

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ, РЕГУЛЯРНЫХ
В КРУГЕ И ИМЕЮЩИХ В НЕМ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Е.Г.Голузина

Пусть $S_\gamma(p, q)$ (p и q , $p \geq q$, - целые положительные числа;
 γ , $\gamma < q$, - вещественное) - класс функций

$$f(z) = z^q + \sum_{n=q+1}^{\infty} a_n z^n, \quad (I)$$

регулярных в круге $|z| < 1$ и удовлетворяющих условию: существует
 $\rho = \rho(f)$, $0 < \rho < 1$, такое, что в кольце $\rho < |z| < 1$ имеем

$$\operatorname{Re} \left[\frac{z f'(z)}{f(z)} \right] > \gamma, \quad (2)$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{z f'(z)}{f(z)} \right] d\theta = 2\pi\rho, \quad z = \rho e^{i\theta}; \quad (3)$$

$S_\gamma^{(0)}(p, q)$ - класс функций $f(z) \in S_\gamma(p, q)$, регулярных в $|z| < 1$ и
удовлетворяющих на $|z| = 1$ условию

$$\operatorname{Re} \left[\frac{z f'(z)}{f(z)} \right] \geq \gamma. \quad (2')$$

Класс $S_\gamma(p, q)$, с одной стороны, содержится в классе локально
 ε -звездных функций ($\varepsilon = 0$ при $\gamma \geq 0$, $\varepsilon = 2\pi |\gamma|$ при $\gamma < 0$), рас-
смотренном Ю.Д.Максимовым [1], и, с другой стороны, содержит,

как свои подклассы, некоторые известные классы функций. Именно,
 $S_\gamma(1, 1)$, $0 \leq \gamma \leq 1$, - класс функций $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$, регулярных
и звездообразных порядка γ в круге $|z| < 1$ [2], $S_0(p, q)$ - класс
функций вида (I), регулярных, p -листных и звездообразных в
 $|z| < 1$ [3]. Класс $S_\gamma(p, q)$, $-\frac{1}{2} \leq \gamma \leq 0$, рассмотрен в [4], где
дана его геометрическая характеристика: если $f(z) \in S_\gamma(p, q)$,

$-\frac{1}{2} \leq \gamma \leq 0$, то $f(z)$ звездообразна самое большое порядка p в одном направлении.

Получим для класса $S_\gamma(p, q)$ интегральное представление (для $\gamma = 0$ оно было дано в [I; 5]).

Заметим, что если $f(z) \in S_\gamma(p, q)$ ($S_\gamma^{(1)}(p, q)$), то функция $f(z)$ необходимо имеет в области $0 < |z| < 1$ $p-q$ нулей (с учетом их кратности).

Имеет место

Л е м м а I. Пусть $f(z) \in S_\gamma^{(1)}(p, q)$, $p > q$, и $\alpha_j, j=1, 2, \dots, p-q$, — нули $f(z)$ в $0 < |z| < 1$. Тогда

$$F(z) = f(z) z^{p-q} \prod_{j=1}^{p-q} (1 - \frac{z}{\alpha_j})^{-1} (1 - z\bar{\alpha}_j)^{-1} \in S_\gamma^{(1)}(p, p). \quad (4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $F(z)$ регулярна в $|z| \leq 1$, не имеет нулей в $0 < |z| < 1$ и имеет нуль порядка p в точке $z=0$. Следовательно,

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{zF'(z)}{F(z)} \right] d\theta = \int_0^{2\pi} d \arg F(z) = 2\pi p, \quad z = re^{i\theta}, \quad 0 < r \leq 1.$$

Далее,

$$\frac{zF'(z)}{F(z)} = \frac{zf'(z)}{f(z)} + \sum_{j=1}^{p-q} \frac{\alpha_j - \bar{\alpha}_j z^2}{\alpha_j + \bar{\alpha}_j z^2 - (1 + |\alpha_j|^2)z}$$

и на окружности $|z|=1$ имеем $\operatorname{Re} [zF'(z)/F(z)] = \operatorname{Re} [zf'(z)/f(z)]$. Поэтому

$F(z)$ удовлетворяет условию (2') на $|z|=1$, а по принципу минимума для гармонических функций и условию (2) в $|z| < 1$. Следовательно, $F(z) \in S_\gamma^{(1)}(p, p)$.

Т е о р е м а I. Если $f(z) \in S_\gamma(p, q)$, $p > q$, и $\alpha_j, j=1, 2, \dots, p-q$, — нули $f(z)$ в $0 < |z| < 1$, то

$$f(z) = F(z) z^{q-p} \prod_{j=1}^{p-q} (1 - \frac{z}{\alpha_j})(1 - z\bar{\alpha}_j), \quad (5)$$

где $F(z) \in S_\gamma(p, p)$.

