A. F. Kleimenov, Universal solution in a nonantagonistic positional differential game with vector performance indexes, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 1992, Volume 1, 97–105

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 1 1992

УДК 519.311

УНИВЕРСАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ В НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКОЙ ПОЗИЦИОННОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ С ВЕКТОРНЫМИ КРИТЕРИЯМИ

А. Ф. Клейменов

Предлагается понятие решения позиционной дифференциальной игры многих лиц с векторными показателями игроков. Описывается структура решений, включающая стратегии, разрешающие некоторые позиционные игры сближения. Рассматривается иллюстрирующий пример.

Рассматривается неантагонистическая позиционная дифференциальная игра (НПДИ) с векторными критериями в формализации [1, 2]. Статические многокритериальные игровые задачи исследовались ранее в [3], где введено понятие решения, обобщающее понятия оптимальности по Парето и равновесия по Нэшу. В работе [4] предложено понятие решения в многошаговой многокритериальной игре. Играм с векторными показателями игроков посвящен также один из разделов сборника [5]. Упомянем и обзор [6], в котором нашла отражение эта проблематика.

В настоящей работе на основе задания НПДИ как пополненной (по отношению к нормальной форме) совокупности элементов предлагается понятие решения игры с векторными критериями. Это решение обладает свойством универсальности в том смысле, что из него могут быть получены решения игры в бескоалиционной, иерархической, кооперативной постановках. В определении решения использованы некоторые бинарные отношения доминирования множеств [7, 8].

Работа примыкает к исследованиям [9–12].

§ 1. Постановка задачи. Понятие решения

Пусть динамика управляемой системы описывается уравнением

$$\begin{gathered} \dot{x} = f(t, x, u_1, \ldots, u_m), \quad u_i \in P_i \in \operatorname{comp} R^{p_i} \\ x[t_0] = x_0 \ , \end{gathered} \tag{1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, функция f непрерывна по совокупности аргументов, липшицева по x, удовлетворяет условию продолжимости решений на отрезок $[t_0, \vartheta]$; ϑ – фиксированный момент окончания процесса. Игрок с номером i $(i = 1, \ldots, m)$, распоряжающийся выбором управления u_i, стремится максимизировать векторный выигрыш

$$I_i = \sigma(x[\vartheta]), \quad \sigma_i = (\sigma_{i1}, \ldots, \sigma_{il_i})' , \tag{1.2}$$

где σ_{ij} – непрерывные функции.

Примем следующие предположения $1^0 - 6^0$.

1^0. Каждый игрок в текущий момент времени t знает фазовый вектор системы $x[t]$.

Коалицией называем любое непустое собственное подмножество K множества игроков $M = \{1, \ldots, m\}$. Имеем $1 \leq |K| \leq m-1$.

2^0. Задано множество $\mathcal{K}$ разрешенных коалиций игроков, которые могут образовываться по ходу игры с целью отклонения от решения ; для каждой коалиции $K \in \mathcal{K}$ задано множество $T_K \subseteq [t_0, \vartheta]$ разрешенных моментов отклонения. Считается, что по ходу игры может отклониться самое большее одна (заранее неизвестно, какая) коалиция $K \in \mathcal{K}$ в некоторый момент $\tau \in T_K$.

Полагаем, что о факте отклонения от решения и о составе отклонившейся коалиции все игроки узнают непосредственно в момент отклонения. Это предположение удобно формализовать в следующем виде.

3^0. Если коалиция $K \in \mathcal{K}$ отклонилась от решения в момент $\tau \in T_K$, то всем игрокам сообщаются (извне) текущие значения функции $\alpha_K^\tau[t] = \{\emptyset$ при $t_0 \leq t < \tau$; K при $\tau \leq t \leq \vartheta\}$; если же отклонения от решения не было, то игрокам сообщаются текущие значения функции $\alpha_0[t] = \emptyset$, $t_0 \leq t \leq \vartheta$.

