется следующий факт, который доказывается в оставшейся части этого параграфа.

2.2. П р е д л о ж е н и е. *Пусть $u_0,v_0,u_1,v_1\in H$, причем $u_0v_0=u_1v_1=1$ и $q(u_0)=q(u_1)=0$. Тогда существует преобразование $g\in\Gamma_t(H)$, которое переводит u_0 в u_1, т.е. $u_1=g(u_0)$.*

Для доказательства мы рассмотрим сначала специальный, а затем общий случай.

2.3. *Случай* А. Пусть $u_1-u_0\in 2H$, т.е. пусть u_1 и u_0 „сравнимы по модулю 2". Тогда u_0 можно перевести в u_1 посредством преобразования из $\Gamma_{t^2}(H)$. Начнем с некоторого упрощения ситуации, не влияющего на степень общности.

Во-первых, можно считать, что H совпадает с линейной оболочкой векторов u_0, v_0, u_1, v_1 (точнее, с пересечением решетки H и векторного пространства, натянутого на u_0, v_0, u_1, v_1).

Для простоты ограничимся случаем, когда $\operatorname{rk} H = 4$ и $\det H \neq 0$.

Во-вторых, будем считать, что не только $u_1 - u_0 \in 2H$, но также $v_1 - v_0 \in 2H$. (Иначе можно заменить v_1 на $v_0 + \Phi(u_0 - u_1, v_0) v_1$.)

2.4. Перейдем к доказательству предложения 2.2 в случае A. Через $G(H)$ будем обозначать фактор-группу $\operatorname{Hom}(H, \mathbb{Z})/2H'$, где H' - образ решетки H при естественном отображении, индуцированном спариванием Φ. Если H - невырожденная решетка, т.е. $\det H \neq 0$, то $G(H)$ - конечная абелева группа порядка $2^{\operatorname{rk} H} \cdot \det H$ с невырожденной кососимметрической формой со значениями в $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (или, если угодно, в подходящей циклической группе).

2.5. Утверждение. *Группа $\Gamma_{t^2}(H)$ состоит из тех и только тех преобразований решетки H, которые индуцируют тождественный автоморфизм группы $G(H)$.*

Доказательство. Это немедленно следует из предложения 2 работы Чмутова [6]. ●

Перейдем к описанию искомого преобразования.

2.6. Лемма. *Существует автоморфизм $\varphi: H \longrightarrow H$ решетки H, сохраняющий форму Φ, индуцирующий на группе $G(H)$ тождественный автоморфизм и переводящий вектор u_0 в u_1, т.е. $\varphi(u_0) = u_1$.*

Доказательство. Рассмотрим линейную оболочку L_i векторов u_i, v_i и ее ортогональное дополнение $N_i = L_i^{\perp}$; $i=0,1$. Ранг решетки N_i равен 2, и $\det N_i = \det H$. Поэтому существует изоморфизм $N_0 \cong N_1$.

Далее, рассмотрим разложение в прямую сумму:

$$G(H) = G(L_i) \oplus G(N_i) \cong \mathbb{Z}_2^2 \oplus \mathbb{Z}_d^2 ,$$

где $d = \sqrt{\det H}$; $i=0,1$. Здесь

$$G(L_0) = G(L_1) \text{ и } G(N_0) = (G(L_0))^{\perp} = (G(L_1))^{\perp} = G(N_1).$$

Рассмотрим изоморфизм $\alpha: L_0 \longrightarrow L_1$, при котором $u_0 \longmapsto u_1$, $v_0 \longmapsto v_1$, и изоморфизм $\beta: N_0 \longrightarrow N_1$, которым индуцируется только что описанный изоморфизм $G(N_0) = G(N_1)$. (Такой изоморфизм β существует в силу эпиморфности естественного гомоморфизма $Sp(N_1) \longrightarrow Sp(G(N_1))$ или, что то же, гомоморфизма редукции по модулю d, $SL_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow SL_2(\mathbb{Z}_d)$.) В качестве искомого автоморфизма φ мы можем теперь взять гомоморфизм

$$\alpha \oplus \beta:\ H = L_0 \oplus N_0 \longrightarrow L_1 \oplus N_1 = H.$$

Он, очевидно, обладает требуемыми свойствами. Лемма 2.6 доказана.