Доказательство. Положим $G_n(z) = t_n^{-q} f(t_n z)$, где $\rho < t_n < 1$, $\rho = \rho(t) > 0$, $t_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Функция $G_n(z)$ регулярна в $|z| \leq 1$ и удовлетворяет условиям (2) и (3) для $(\rho/t_n) < |z| < (1/t_n)$. Следовательно, $G_n(z) \in S_\gamma^{(4)}(\rho, \rho)$. Тогда по лемме I функция

$$F_n(z) = G_n(z) z^{\rho-q} \prod_{j=1}^{\rho-q} \left(1 - \frac{z t_n}{\alpha_j}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\bar{z} \alpha_j}{t_n}\right)^{-1} \quad (6)$$

принадлежит классу $S_\gamma^{(4)}(\rho, \rho)$. Так как $F_n(z)$ регулярна в $|z| \leq 1$ и имеет единственный нуль порядка ρ в начале, то $F_n(z) \rightarrow F(z)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно внутри $|z| < 1$. Переходя в (6) к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим (5) с $F(z) \in S_\gamma(\rho, \rho)$.

З а м е ч а н и е. Для класса $S_o(\rho, \rho)$ аналогичное представление получено в [5] таким же способом.

Обозначим через M_1 класс функций $\alpha(t)$, неубывающих на промежутке $[0, 2\pi)$ и удовлетворяющих условию $\int_0^{2\pi} d\alpha(t) = 1$.

Из известного интегрального представления для функций, регулярных в круге $|z| < 1$ и имеющих в нем положительную вещественную часть, получаем в круге $|z| < 1$ для $f(z) \in S_\gamma(\rho, \rho)$ интегральное представление

$$f(z) = z^\rho \exp\left[-2(\rho-\gamma) \int_0^{2\pi} \log(1 - e^{-it} z) d\alpha(t)\right], \quad \alpha(t) \in M_1. \quad (7)$$

Для функции $f(z) \in S_\gamma(\rho, \rho)$, $\rho > q$, имеющей нули в точках α_j , $0 < |\alpha_j| < 1$, $j = 1, 2, \dots, \rho-q$, получаем из (5) и (7) интегральное представление

$$f(z) = z^\rho \prod_{j=1}^{\rho-q} \left(1 - \frac{z}{\alpha_j}\right) (1 - \bar{z} \alpha_j) \exp\left[-2(\rho-\gamma) \int_0^{2\pi} \log(1 - e^{-it} z) d\alpha(t)\right], \quad \alpha(t) \in M_1. \quad (7')$$

Обозначим через $\widehat{S}_\gamma(\rho, \rho)$ класс функций, представимых в круге $|z| < 1$ при $\rho = q$ формулой (7), при $\rho > q$ - формулой (7') с α_j из $0 < |z| < 1$, $j = 1, 2, \dots, \rho-q$, в том смысле, что любая функция $f(z)$ класса $\widehat{S}_\gamma(\rho, \rho)$ при $\rho = q$ выражается формулой (7), при $\rho > q$ - фор-

мулой (7') с соответствующей $\alpha(t) \in M_1$, и, обратно, любая функция $\alpha(t) \in M_1$ определяет при $p=q$ формулой (7), при $p>q$ формулой (7') некоторую функцию $f(z) \in \widehat{S}_\gamma(p, q)$. Очевидно, что $\widehat{S}_\gamma(p, p) \equiv S_\gamma(p, p)$. При $p>q$ класс $\widehat{S}_\gamma(p, q)$ содержит $S_\gamma(p, q)$ как свой подкласс, и для функции $f(z) \in \widehat{S}_\gamma(p, q)$, $p>q$, существует последовательность функций $f_n(z) \in S_\gamma(p, q)$, такая, что $f_n(z) \rightarrow f(z)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно внутри $|z| < 1$. Для $\gamma=0$ эти утверждения доказаны, например, в [5], для остальных γ они могут быть проверены аналогичным образом.