В соответствии с предположениями 1^0, 3^0 стратегии игроков $U_i \div \{u_i(t, x, \alpha, \varepsilon),\ \beta_i(\varepsilon)\}$ и порождаемые ими движения в системе (1.1) определяются на основе понятий стратегий и движений из [1, 2]. Для простоты далее ограничиваемся чистыми позиционными стратегиями. Смешанные стратегии и контрстратегии могут быть рассмотрены аналогично.

Чистая позиционная стратегия (просто – стратегия) i-го игрока отождествляется с парой $U_i \div \{u_i(t, x, \alpha, \varepsilon),\ \beta_i(\varepsilon)\}$, где $u_i(\cdot)$ – произвольная функция позиции (t, x), параметра $\alpha \in \mathcal{K} \cup \emptyset$ и параметра точности [1] $\varepsilon > 0$ со значениями в множестве P_i, а непрерывная монотонная функция $\beta_i : (0, \infty) \mapsto (0, \infty)$ удовлетворяет условию $\beta_i(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ (см. также [10]). В качестве движений, порожденных набором стратегий $U = (U_1, \ldots, U_m)$, рассматриваем движения двух типов: аппроксимационные (ломаные Эйлера) и идеальные (предельные). Заметим, что если по ходу игры реализуется функция $\alpha_K^\tau[\cdot]$, то начиная с момента τ члены коалиции K переходят на некоторый набор стратегий $U_K^\tau = \{U_j^\tau, j \in K\}$, который будем называть набором стратегий отклонения.

Закон управления i-го игрока, отвечающий стратегии U_i, определяется тремя компонентами: функцией $u_i(\cdot)$, входящей в стратегию U_i, значением параметра точности ε_i и разбиением $\Delta_i = \{t_j^i\}$ отрезка $[t_0, \vartheta]$ с шагом, не превосходящим величину $\beta_i(\varepsilon_i)$ (см. [1], а также [10]). Если отклонений от решения нет, то полагаем $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_m = \varepsilon$. После отклонения коалиции K от решения значения ε_j, $j \in K$, могут быть какими угодно. Ломаные Эйлера $x[t, t_*, x_*, U_i, \varepsilon, \Delta_i, \alpha_0[\cdot]]$ и $x[t, t_*, x_*, U_i, \varepsilon, \Delta_i, \alpha_K^\tau[\cdot], U_K^\tau]$, порожденные из начальной позиции (t_*, x_*) набором законов управления $(U_i, \varepsilon, \Delta_i)$, $i = 1, \ldots, m$ при реализациях функций $\alpha_0[\cdot]$ и $\alpha_K^\tau[\cdot]$ соответственно, определяются аналогично [1, 2]. Предельные движения $x[t, t_*, x_*, U, \alpha_0[\cdot]]$ и $x[t, t_*, x_*, U, \alpha_K^\tau[\cdot], U_K^\tau]$, порожденные из начальной позиции (t_*, x_*) набором стратегий U при реализациях $\alpha_0[\cdot]$ и $\alpha_K^\tau[\cdot]$, определяются как равномерные пределы при $\varepsilon \to 0$ сходящихся последовательностей ломаных Эйлера. Множества этих предельных движений, обозначаемые через $X(t_*, x_*, U, \alpha_0[\cdot])$ и $X(t_*, x_*, U, \alpha_K^\tau[\cdot], U_K^\tau)$ соответственно, непусты и являются компактами в метрике пространства $C[t_0, \vartheta]$.

4^0. Оговорены дополнительные ограничения на выбор стратегий игроками, не входящими в отклонившуюся коалицию, после ее отклонения.

Например, ограничения могут состоять в том, что неотклонившиеся игроки должны обеспечить некоторые уровни своих выигрышей. Разумеется, возможна ситуация, когда дополнительные ограничения отсутствуют.

