ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ ВРАЩЕНИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

М. А. Красносельский и В. В. Стрыгин

1. Ниже через E_1 и E_2 обозначаются два банаховых пространства; через G_1 и G_2 — ограниченные области в пространствах E_1 и E_2 соответственно; через Π_1 и Π_2 границы областей G_1 и G_2.

Пусть A — нелинейный оператор, который вполне непрерывен на $G_1+\Pi_1$ как оператор, действующий в E_1, и который вполне непрерывен на $G_2+\Pi_2$ как оператор, действующий в E_2. Будем считать, что на Π_1 и на Π_2 оператор A не имеет неподвижных точек. Тогда определены вращение (см. [1]—[3]) γ_1 вполне непрерывного векторного поля

$$\Phi_1 x = x - Ax \qquad (x \in \Pi_1)$$

на Π_1 и вращение γ_2 вполне непрерывного векторного поля

$$\Phi_2 x = x - Ax \qquad (x \in \Pi_2)$$

на Π_2.

Предположим, наконец, что множество неподвижных точек оператора A, рассматриваемого на G_1, принадлежит пересечению пространств E_1 и E_2 и совпадает с множеством неподвижных точек оператора A, рассматриваемого на G_2. Возникает естественный вопрос о том, имеет ли место равенство

$$\gamma_1 = \gamma_2. \tag{1}$$

Как показывают простые примеры, в общем случае ответ на этот вопрос отрицателен. Однако при простых дополнительных условиях (обычно удовлетворяющихся) равенство (1) удается доказать.

2. Теорема 1. *Пусть A вполне непрерывен на $G_1+\Pi_1$ как оператор из E_1 в E_2 и вполне непрерывен на $G_2+\Pi_2$ как оператор из E_2 в E_1.*

Тогда справедливо равенство (1).

Эта теорема становится особенно простой, если одно из пространств E_1, E_2 непрерывно вложено во второе. Если, для определенности, $E_1 \subset E_2$ и

$$\| x \|_{E_2} \leqslant a \| x \|_{E_1} \qquad (x \in E_1),$$

то достаточно предполагать, что A вполне непрерывен как оператор, действующий из E_2 в E_1.

3. Откажемся теперь от полной непрерывности A как оператора, действующего из одного пространства во второе.

Будем говорить, что пространства E_1 и E_2 образуют *P-пару*, если на их пересечении $D = E_1 \cap E_2$ определена последовательность конечномерных линейных проекционных операторов

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$$

со значениями в D, которая на D сильно сходится к единичному оператору и по норме пространства E_1, и по норме пространства E_2, причем

$$\| P_n x \|_{E_1} \leqslant C \| x \|_{E_1}, \quad \| P_n x \|_{E_2} \leqslant C \| x \|_{E_2} \qquad (x \in D;\ n = 1, 2, \ldots).$$

Теорема 2. *Пусть пространства E_1 и E_2 образуют P-пару. Пусть A непрерывен на $G_1+\Pi_1$ как оператор из E_1 в E_2 и непрерывен на $G_2+\Pi_2$ как оператор из E_2 в E_1. Тогда справедливо равенство* (1).

Простейшим примером P-пары пространств могут служить пространства с общим базисом.

Поступило в Правление Общества 17 марта 1965 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Александров, Комбинаторная топология, М., Гостехиздат, 1950.
[2] М. А. Красносельский, Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М., Гостехиздат, 1953.
[3] Ж. Лере и Ю. Шаудер, Топология и функциональные уравнения, УМН 1, вып. 3—4 (1946).