В случае, если $\alpha(t)$ - кусочно постоянная функция, имеющая в m различных точках $\theta_k \in [0, 2\pi)$ скачки, равные $\frac{1}{m}$, из (7) и (7') имеем

$$f(z) = f_m(z; p, q) \equiv \begin{cases} z^p \prod_{k=1}^m (1 - e^{-i\theta_k} z)^{-2(p-\gamma)/m}, & \text{если } p=q, \\ z^q \prod_{j=1}^{p-q} (1 - \frac{z}{\alpha_j})(1 - z\bar{\alpha}_j) \prod_{k=1}^m (1 - e^{-i\theta_k} z)^{-2(p-\gamma)/m}, & \text{если } p>q. \end{cases} \quad (8)$$

Функция $f_m(z)$ ($m=1, 2, \dots$) при $p>q$ принадлежит классу $\widehat{S}_\gamma(p, q)$ но может не принадлежать классу $S_\gamma(p, q)$ при некоторых α_j из $0 < |z| < 1$ и θ_k , $k=1, 2, \dots, m$.

Изучим рост модуля функции и коэффициентов в классе $\widehat{S}_\gamma(p, q)$, а также взаимный рост коэффициентов функций этого класса.

Из (7) для $f(z) \in S_\gamma(p, p)$ имеем оценки

$$\frac{\tau^p}{(1+\tau)^{2(p-\gamma)}} \leq |f(z)| \leq \frac{\tau^p}{(1-\tau)^{2(p-\gamma)}}, \quad |z| = \tau. \quad (9)$$

Оценки (9) точные и знаки равенства имеют место только для $f_1(z; p, p)$.

Если $f(z) \in \widehat{S}_\gamma(p, q)$, $p>q$, и α_j , $j=1, 2, \dots, p-q$, - нули $f(z)$ в $0 < |z| < 1$, то из (7') имеем оценки ($|z| = \tau$):

$$\prod_{j=1}^{p-q} \left(1 - \frac{\tau}{|\alpha_j|}\right) \frac{\tau^q}{(1+\tau)^{2(p-\gamma)}} \leq |f(z)| \leq \prod_{j=1}^{p-q} \left(1 + \frac{\tau}{|\alpha_j|}\right) (1+\tau|\alpha_j|) \frac{\tau^q}{(1-\tau)^{2(p-\gamma)}}, \quad (9')$$

Знаки равенства имеют место для $f(z) = \prod_{j=1}^{p-\gamma} (1 + \frac{z}{|\alpha_j|}) (1 + z |\alpha_j|) \times$
 $\times \frac{z^\gamma}{(1-z)^{2(p-\gamma)}}$ в точках $z = -\tau$ (для левого неравенства) и $z = \tau$ (для
 правого неравенства).

Далее, докажем следующую лемму.

Л е м м а 2. Если $f(z) \in S_\gamma(p, p)$ и $f(z) \neq f_1(z; p, p)$, то
 существует $\delta = \delta(f) > 0$ такое, что

$$|f(z)| = O((1-\tau)^{-2(p-\gamma)+\delta}), \quad |z| = \tau. \quad (I0)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из (7) имеем

$$\log \left| \frac{f(z)}{z^p} \right| = 2(p-\gamma) \int_0^{2\pi} \log |1 - e^{-it} z|^{-1} d\alpha(t). \quad (II)$$

Так как

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log (1 - e^{-it} z)^{-1} dt = 0, \quad (I2)$$

то из (II) получаем

$$\log \left| \frac{f(z)}{z^p} \right| = 2(p-\gamma) \int_0^{2\pi} \log |1 - e^{-it} z|^{-1} d(\alpha(t) - \frac{t}{2\pi}). \quad (I3)$$

Продолжим $\alpha(t)$ на всю вещественную ось, полагая $\alpha(t+2\pi) = \alpha(t)$.

Функция $\alpha(t) - \frac{t}{2\pi}$ имеет период 2π . Поэтому, интегрируя по ча-
 стям и полагая $t - \theta = \tau$, из (I3) получим

$$\begin{aligned} \log \left| \frac{f(z)}{z^p} \right| &= (p-\gamma) \int_0^{2\pi} \frac{2\tau \sin \tau}{1+\tau^2-2\tau \cos \tau} \left[\alpha(\tau+\theta) - \frac{\tau}{2\pi} \right] d\tau = \\ &= (p-\gamma) \int_0^\pi \frac{2\tau \sin \tau}{1+\tau^2-2\tau \cos \tau} \left[\alpha(\theta+\tau) - \alpha(\theta-\tau) - \frac{\tau}{\pi} \right] d\tau, \quad z = \tau e^{i\theta} \end{aligned}$$