Зафиксируем $K \in \mathcal{K}$, $\tau \in T_K$, набор стратегий отклонений U_K^τ и начальную позицию (t_*, x_*). Для любого $i \in \{1, \ldots, m\}$ введем множества

$$\begin{aligned} \Gamma_i(t_*, x_*, U) &= P^{\min}(\sigma_i(X(t_*, x_*, U, \alpha_0[\cdot]))), \\ \Gamma_i(t_*, x_*, U, U_K^\tau) &= P^{\min}(\sigma_i(X(t_*, x_*, U, \alpha_K^\tau[\cdot], U_K^\tau))), \end{aligned} \tag{1.3}$$

где

$$\sigma_i(X(t_*, x_*, U, \alpha_0[\cdot])) = \{y \in R^{l_i}, \quad y = \sigma_i(x[\vartheta]), \quad x[\cdot] \in X(t_*, x_*, U, \alpha_0[\cdot])\},$$

а множество $\sigma_i(X(t_*, x_*, U, \alpha_K^\tau[\cdot], U_K^\tau))$ определяется аналогично.

В (1.3) через $P^{\min}(A)$ обозначено множество Парето-минимальных элементов множества A. Нетрудно показать, что множества, введенные в (1.3), непусты и компактны.

Элементы множества $\Gamma_i(t_*, x_*, U)$ можно трактовать как "гарантированные" результаты i-го игрока на наборе стратегий U для начальной позиции (t_*, x_*). Гарантия здесь понимается в том смысле, что для любого движения $x[\cdot] \in X(t_*, x_*, U, \alpha_0[\cdot])$ найдется вектор $\xi \in \Gamma_i(t_*, x_*, U)$ такой, что $\sigma_i(x[\vartheta]) \geq \xi$ (здесь и далее векторное неравенство $\geq$ означает соответствующие неравенства между координатами). Аналогично, множество $\Gamma_i(t_*, x_*, U, U_K^\tau)$ характеризует гарантированные векторные результаты i-го игрока в ситуации, когда коалиция K в момент τ перешла на набор стратегий отклонения U_K^τ.

В дальнейшем потребуются некоторые бинарные отношения множеств типа (1.3). Отметим, что бинарные отношения множеств рассматривались в работах [7, 8].

Ниже в определениях 1–3 принимаем, что A, B, A_i, B_i – множества в эвклидовых конечномерных пространствах, а K – любое непустое подмножество множества $M = \{1, \ldots, m\}$ (в том числе и само M).

Определение 1. Множество A ρ-доминирует множество B (или $A\rho B$), если для любого $a \in A$ можно указать $b \in B$ такое, что $a \geq b$, причем по крайней мере для одной такой пары имеем $a \neq b$.

Определение 2. Семейство множеств $\{A_i,\ i = 1, \ldots, m\}$ $S(K)$-доминирует семейство множеств $\{B_i,\ i = 1, \ldots, m\}$, если для любого $i \in K$ имеем $A_i \rho B_i$.

Определение 3. Семейство множеств $\{A_i,\ i = 1, \ldots, m\}$ $P(K)$-доминирует семейство множеств $\{B_i,\ i = 1, \ldots, m\}$, если для любого $i \in K$ B_i не ρ-доминирует A_i и найдется $j \in K$ такое, что $A_j \rho B_j$.

Следующее определение выделяет допустимые наборы стратегий U в игре.

Определение 4. Набор стратегий U назовем допустимым в игре с векторными показателями игроков, если для любой траектории $x[\cdot] \in X(t_0, x_0, U, \alpha_0[\cdot])$, любого набора стратегий отклонений U_K^τ, $K \in \mathcal{K}$, $\tau \in T_K$ семейство множеств $\{\Gamma_i(\tau, x[\tau], U),\ i = 1, \ldots, m\}$ не $S(K)$-доминируется семейством $\{\Gamma_i(\tau, x[\tau], U, U_K^\tau),\ i = 1, \ldots, m\}$.