2.7. Окончание доказательства в случае A. Доказанная лемма 2.6 утверждает, что вектор u_0 переводится в u_1 автоморфизмом φ решетки H, индуцирующим тождественный автоморфизм группы $G(H)$. Но в силу утверждения 2.5 всякий автоморфизм φ с таким свойством содержится в группе $\Gamma_{t^2}(H)$. На этом доказательство предложения 2.2 в случае A заканчивается.

2.8. *Случай* B. Пусть u_0 и u_1 - произвольные, т.е. не обязательно $u_1-u_0\in 2H$. Но тривиально проверяется, что u_0+2H переводится в u_1+2H допустимыми трансвекциями t_{a_i}, где $q(a_i)=1$. Таким образом, случай B сводится к случаю A, рассмотренному в п.2.3. На этом доказательство предложения 2.2 заканчивается.

2.9. Замечание. Легко видеть, что утверждение 2.2 остается верным и тогда, когда никакой формы q нет, и допустимы произвольные трансвекции. Это важно для доказательства теоремы 1.1 в случае размерностей 6 и 14.

§ 3. Симметрические формы

Главный результат настоящего параграфа - сформулированное ниже предложение 3.2. Оно нужно для доказательства теоремы 1.2.

3.1. Обозначения. Нам потребуются обозначения, близкие к используемым в § 2, ср. п. 2.1.

В дальнейшем H - конечно порожденная свободная абелева группа и $\Phi: H\times H \longrightarrow \mathbb{Z}$ - билинейная симметрическая четная форма (для простоты - невырожденная), значения которой будем записывать в виде произведения: $\Phi(x,y)=xy$. С каждым вектором $a\in H$ таким, что $a\cdot a=\pm 2$, связано отражение $s_a: H \longrightarrow H$, определяемое формулой

$$s_a(x) = x \mp (x,a)a.$$

Легко видеть, что s_a сохраняет форму Φ.

Обозначим через $\Gamma_s(H)$ группу изометрий решетки H, порожденную отражениями s_a, где $a^2 = \pm 2$.

3.2. Предложение. *Пусть даны векторы $u_i, v_i \in H$; $i = 0,1,2,3$. Пусть при этом $u_i^2 = v_i^2 = 0$, $u_i v_i = 1$. Пусть, кроме того, векторы $u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2$ ортогональны векторам u_3, v_3, а векторы u_1, v_1 - векторам u_2, v_2:*

$$\langle u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2 \rangle \perp \langle u_3, v_3 \rangle, \quad \langle u_1, v_1 \rangle \perp \langle u_2, v_2 \rangle.$$

Тогда существует преобразование $g\in\Gamma_s(H)$, которое переводит u_0 в u_1, оставляя u_3 на месте, т.е. $g(u_0)=u_1, g(u_3)=u_3$.

(Строящаяся ниже композиция отражений переводит также v_0 в v_1, оставляя u на месте, но это нам не потребуется).

3.3. Оставшаяся часть параграфа посвящена доказательству.

Обозначим через G_H дискриминантную группу решетки H: пусть $G_H= =\mathrm{Hom}(H,\mathbb{Z})/H'$, где H' - образ решетки H при естественном отображении. Если решетка H невырождена, то G_H есть конечная абелева группа порядка $\det H$. На ней определена невырожденная билинейная форма со значениями в $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (или, если угодно, в подходящей циклической группе).

3.4. Утверждение. *Группа $\Gamma_s(H)$ состоит в точности из тех изометрий решетки H, которые индуцируют тождественный автоморфизм дискриминантной группы G_H.*

Доказательство. Это следует из теоремы 2.7 статьи Кнезера [7]. Эта теорема применима к решетке H, поскольку H четная и ее $\mathbb{Z}$-индекс Витта ≥ 3. •

3.5. Утверждение. *Пусть N_0, N_1 – невырожденные знаконеопределенные четные решетки одинакового ранга и сигнатуры. Если* rk N_i *по меньшей мере на* 2 *превосходит число образующих группы G_{N_i}, $i=0,1$, то каждая изометрия $G_{N_0} \longrightarrow G_{N_1}$ индуцируется некоторой изометрией $N_0 \longrightarrow N_1$.*

Доказательство. Это следует из теорем 1.13.2 и 1.14.2 работы Никулина [8]. •

Теперь мы можем описать искомую изометрию решетки H.