Разобьем последний интеграл на два (J_1 и J_2), интегрируя соответ-
 ственно по промежуткам $[0, \eta]$ и $[\eta, \pi]$, $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$. Имеем

$$\log \left| \frac{f(z)}{z^p} \right| = (p-\gamma) \left\{ \int_0^\eta + \int_\eta^\pi \right\} \frac{2\tau \sin \tau}{1+\tau^2-2\tau \cos \tau} \left[\alpha(\theta+\tau) - \alpha(\theta-\tau) - \frac{\tau}{\pi} \right] d\tau =$$

$$= (\rho - \gamma) (J_1 + J_2). \quad (I4)$$

Оценим J_1 и J_2 . Имеем

$$J_2 \leq \frac{2\pi r}{1+r^2-2r\cos\eta}, \quad (I5)$$

$$J_1 \leq \int_0^\eta \frac{2r \sin \tau}{1+r^2-2r\cos\tau} d\tau \cdot \sup_\theta [\alpha(\theta+\eta) - \alpha(\theta-\eta)].$$

Так как $f(z) \neq f_1(z; \rho, \rho)$, то наибольший скачок функции $\alpha(t)$ строго меньше, чем 1. Поэтому существуют $\delta_1 > 0$ и $\eta > 0$, зависящие только от f , такие, что

$$\sup_\theta [\alpha(\theta+\eta) - \alpha(\theta-\eta)] < 1 - \delta_1.$$

Таким образом,

$$J_1 \leq (1 - \delta_1) \log \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^2, \quad \delta_1 = \delta_1(f) > 0. \quad (I6)$$

Далее, из (I4), используя оценки (I5) и (I6), получаем

$$\log |f(z)| \leq 2(\rho - \gamma)(1 - \delta_1) \log \frac{1}{1-r} + K, \quad |z| = r, \quad (I7)$$

где K - постоянная, не зависящая от r . Из (I7) следует (10) с $\delta = 2(\rho - \gamma)\delta_1 > 0$. Лемма 2 доказана.

Из (7'), (7) и леммы 2 вытекает следующий результат.

Т е о р е м а 2. Если $f(z) \in \widehat{S}_\gamma(\rho, \rho)$, $\rho > \rho$, и
 $f(z) \neq f_1(z; \rho, \rho)$, то существует $\delta = \delta(f) > 0$ такое, что

$$|f(z)| = O\left((1-r)^{-2(\rho-\gamma)+\delta}\right), \quad |z| = r. \quad (I8)$$

З а м е ч а н и е. Точные оценки для $|f(z)|$ в классе $S_0(\rho, \rho)$ даны в [3], в классе $S_\gamma(1, 1)$ - в [2], в классе $\widehat{S}_0(\rho, \rho)$ - в [5].

Т е о р е м а 3. Если $f(z) = z^\rho + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+\rho} z^{n+\rho} \in S_\gamma(\rho, \rho)$,

то

$$|a_{n+p}| \leq \left| \binom{-2(p-\gamma)}{n} \right|, \quad n=1, 2, \dots \quad (19)$$

Знак равенства достигается только для $f_1(z; p, \rho)$.

Доказательство. Имеем

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \gamma + (p-\gamma)P(z),$$

где

$$P(z) = 1 + c_1 z + \dots, \quad \operatorname{Re} P(z) > 0 \quad \text{в} \quad |z| < 1.$$

Тогда

$$zf'(z) = f(z)[\gamma + (p+\gamma)P(z)]. \quad (20)$$

Сравнивая в (20) коэффициенты при одинаковых степенях z , получим

$$(n+p)a_{n+p} = p a_{n+p} + (p-\gamma) \sum_{\ell=1}^n c_\ell a_{n+p-\ell},$$

откуда, так как $|c_n| \leq 2$, $n=1, 2, \dots$, имеем

$$|a_{n+p}| \leq \frac{2(p-\gamma)}{n} \sum_{\ell=1}^n |a_{n+p-\ell}|, \quad n=1, 2, \dots$$

Из последнего неравенства методом математической индукции получаем оценку (19).

З а м е ч а н и е . В классе $S_\gamma(1, 1)$ точная оценка $|a_n|$ сверху дана в [2], в классе $S_0(p, q)$ - в [3], в классе $\widehat{S}_0(p, q)$ - в [5].