Из определения следует, что от допустимого набора стратегий невыгодно отклоняться ни одной разрешенной коалиции ни в один из разрешенных моментов времени. Выгодность отклонения понимается в смысле ρ-доминирования множеств гарантированных векторных результатов для всех членов отклонившейся коалиции.

Множество допустимых наборов стратегий обозначим через $\mathcal{D}$. Очевидно, что набор стратегий, не являющийся допустимым, не может быть принят в качестве решения игры.

Замечание 1. Подчеркнем зависимость множества $\mathcal{D}$ от дополнительных ограничений, накладываемых в 4^0 на выбор стратегий игроками-неуклонистами.

Замечание 2. Множество $\mathcal{D}$, вообще говоря, незамкнуто в смысле сходимости, понимаемой как сходимость семейств множеств $\{\Gamma_i(t_0, x_0, U),\ i = 1, \ldots, m\}$ в метрике Хаусдорфа.

5^0. Оговорены дополнительные условия на допустимые наборы стратегий.

Перечислим некоторые примеры таких условий: наличие в игре взаимных непрерывных платежей между игроками (например, в форме [11]), наличие фазовых ограничений, условия, регламентирующие поведение некоторых функций вдоль траекторий. Дополнительные условия 5^0 выделяют в множестве $\mathcal{D}$, как правило, собственное подмножество $\mathcal{D}^*$.

6^0. Оговорена последовательность выбора игроками наборов стратегий в качестве решения игры.

Например, игроки могут осуществлять выбор одновременно, как это обычно принимается в бескоалиционной игре. В то же время в иерархической игре лидер производит выбор первым.

Задача 1. В множестве $\mathcal{D}^*$ выделить подмножество $\mathcal{D}^0$ наборов стратегий таких, что соответствующие им семейства $\{\Gamma_i(t_0, x_0, U),\ i = 1, \ldots, m\}$ не $P(M)$-доминируют друг друга.

Теперь введем понятие решения игры.

Определение 5. Универсальным решением неантагонистической позиционной дифференциальной игры с векторными показателями игроков назовем любой элемент множества $\mathcal{D}^0$, если в 6^0 выбор производится одновременно. Если выбор иерархический, то на первом шаге находится множество $\mathcal{D}^1 \subset \mathcal{D}^0$ всех элементов $\mathcal{D}^0$ таких, что семейства $\{\Gamma_i(t_0, x_0, U),\ i = 1, \ldots, m\}$ не $P(K_1)$-доминируют друг друга (K_1 – коалиция игроков верхнего уровня); далее находится множество $\mathcal{D}^2 \subset \mathcal{D}^1$ всех элементов $\mathcal{D}^1$ таких, что семейства $\{\Gamma_i(t_0, x_0, U),\ i = 1, \ldots, m\}$ не $P(K_2)$-доминируют друг друга (K_2 – коалиция игроков следующего уровня иерархии) и т.д.; в этом случае решением игры назовем любой элемент последнего множества.

Замечание 3. Из-за, вообще говоря, незамкнутости множества $\mathcal{D}^*$ задача 1 может не иметь решений в соответствующей "части" множества $\mathcal{D}^*$. Можно, однако, решить задачу 1 для замыкания (в смысле сходимости, оговоренной в замечании 2) множества $\mathcal{D}^*$, а элементы полученного таким образом множества $\mathcal{D}^0$, не принадлежащие множеству $\mathcal{D}^*$, заменить последовательностями элементов $\mathcal{D}^*$. Сказанное относится и к универсальному решению игры.

Термин " универсальное решение" введен здесь по аналогии с [9]. Содержательно универсальность означает возможность получения из введенного решения решений игры в бескоалиционной, иерархической и кооперативной постановках (см. также [12]).