3.6. Лемма. *Существует изометрия $g: H \longrightarrow H$, переводящая u_0 в u_1, оставляющая u_3 на месте и индуцирующая тождественный автоморфизм дискриминантной группы G_H.*

Доказательство. Рассмотрим линейную оболочку L_i векторов u_i, v_i, u_3, v_3 и ее ортогональное дополнение $N_i = L_i^{\perp}$; $i=0,1$. Ранги и сигнатуры решеток N_0, N_1 одинаковы, а их дискриминантные группы, очевидно, изоморфны: $G_{N_0} = G_H = G_{N_1}$. Кроме того, ясно, что ранг решетки N_i по крайней мере на 2 больше числа образующих группы G_{N_1}, а сама решетка знаконеопределенная. Из утверждения 3.5 следует, что существует изоморфизм $\beta: N_0 \longrightarrow N_1$, которым индуцируется описанный выше канонический изоморфизм $G_{N_0} \longrightarrow G_{N_1}$. Рассмотрим еще автоморфизм $\alpha: L_0 \longrightarrow L_1$, при котором $u_0 \longmapsto u_1$, $v_0 \longmapsto v_1, u_3 \longmapsto u_3, v_3 \longmapsto v_3$. Теперь в качестве искомого автоморфизма g можно взять гомоморфизм

$$\alpha \oplus \beta : H = L_0 \oplus N_0 \longrightarrow L_1 \oplus N_1 = H.$$

Лемма 3.6 доказана.

3.7. Окончание доказательства предложения 3.2. Доказанная лемма 3.6 утверждает, что существует изометрия $g: H \longrightarrow H$, при которой $u_0 \longmapsto u_1$, $u_3 \longmapsto u_3$ и которая индуцирует тождественное преобразование группы G_H. В силу утверждения 3.4 изометрия g содержится в группе $\Gamma_s(H)$, порождаемой отражениями. На этом доказательство предложения 3.2 заканчивается.

§ 4. Построение автодиффеоморфизмов

4.1. Обобщенные скручивания Ликориша-Дена. Подробное описание см., например, в статье Каса [9]. Исходными данными для скручивания - автодиффеоморфизма многообразия M - служат вложенная сфера $S^n \hookrightarrow M^{2n}$ и изоморфизм между ее касательным и нормальным расслоением. (В частности, если n четно, то индекс самопересечения этой сферы равен ± 2). Как хорошо известно, автоморфизм, индуцируемый в гомологиях скручиванием, при нечетном n есть трансвекция t_a, а при четном n - отражение s_a(t_a и s_a описаны в п.2.1 и 3.1). Здесь a - класс, реализуемый сферой, вдоль которой производится скручивание.

4.2. Двойное скручивание. Этот диффеоморфизм мы опишем более подробно, чем предыдущий. Пусть $S^n \subset M^{2n}$ - сфера с тривиальным нормальным расслоением, реализующая гомологический класс b. Рассмотрим соответствующее вложение $S^n \times D^n \longrightarrow M^{2n}$. Интересующий нас автодиффеоморфизм многообразия M - *двойное скручивание* имеет вид $(s,d) \longmapsto (\varphi_d(s),d)$ на $S^n \times D^n$ и тождественен в дополнении. Здесь $\varphi_d \in SO(n+1)$ - некоторое семейство поворотов, параметризуемых точками шара D^n, причем если $d \in S^{n-1} = \partial D^n$, то $\varphi_d = \mathrm{id}$. Вместо $\{\varphi_d\}$, понимаемого как отображение $D^n \longrightarrow SO(n+1)$, удобнее будет явно описать соответствующий двойному скручиванию сфероид $\varphi: S^n \longrightarrow SO(n+1)$.

Для единичного вектора $e \in S^n$ обозначим отражение в ортогональной ему гиперплоскости через r_e. Пусть $\varphi(e) = r_e \circ r_{e_1}$, где $e_1 \in S^n$ - отмеченная точка.