Для оценки взаимного роста коэффициентов функций класса $\widehat{S}_\gamma(p, q)$ потребуется следующая

Л е м м а 3 . Пусть $f(z) \in S_\gamma(p, p)$ и $f(z) \neq f_1(z; p, p)$, если $p-\gamma > 1$, $f(z) \neq f_m(z; p, p)$, $m=1, 2$, если $p-\gamma=1$. Тогда существуют θ_i^* и δ , $0 \leq \theta_i^* < 2\pi$, $\delta > 0$, зависящие только от f , такие, что

$$|f(z)(1 - e^{-i\theta_i} z)| = O((1-\tau)^{-2(p-\gamma)+1+\delta}), \quad |z| = \tau. \quad (21)$$

Доказательство. Пусть $f(z) \in S_\gamma(p, p)$, $p-\gamma > 1$,

и $f(z) \neq f_1(z, \rho, \rho)$. Пусть функции $f(z)$ по (7) соответствует функция $\alpha(t) \in M_1$ и пусть $\alpha(t)$ свой наибольший скачок, равный α_1 , $0 \leq \alpha_1 < 1$, имеет в точке $\theta_1^* \in [0, 2\pi)$.

Обозначим через $s(t)$ функцию, кусочно постоянную на $(-\infty, \infty)$ со скачками величины $\frac{1}{2(\rho-\gamma)}$ в точках $\theta_1^* + 2\kappa\pi$, $\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Положим $\alpha^*(t) = \alpha(t) - s(t)$. Покажем, что наибольший скачок функции $\alpha^*(t)$ строго меньше, чем $1 - \frac{1}{2(\rho-\gamma)}$. Действительно, функция $s(t)$ не имеет скачков на $[0, 2\pi)$ при $t \neq \theta_1^*$. Поэтому все скачки функции $\alpha^*(t)$ при $t \neq \theta_1^*$ совпадают со скачками функции $\alpha(t)$. Пусть α_2 - скачок функции $\alpha(t)$ в некоторой точке $\theta_2 \neq \theta_1^*$, $\theta_2 \in [0, 2\pi)$. Тогда $\alpha_2 \leq \alpha_1$ и так как $2\alpha_2 \leq \alpha_1 + \alpha_2 \leq 1$, то $\alpha_2 \leq \frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{2(\rho-\gamma)}$. Скачок же функции $\alpha^*(t)$ при $t = \theta_1^*$ равен $\alpha_1 - 1/[2(\rho-\gamma)]$, $\alpha_1 < 1$.

Из (7) и (12), полагая $\beta(t) = \alpha^*(t) - [1 - \frac{1}{2(\rho-\gamma)}] \frac{t}{2\pi}$, получим

$$\begin{aligned} g^*(z) &\equiv (1 - e^{-i\theta_1^*} z) f(z) = \\ &= \exp[-\log(1 - e^{-i\theta_1^*} z)] z^\rho \exp[2(\rho-\gamma) \int_0^{2\pi} \log(1 - e^{-it} z)^{-1} d\alpha(t)] = \\ &= z^\rho \exp[2(\rho-\gamma) \int_0^{2\pi} \log(1 - e^{-it} z)^{-1} d\beta(t)], \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \log |g^*(z)| - \log r^\rho &= 2(\rho-\gamma) \int_0^{2\pi} \log |1 - e^{-it} z|^{-1} d\beta(t) = \\ &= (\rho-\gamma) \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{1+r^2-2r \cos(t-\theta)} d\beta(t), \quad z = r e^{i\theta} \end{aligned}$$

Далее, интегрируя по частям, замечая, что $\beta(t)$ имеет период 2π , и полагая $t - \theta = \tau$, получим

$$\begin{aligned} \log \frac{|g^*(z)|}{r^p} &= (p-\gamma) \int_0^{2\pi} \frac{2r \sin \tau}{1+r^2-2r \cos \tau} \beta(\tau+\theta) d\tau = \\ &= (p-\gamma) \int_0^{2\pi} \frac{2r \sin \tau}{1+r^2-2r \cos \tau} \left[\alpha^*(\theta+\tau) - \left(1 - \frac{1}{2(p-\gamma)}\right) \frac{\tau}{2\pi} \right] d\tau = \quad (22) \\ &= (p-\gamma) \int_0^{\pi} \frac{2r \sin \tau}{1+r^2-2r \cos \tau} \left[\alpha^*(\theta+\tau) - \alpha^*(\theta-\tau) - \left(1 - \frac{1}{2(p-\gamma)}\right) \frac{\tau}{\pi} \right] d\tau. \end{aligned}$$

Пусть $\eta \in (0, \pi)$. Разобьем последний интеграл на два (J_3 и J_4), интегрируя соответственно по промежуткам $[0, \eta]$ и $[\eta, \pi]$. Оценим J_3 и J_4 . Имеем

$$J_4 \leq \frac{2\pi r}{1+r^2-2r \cos \eta}, \quad (23)$$

$$J_3 \leq \int_0^{\eta} \frac{2r \sin \tau}{1+r^2-2r \cos \tau} d\tau \cdot \sup_{\theta} [\alpha^*(\theta+\eta) - \alpha^*(\theta-\eta)]. \quad (24)$$