Нетрудно показать, что при решении задачи 1 достаточно ограничиться наборами стратегий, порождающими при реализации $\alpha_0[\cdot]$ единственные предельные движения. Действительно, если множество $X(t_0, x_0, U, \alpha_0[\cdot])$ неодноэлементно, то достаточно взять в нем элемент $x^*[\cdot]$ такой, что хотя бы при одном $i = 1, \dots, m$ вектор $\sigma_i(x^*[\vartheta])$ ρ-доминирует множество $\Gamma_i(t_0, x_0, U)$. Тогда набор стратегий U^*, порождающий единственное предельное движение, совпадающее с $x^*[\cdot]$, будет $P(M)$-доминировать набор U. В следующем параграфе описана структура стратегий, составляющих набор U^*.

§ 2. Структура решений игры

Теперь рассмотрим траектории $x(t)$, $t_0 \le t \le \vartheta$ системы (1.1), порожденные всевозможными наборами программных измеримых управлений $u_1(t), \dots, u_m(t)$, $t_0 \le t \le \vartheta$. Концы траекторий образуют множество достижимости $G(\vartheta)$.

Для фиксированной траектории $x^*(\cdot)$, любых $K \in \mathcal{K}$, $i \in K$, $j = 1, \dots, l_i$, $\varepsilon > 0$ введем множества

$$\begin{aligned} M_\varepsilon(x^*(\cdot), \sigma_{ij}) = & \ \{x \in G(\vartheta) : \ \sigma_{ij}(x) \le \sigma_{ij}(x^*(\vartheta)) - \varepsilon\}, \\ N_\varepsilon(x^*(\cdot), K) = & \ \textstyle\bigcup_{i \in K} \bigcup_{j=1,\dots,l_i} M_\varepsilon(x^*(\cdot), \sigma_{ij}) . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Рассмотрим позиционную дифференциальную игру сближения [2] $\Gamma(\tau, K, x^*(\cdot), \varepsilon)$, в которой коалиция $M \setminus K$ решает задачу сближения из начальной позиции $(\tau, x^*(\tau))$ с множеством $N_\varepsilon(x^*(\cdot), K)$ (2.1) в момент ϑ, а коалиция K препятствует этому. При этом в игре $\Gamma(\tau, K, x^*(\cdot), \varepsilon)$ стратегии игроков формализуются как в [1, 2], только на множество стратегий коалиции $M \setminus K$ накладываются дополнительные условия 4^0.

Определение 6. Траекторию $x^*(\cdot)$ назовем приемлемой, если для любой коалиции $K \in \mathcal{K}$ и любого $\tau \in T_K$ можно указать $\varepsilon > 0$ такое, что разрешима задача сближения в игре $\Gamma(\tau, K, x^*(\cdot), \varepsilon)$.

Обозначим разрешающие стратегии коалиции $M \setminus K$ в игре $\Gamma(\tau, K, x^*(\cdot), \varepsilon)$ через $u_i(t, x, \varepsilon | \tau, K, x^*(\cdot))$, $i \in M \setminus K$. Если траектория $x^*(\cdot)$ приемлема, то каковы бы ни были позиция $(\tau, x^*(\tau))$ и коалиция $K \in \mathcal{K}$, причем $\tau \in T_K$, в ряспоряжении игроков из коалиции $M \setminus K$ найдется набор стратегий, не позволяющий по крайней мере одному игроку коалиции K гарантировать выигрыш, ρ-доминирующий его выигрыш на траектории $x^*(\cdot)$. Множество приемлемых траекторий обозначим через $\mathcal{B}$.