Теперь можно положить $\varphi_d = \varphi(\mathrm{pr}(d))$, где $\mathrm{pr}: D^n \longrightarrow S^n$ - естественная факторизация, при которой $\mathrm{pr}\ (\partial D^n) = \{e_1\}$.

Нетрудно проверить, что если n нечетно, то двойным скручиванием индуцируется в группе гомологий $H_n M$ квадрат трансвекции t_b^2.

(Если n четно, то индуцируется тождественный автоморфизм. Поэтому при четном n двойное скручивание интереса для нас не представляет).

4.3. П р е д л о ж е н и е. *Пусть M - односвязное $(4k+2)$-мерное многообразие, и пусть Σ_0, Σ_0' ; Σ_1, Σ_1' - вложенные в $\mathrm{int} M$ $(2k+1)$-мерные сферы с тривиальным нормальным расслоением, причем Σ_i', Σ_i' трансверсально пересекаются в одной точке, $i=0,1$. Тогда существует диффеоморфизм $\varphi: M \longrightarrow M$, неподвижный в окрестности края и бесконечности, который переводит гомологический класс $[\Sigma_0]$ в $[\Sigma_1]$, т.е. $\varphi_* ([\Sigma_0]) = [\Sigma_1]$.*

(Нетрудно добиться и того, чтобы сфера Σ_0 переходила непосредственно в Σ_1, а сфера Σ_0' - в Σ_1', но это нам здесь не нужно).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приведя сферы Σ_0, Σ_0', Σ_1, Σ_1' в общее положение и добавив к регулярной окрестности их объединения несколько утолщенных двумерных дисков, мы можем рассматривать эти сферы лежащими в параллелизуемом $2k$-связном теле с ручками $U \subset M$.

К этой ситуации применима теорема 2.2. В ее обозначениях положим

$$H = H_{2k+1} U,\ u_i = [\Sigma_i],\ v_i = [\Sigma_i'];\ i = 0,1.$$

Роль формы Φ играет индекс пересечения, а роль формы q - форма Кервера-Милнора. Она принимает значение 0 на классах, реализуемых сферой с тривиальным нормальным расслоением, и значение 1 - на остальных, они реализуются сферами, у которых нормальное расслоение изоморфно касательному. (Здесь мы предполагаем, что $n \neq 1,3,7$. В оставшихся трех случаях рассуждение еще упрощается, ср. замечание 2.9). Воспользовавшись теоремой 2.2, мы получаем, что класс $[\Sigma_0]$ переводится в $[\Sigma_1]$ преобразованием из $\Gamma_t(H)$. Теперь для доказательства предложения 4.3 достаточно воспользоваться тем, что порождающие группу $\Gamma_t(H)$ преобразования вида t_a и t_b^2 реализуются диффеоморфизмами. Соответствующие диффеоморфизмы - скручивания Дена и двойные скручивания - описаны выше, в п.4.1, 4.2. Предложение 4.3 доказано.

4.4. Предложение. *Пусть M - односвязное $4k$-мерное многообразие, $k\neq1$. Пусть Σ_i, $\Sigma_i'\subset \mathrm{int}M$, $i=0,1,2,3$ - вложенные $2k$-мерные сферы с тривиальным нормальным расслоением, причем для каждого i сферы Σ_i и Σ_i' трансверсально пересекаются в одной точке. Пусть, кроме того, сферы Σ_3, Σ_3' не имеют общих точек с Σ_i, Σ_i' при $i=0,1,2$, и Σ_1, Σ_1' не имеют общих точек с Σ_2, Σ_2':*

$$(\Sigma_3\cup\Sigma_3')\cap\bigcup_{i=0}^{2}(\Sigma_i\cup\Sigma_i')=\varnothing=(\Sigma_1\cup\Sigma_1')\cap(\Sigma_2\cup\Sigma_2').$$