Так как все скачки функции $\alpha^*(t)$ строго меньше, чем $1 - \frac{1}{2(p-\gamma)}$, то существуют $\delta_1 > 0$ и $\eta > 0$, зависящие только от f , такие, что

$$\sup_{\theta} [\alpha^*(\theta+\eta) - \alpha^*(\theta-\eta)] < \left(1 - \frac{1}{2(p-\gamma)} - \delta_1\right). \quad (25)$$

Из (22), используя оценки (23)-(25), получаем

$$\log \left| \frac{g^*(z)}{z^p} \right| \leq 2(p-\gamma) \left(1 - \frac{1}{2(p-\gamma)} - \delta_1\right) \log \frac{1}{1-r} + K, \quad |z|=r,$$

где K - постоянная, не зависящая от r . Следовательно,

$$|g^*(z)| = O\left((1-r)^{-2(p-\gamma)+1+\delta}\right), \quad |z|=r, \quad \delta = 2(p-\gamma)\delta_1 > 0.$$

Приведенные выше рассуждения применимы и для случая $p - \gamma = 1$, $f(z) \neq f_m(z; p, \rho)$, $m=1, 2$, так как условие $f(z) \neq f_2(z; p, \rho)$ означает, что $\alpha_2 < \frac{1}{2}$ и поэтому наибольший скачок функции $\alpha^*(t)$ строго меньше, чем $\frac{1}{2}$.

Лемма 3 доказана.

Теорема 4. Пусть $f(z) = z^q + \sum_{n=q+1}^{\infty} a_n z^n \in \widehat{S}_\gamma(p, \rho)$ и $f(z) \neq f_1(z; p, \rho)$, если $p - \gamma > 1$, $f(z) \neq f_m(z; p, \rho)$, $m=1, 2$, если $p - \gamma = 1$. Тогда существуют θ_1^* и δ , $0 \leq \theta_1^* < 2\pi$, $\delta > 0$, зависящие только от f , такие, что при $n > q$ имеем

$$|n^2 a_n - e^{i\theta_1^*} (n+1)^2 a_{n+1}| = O(n^{2(p-\gamma)-\delta}). \quad (26)$$

Теорема 5. Если $f(z) = z^q + \sum_{n=q+1}^{\infty} a_n z^n \in \widehat{S}_\gamma(p, \rho)$ и $f(z) \neq f_1(z; p, \rho)$, то существует $\delta = \delta(f) > 0$ такое, что

$$|a_n| = O(n^{2(p-\gamma)-1-\delta}). \quad (27)$$

Теорема 6. Для функций $f(z)$ теоремы 4 существует $\delta = \delta(f) > 0$ такое, что

$$|a_{n+1}| - |a_n| = O(n^{2(p-\gamma)-2-\delta}). \quad (28)$$

Доказательства теорем 4-6. Пусть выполнены предположения теоремы 4. Положим $\psi(z) = (1 - e^{-i\theta_1} z)$, θ_1 - вещественное;

$$G(z) = \frac{z f'(z)}{f(z)}, \quad h(z) = z f'(z).$$

Тогда имеем

$$h'(z) = \frac{f(z)}{z} [z G'(z) + G^2(z)]. \quad (29)$$

Функция $G(z)$ регулярна в некотором кольце $\rho < |z| < 1$, $\rho = \rho(f) > 0$.

Пусть $z = r e^{i\theta}$, $\rho < r < 1$. Используя (29), (7') и (7), получим

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |\psi(z) h(z)| d\theta \leq \frac{r^{q-p-1}}{2\pi} \prod_{j=1}^{p-q} \left(1 + \frac{r}{|\alpha_j|}\right) \int_0^{2\pi} |F(z) \psi(z)| |G^2(z) + z G'(z)| d\theta, \quad (30)$$

где $F(z) \in S_\gamma(p, p)$.