Пусть измеримые управления $u_1^*(t), \dots, u_m^*(t)$, $t_0 \le t \le \vartheta$ порождают траекторию $x^*(\cdot) \in \mathcal{B}$. Построим стратегии $U_i^0 \div \{u_i^0(t, x, \alpha, \varepsilon),\ \beta_i^0(\varepsilon)\}$, где

$$u_i^0(t, x, \alpha, \varepsilon) = \begin{cases} u_i^*(t) & \text{при } \alpha = \emptyset; \\ u_i(t, x, \varepsilon | \tau, K, x^*(\cdot)) & \text{при } \alpha = K, \ i \ne K; \\ \text{произвольная} & \text{при } \alpha = K, \ i \in K, \end{cases} \tag{2.2}$$

а функции $\beta_i^0(\varepsilon)$ выбраны так, чтобы выполнялось неравенство

$$\|x[t, t_0, x_0, \varepsilon, \Delta_i, \alpha_0[\cdot]] - x^*(t)\| < \varepsilon\varphi(t), \quad t_0 \le t \le \vartheta, \tag{2.3}$$

где $\varphi(\cdot)$ — непрерывная положительная неубывающая функция.

Каждой траектории $x^*(\cdot) \in \mathcal{B}$ ставится в соответствие набор стратегий U^0 (2.2), (2.3), множество которых обозначим через $\mathcal{U}$. Очевидно, что единственным предельным движением, порожденным набором U^0 и реализацией $\alpha_0[\cdot]$, будет движение, совпадающее с $x^*(\cdot)$. Из приемлемости $x^*(\cdot)$. и структуры (2.2), (2.3) следует, что вдоль траектории ни одной разрешенной коалиции невыгодно отклоняться от набора U^0 в том смысле, что может последовать наказание со стороны остальных игроков.

Рассмотрим множества $\mathcal{U}^* \subset \mathcal{U}$ и $\mathcal{U}^0 \subset \mathcal{U}^*$, которые имеют тот же смысл, что и множества $\mathcal{D}^*$ и $\mathcal{D}^0$ для исходного множества $\mathcal{D}$ в § 1 (при этом следует иметь в виду замечание 3).

Имеет место утверждение

Теорема 1. *Множества $\mathcal{D}^0$ и $\mathcal{U}^0$ совпадают.*

Включение $\mathcal{U}^0 \subset \mathcal{D}^0$ очевидно. Обратное включение $\mathcal{D}^0 \subset \mathcal{U}^0$ следует из построения этих множеств.

Теорема 1 доставляет конструктивный способ построения решений в игре, основанный на нахождении приемлемых траекторий.

Имея в виду, что при реализации решения игры игроки осуществляют построение ломаных Эйлера, оговорим процедуру установления факта отклонения разрешенной коалиции от решения. С этой целью введем предположения 7^0, 8^0.

7^0. Одновременно с выбором набора U в качестве решения игры игроки задают семейство ограниченных открытых в $(t_0, \vartheta) \times \mathbf{R}^n$ множеств $\{H(\varepsilon),\ \varepsilon > 0\}$, сечения которых при $t \in (t_0, \vartheta)$ непусты; при этом $H(\varepsilon_1) \subset H(\varepsilon_2)$ при $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, кроме того, выполнено условие

$$\bigcap_{\varepsilon>0} H(\varepsilon) = \{(t,x):\quad t_0 < t < \vartheta,\quad x = x[t, t_0, x_0, U, \alpha_0[\cdot]]\}.$$

В качестве момента отклонения τ принимается наименьшее t, при котором нарушается включение

$$(t,\ x[t, t_0, x_0, U, \varepsilon, \triangle_i, \alpha_0[\cdot]]) \in H(\varepsilon), \tag{2.4}$$

а отклонившейся считается та коалиция, действия которой привели к этому нарушению.

Очевидно, что для набора стратегий U^0 (2.2), (2.3) и множеств $H(\varepsilon) = \{(t,x):\ \ t_0 < t < \vartheta,\ \ \|x - x^*(t)\| < \varepsilon\varphi(t)\}$ включение (2.4) имеет место.

8^0. Одновременно с началом игры игроки выбирают общее значение параметра точности ε.

То обстоятельство, что игроки выбирают значение лишь одновременно с началом игры, не позволяет им использовать значение величины ε для уточнения своих стратегий.