Тогда существует диффеоморфизм $\varphi\colon M\to M$, неподвижный в окрестности края и бесконечности, который переводит гомологический класс $[\Sigma_0]$ в $[\Sigma_1]$, а класс $[\Sigma_3]$ оставляет на месте:

$$\varphi_*([\Sigma_0])=[\Sigma_1],\quad \varphi_*([\Sigma_3])=[\Sigma_3].$$

Доказательство. Аналогично доказательству предыдущего предложения 4.3 лишь вместо предложения 2.2 нужно воспользоваться предложением 3.2 и тем, что образующие группы $\Gamma_s(H)$ - отражения s_a с $a^2=\pm2$ - реализуются скручиваниями Дена, см. п.4.1. ●

§ 5. Стабильность односвязных (4k+2)-мерных многообразий

В этом параграфе мы докажем теорему 1.1, утверждающую, что односвязные $(4k+2)$-мерные многообразия стабильны, т.е. что если $M_0\#a(S^n\times S^n)\cong M_1\#a(S^n\times S^n)$, то и $M_0\cong M_1$. Достаточно, очевидно, ограничиться следующим частным случаем.

5.1. Предложение. *Пусть M_0 и M_1 - односвязные $(4k+2)$-мерные многообразия. Тогда если $M_0\#S^n\times S^n\cong M_1\#S^n\times S^n$, где $n=2k+1$, то и $M_0\cong M_1$, причем эти два диффеоморфизма совпадают в некоторой окрестности края и бесконечности.*

5.2. Идея доказательства заключается в том, чтобы рассмотреть подходящий кобордизм между M_0 и $M_{1/2}=M_0\#S^n\times S^n=M_1\#S^n\times S^n$ и, далее, между $M_{1/2}$ и M_1 как результат приклеивания к $M_0\times I$ последовательно двух ручек $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_1$ индекса n и $n+1$, а затем проверить, что эти ручки сокращаются.

5.3. Обозначения. Введем обозначения для слоев в связных слагаемых $S^n\times S^n$ из условия предложения 5.1: пусть

$$M_0\#(\Sigma_0\times\Sigma_0')\cong M_1\#(\Sigma_1\times\Sigma_1').$$

Будем считать сферы Σ_i,Σ_i' лежащими в $M_{1/2}\cong M_i\#(\Sigma_i\times\Sigma_i')$, $i=0,1$. Легко видеть, что для $i=0,1$ $M_{1/2}$ есть результат перестройки многообразия M_i вдоль тривиально вложенной сферы S^{n-1} со стандартным оснащением. Пусть при этом комеридианными сферами соответствующих ручек $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_1$ будут Σ_0 и Σ_1'.

5.4. Окончание доказательства предложения 5.1. В силу предложения 4.3, которое утверждает, что класс $[\Sigma_0]$

переводится в $[\Sigma_1]$ диффеоморфизмом $M_{1/2}\to M_{1/2}$, неподвижным в окрестности края и бесконечности, достаточно будет ограничиться случаем, когда $[\Sigma_0]=[\Sigma_1]$.

Так как индекс пересечения сфер Σ_0 и Σ_1' равен 1, то приклеиваемые ручки $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_1$ сокращаются, и мы получаем между M_0 и M_1 тривиальный кобордизм. Таким образом, $M_0\cong M_1$, и предложение 5.1 доказано.

§ 6. Почти стабильность односвязных 4k-мерных многообразий

Здесь мы докажем теорему 1.2, которая утверждает, что первая стабилизация односвязного $4k$-мерного многообразия ($k>1$) стабильна. Это значит, что если $M_0\#a(S^n\times S^n)\cong M_1\#a(S^n\times S^n)$, где $M_1\cong M_2\#S^n\times S^n$, то $M_0\cong M_1$. Очевидно, что достаточно доказать следующее утверждение.

6.1. П р е д л о ж е н и е. *Пусть M_0, M_1 – односвязные многообразия размерности $4k\neq 4$, причем $M_1\cong M_2\#S^n\times S^n$ для некоторого M_2, где $n=2k$. Тогда если $M_0\#S^n\times S^n\cong M_1\#S^n\times S^n$, то и $M_0\cong M_1$, причем два эти диффеоморфизма совпадают в окрестности края и бесконечности.*

6.2. Это предложение доказывается аналогично предложению 5.1. Мы строим подходящий кобордизм между M_0 и M_1 – он получается в результате пристройки к $M_0\times I$ четырех ручек – $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_3$ и $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_3'$, – которые попарно сокращаются: $\mathcal{H}_0$ с $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_3$ с $\mathcal{H}_3'$. Здесь вместо предложения 4.3 приходится воспользоваться предложением 4.4.