Так как условие $f(z) \neq f_m(z; p, q)$ означает, что $F(z) \neq f_m(z; p, p)$, то по лемме 3 существуют $\theta_1 = \theta_1^*$ и $\delta > 0$, зависящие только от F , такие, что

$$|F(z)\Psi(z)| = O((1-\nu)^{-2(p-\gamma)+1+\delta}), \quad |z| = \nu. \quad (31)$$

Оценим интеграл $J = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |G^2(z) + zG'(z)| d\theta$ в кольце $\rho < |z| < 1$. Имеем

$$J \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|G(z)|^2 + |zG'(z)|) d\theta, \quad z = \nu e^{i\theta}, \quad \rho < \nu < 1. \quad (32)$$

Положим

$$\Phi(z) = \frac{zF'(z)}{F(z)}, \quad S_{p-\gamma}(z) = \frac{zQ'_{p-\gamma}(z)}{Q_{p-\gamma}(z)} + \gamma - p, \quad Q_{p-\gamma}(z) = \prod_{j=1}^{p-\gamma} (1 - \frac{z}{\alpha_j})(1 - z\bar{\alpha}_j).$$

Тогда
$$G(z) = \frac{zF'(z)}{f(z)} = \Phi(z) + S_{p-\gamma}(z),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |G(z)|^2 d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|\Phi(z)|^2 + |S_{p-\gamma}(z)|^2 + 2|S_{p-\gamma}(z)\Phi(z)|) d\theta, \quad (33)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |zG'(z)| d\theta \leq \frac{\nu}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|\Phi'(z)| + |S'_{p-\gamma}(z)|) d\theta. \quad (34)$$

Так как функция $\Phi(z) = p + p_1 z + \dots$ регулярна в $|z| < 1$ и $\operatorname{Re}\Phi(z) > \gamma$ в $|z| < 1$, то функция $\frac{\Phi(z) - \gamma}{p - \gamma} = 1 + c_1 z + \dots$ регулярна в $|z| < 1$ и $\operatorname{Re} \left[\frac{\Phi(z) - \gamma}{p - \gamma} \right] > 0, |z| < 1$, и, следовательно,

$$\frac{\Phi(z) - \gamma}{p - \gamma} = \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{-it} z}{1 - e^{-it} z} d\alpha(t), \quad |z| < 1, \quad \alpha(t) \in M_1.$$

Тогда имеем

$$\Phi(z) = (p - \gamma) \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{-it} z}{1 - e^{-it} z} d\alpha(t) + \gamma,$$

откуда

$$\Phi(z) = \rho + (\rho - \gamma) \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \quad |c_n| \leq 2, \quad n=1, 2, \dots$$

Следовательно, в $|z| < 1$ ($z = \tau e^{i\theta}$) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Phi(z)|^2 d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\rho^2 + (\rho - \gamma)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{2n} |c_n|^2 \right] d\theta \leq \\ &\leq \rho^2 + 4(\rho - \gamma)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{2n} = \rho^2 + 4(\rho - \gamma)^2 \frac{\tau^2}{1 - \tau^2}, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Phi(z)| d\theta &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\rho + 2(\rho - \gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n \right] d\theta = \\ &= \rho + 2(\rho - \gamma) \frac{\tau}{1 - \tau}, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Phi'(z)| d\theta &\leq \frac{\rho - \gamma}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1 - \tau e^{i(\theta-t)}|^2} \right) d\alpha(t) = \\ &= 2(\rho - \gamma) \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha(t)}{1 - \tau^2} = \frac{2(\rho - \gamma)}{1 - \tau^2}. \end{aligned} \quad (37)$$

Кроме того, в кольце $\rho < |z| < 1$ имеем

$$|S_{\rho-\gamma}(z)| < A_1, \quad |S'_{\rho-\gamma}(z)| < A_2, \quad (38)$$

где A_1, A_2 - постоянные, не зависящие от τ .

Из (32) на основании (33)-(38) получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|G(z)|^2 + |zG'(z)|) d\theta = O((1-\tau)^{-1}), \quad z = \tau e^{i\theta}, \quad \rho < \tau < 1. \quad (39)$$

Таким образом, из (30), (31) и (39) следует, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Psi(z)h'(z)| d\theta = O((1-\tau)^{-2(\rho-\gamma)+\delta}), \quad z = \tau e^{i\theta}, \quad \rho < \tau < 1.$$

Так как в разложении

$$\psi(z) h'(z) = (1 - e^{-i\theta_1^*} z) \sum_{\nu=q}^{\infty} \nu^2 a_{\nu} z^{\nu-1}$$

коэффициент при z^n равен $(n+1)^2 a_{n+1} - e^{-i\theta_1^*} n^2 a_n$, то

$$\begin{aligned} |(n+1)^2 a_{n+1} - e^{-i\theta_1^*} n^2 a_n| &= \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |\Psi(re^{i\theta}) h'(re^{i\theta})| d\theta = \\ &= r^{-n} O((1-r)^{-2(p-\gamma)+\delta}), \quad r < r < 1, \end{aligned}$$

и полагая $r = r_n = 1 - \frac{1}{n}$ ($n > \frac{1}{1-\rho}$), получим (2.6). Теорема 4 доказана.