Нетрудно видеть, что при выполнении предположений 7^0, 8^0 игроки имеют возможность реализовать решение игры посредством ломаных Эйлера, избегая при этом отклонений от решения.

§ 3. Пример

Динамика управляемой системы описывается уравнением

$$\begin{gathered} \dot{x} = u + v, \quad x, u, v \in \mathbb{R}^2, \quad x[t_0] = x_0, \\ \|u\| \le 1, \quad \|v\| \le 1. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Векторные показатели первого и второго игроков, распоряжающихся выбором управлений u и v соответственно, назначим следующие

$$\sigma_i(x[\vartheta]) = \left(\|x[\vartheta] - a^{(i)}\|,\ \|x[\vartheta] - b^{(i)}\|\right)', \quad i = 1, 2, \tag{3.2}$$

где $a^{(1)}$, $b^{(1)}$, $a^{(2)}$, $b^{(2)}$ – фиксированные точки в $\mathbb{R}^2$.

Предполагаем, что множество разрешенных коалиций составляют две одноэлементные коалиции – $\{1\}$ и $\{2\}$, а множество разрешенных моментов отклонения для обеих коалиций есть отрезок $[t_0,\ \vartheta]$. Дополнительных условий на выбор стратегий неуклонистом, а также на допустимые наборы стратегий, не накладывается. Полагаем также, что выбор наборов стратегий игроки осуществляют одновременно. Задача состоит в описании множества решений игры.

Зададим следующие начальные условия: $t_0 = 0$, $\vartheta = 2.5$, $x_0 = (0,0)$ и рассмотрим два варианта целевых точек:

1) $a^{(1)} = (-7,2)$, $b^{(1)} = (8,2)$, $a^{(2)} = (-2,8)$, $b^{(2)} = (1,7)$ (рис. 1),

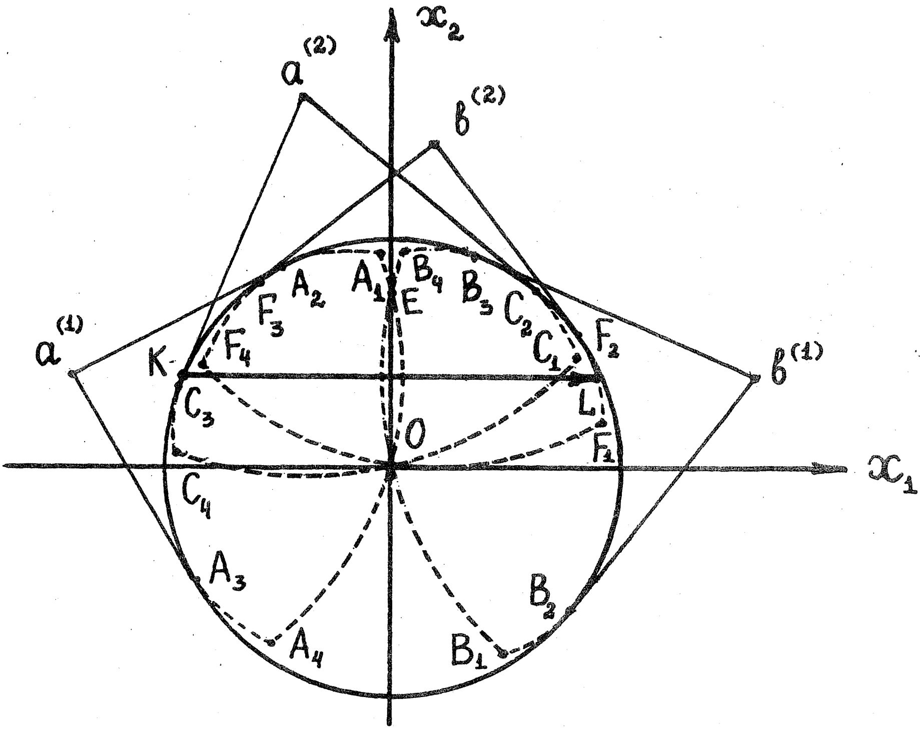
2) $a^{(1)} = (-7,2)$, $b^{(1)} = (-2,8)$, $a^{(2)} = (8,2)$, $b^{(2)} = (1,7)$ (рис. 2).