6.3. О б о з н а ч е н и я. Прежде всего введем обозначения для сомножителей в связных слагаемых $S^n\times S^n$ из формулировки. Пусть

$$M_0\#(\Sigma_0\times\Sigma_0')\cong M_1\#(\Sigma_1\times\Sigma_1') \quad\text{и}\quad M_1\cong M_2\#(\Sigma_2\times\Sigma_2').$$

Рассмотрим многообразие $M_{1/2}\cong M_i\#(\Sigma_i\times\Sigma_i')\#(\Sigma_3\times\Sigma_3')$, где $i=0,1$ и $\Sigma_3,\Sigma_3'\cong S^n$. Будем считать сферы Σ_i, Σ_i' при $i=0,1,2,3$ лежащими в $M_{1/2}$. Мы представляем кобордизм между M_0 и $M_{1/2}\cong M_0\#2(S^n\times S^n)$ как результат пристройки к тривиальному кобордизму $M_0\times I$ двух тривиальных ручек $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_3$ индекса n. Их комеридианными сферами будут Σ_0 и Σ_3. Аналогично определяются ручки $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_3'$, причем ручки $\mathcal{H}_3$ и $\mathcal{H}_3'$ сокращаются.

6.4. О к о н ч а н и е д о к а з а т е л ь с т в а п р е д л о ж е н и я 6.1. В силу предложения 4.4 можно считать, что $[\Sigma_0]=[\Sigma_1]$. В таком случае сокращаются не только ручки $\mathcal{H}_3$ и $\mathcal{H}_3'$, но и ручки $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_1$, и мы получаем между M_0 и M_1 тривиальный кобордизм. Следовательно, $M_0\cong M_1$, и предложение 6.1, а значит, и теорема 1.2 доказаны.

П р и м е ч а н и е п р и к о р р е к т у р е. Как сообщил мне М. Крек, им совместно с И. Хэмблтоном доказана стабильность *второй* стабилизации всякого $2n$-мерного многообразия, $n\geq 3$, с конечной фундаментальной группой.

Список литературы

[1] F r e e d m a n M. Uniqueness theorems for taut submanifolds // Pacific J. Math. 1 9 7 6. Vol.62, N 2. P.379-387.

[2] K r e c k M. Duality and surgery: an extension of results of Browder. Novikov and Wall about surgery on compact manifolds. Preprint. Mainz, 1 9 8 5. 100 p.

[3] T r a v i n g K. Zur Diffeomorphieklassifikation vollständiger Durchschnitte. Diplomarbeit. Mainz. 1 9 8 5. 97 S.

[4] N e t s v e t a e v N.Yu. Integer lattices automorphisms and classification of projective hypersurfaces with isolated singularities // Тез. докл. Междунар. конф. по алгебре, посвященной памяти А.И.Мальцева. Новосибирск, 1 9 8 9. С.91.

[5] Н е ц в е т а е в Н.Ю. О стабильной диффеоморфности односвязных многообразий // Научные математические чтения памяти М.Я.Суслина. Саратов, 1 9 8 9. С.111.

[6] Chmutov S.V. Monodromy groups of critical point of functions // Invent. Math. 1 9 8 2. Vol.67, N 1. P.123-131.

[7] K n e s e r M. Erzeugung ganzzahliger orthogonaler Gruppen durch Spiegelungen // Math. Ann. 1 9 8 1. Bd 255, H.4. S.453-462.

[8] Н и к у л и н В.В. Целочисленные симметрические билинейные формы и некоторые их геометрические приложения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1 9 7 9. Т.43, N 1. С.111-177.

[9] K a s A. On the handlebody decomposition associated to a Lefschetz fibration // Pacific J.Math. 1 9 8 0. Vol.89, N 1. P.89-104.

Ленинградский государственный университет,
математико-механический факультет,
198904, Ленинград, Ст.Петергоф,
Библиотечная площадь, д.2

Поступило
10 декабря 1989 г.