Далее, пусть $f(z) = z^q + \sum_{n=q+1}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{S}_{\gamma}(p, q)$ и $f(z) \neq f_1(z; p, q)$.

Заметим, что в разложении

$$z h'(z) = z(z f'(z))' = \sum_{\nu=q}^{\infty} \nu^2 a_{\nu} z^{\nu}$$

коэффициент при z^n есть $n^2 a_n$. Из (29), (39) и (18) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |z h'(z)| d\theta &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z)| (|z G'(z)| + |G(z)|^2) d\theta = \\ &= O((1-r)^{-2(p-\gamma)+\delta-1}), \quad \delta > 0, \quad z = re^{i\theta}, \quad r < r < 1. \end{aligned}$$

Поэтому имеем

$$n^2 |a_n| \leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |z h'(z)| d\theta = \frac{1}{r^n} O((1-r)^{-2(p-\gamma)-1+\delta})$$

и полагая $r = r_n = 1 - \frac{1}{n}$ ($n > \frac{1}{1-\rho}$), получим (27). Теорема 5 доказана.

Пусть, наконец, выполнены предположения теоремы 6. Используя (26), получаем

$$\begin{aligned} (n+1)^2 \left| |a_n| - |a_{n+1}| \right| &= \left| n^2 |a_n| - (n+1)^2 |a_{n+1}| \right| + (2n+1) |a_n| = \\ &= O(n^{2(p-\gamma)-\delta_1}) + (2n+1) |a_n|, \quad \delta_1 > 0, \end{aligned}$$

а так как по теореме 5

$$|a_n| = O(n^{2(p-\gamma)-1-\delta_2}), \quad \delta_2 > 0,$$

то

$$|a_{n+1}| - |a_n| = O(n^{2(p-\gamma)-2-\delta}), \text{ где } \delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0.$$

Теорема 6 доказана.

З а м е ч а н и я .

1. Для функции

$$f(z) = \frac{z^\gamma}{(1-z)^{2(p-\gamma)}} \left[\left(1 + \frac{z}{\alpha}\right) (1 + \alpha z) \right]^{p-\gamma}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

имеем

$$a_n \sim \frac{n^{2(p-\gamma)-1}}{\Gamma(2(p-\gamma))} \left[\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) (1 + \alpha) \right]^{p-\gamma},$$

$$a_{n+1} - a_n \sim \frac{n^{2(p-\gamma)-2}}{\Gamma(2(p-\gamma)-1)} \left[\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) (1 + \alpha) \right]^{p-\gamma}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, существуют функции класса $S_\gamma(p, \gamma)$ исключенного в теоремах 5 и 6 вида, для которых при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$|a_n| \sim K_1 n^{2(p-\gamma)-1}, \quad |a_{n+1}| - |a_n| \sim K_2 n^{2(p-\gamma)-2},$$

где K_1, K_2 - постоянные, не зависящие от n .

2. При $\gamma=0, p=1$ теорема 4 следует из более общего результата для функций, близких к выпуклым, полученном в [6 ; теорема 5].

3. При $\gamma \geq 0, p > \frac{1}{4} + \gamma$ теорема 5 следует из теоремы 2 [7 ; теорема 3.3].

4. При $\gamma=0, p=1$ из теоремы 6 имеем для класса $S_0(1, 1)$ результат Поммеренке [6], при $\gamma=0$ - результат автора [8] для класса $S_0(p, \gamma)$.

Л и т е р а т у р а

1. Максимов Ю.Д. Экстремальные задачи в некоторых классах аналитических функций, Докл. АН СССР, 1955, 100, № 6, 1041-1044.

2. Robertson M.S. On the theory of univalent functions. Ann.Math., 1936, 37, № 2, 374-408.

3. Goodman A.W. On the Schwarz-Christoffel transformation and ρ -valent functions. Trans.Amer.math.Soc., 1950,68, № 2, 204-223.
4. Takatsuka T. Multivalent functions star-like in one direction. Trans.Amer.Math.Soc., 1965, 120, № 1, 72-82.
5. Bender T. Some extremal theorems for multivalently star-like functions. Duke math., J., 1962, 29, № 1, 101-106.
6. Pommerenke Ch. On starlike and close-to-convex functions. Proc. London math. Soc., 1963, ser.3, 13, № 50, 290-304.
7. Хейман В.К. Многолистные функции. ИЛ, М., 1960.
8. Голузина Е.Г. О взаимном росте коэффициентов одного класса ρ -листных функций. Тр.Матем. ин-та им.В.А.Стеклова АН СССР, 1968, 94, 27-32.