На обоих рисунках круг радиуса 5 представляет собою множество достижимости $G(\vartheta)$ системы (3.1) при $\vartheta = 2.5$. Множество $\mathcal{B}$ приемлемых траекторий (см. определение 6) в обоих вариантах опишем через множество концов этих траекторий.

Условимся при обозначении множеств использовать обозначения замкнутых кривых, ограничивающих эти множества. Отметим также, что все множества, о которых пойдет речь ниже, не содержат тех частей их границ, которые обозначены на рисунках пунктирными линиями.

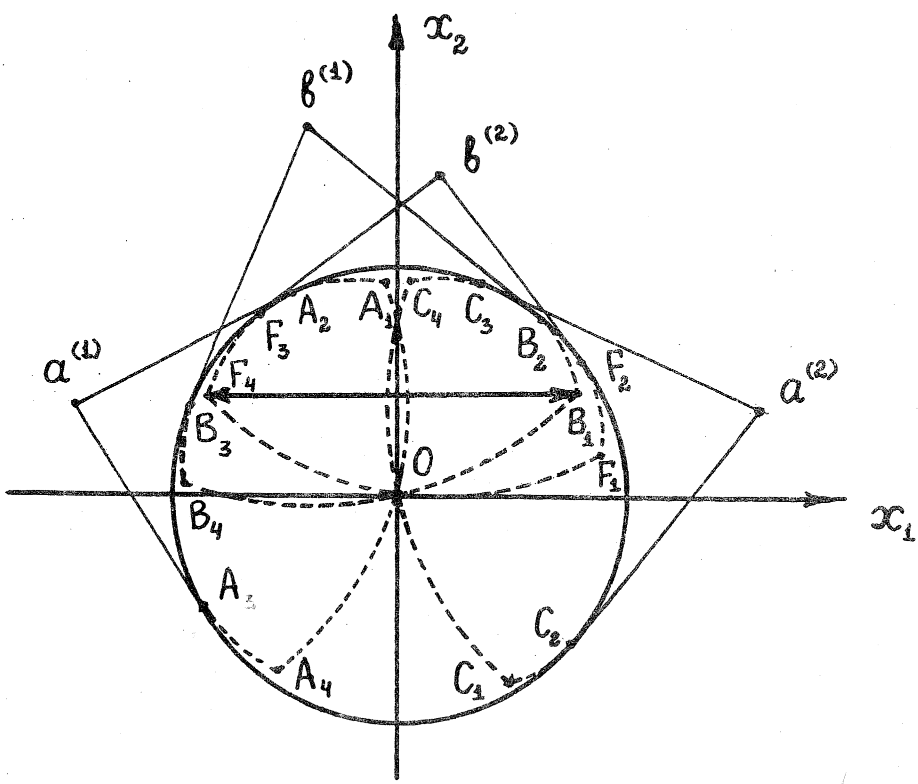
На рисунках 1 и 2 объединение множеств $OA_1A_2A_3A_4O$ и $OB_1B_2B_3B_4O$ состоит из концов траекторий, приемлемых для первого игрока. На рис. 1 это – множество $OA_1A_2A_3A_4EB_1B_2B_3B_4O$, на рис. 2 – множество $OB_1B_2A_2B_3A_3A_4O$. Аналогично, объединение множеств $OC_1C_2C_3C_4O$ и $OF_1F_2F_3F_4O$ состоит из концов траекторий, приемлемых для второго игрока. На рис. 1 это – множество $OF_1F_2C_2F_3C_3C_4O$, на рис. 2 – множество $OC_1C_2F_2C_3F_3F_4O$. Пересечение упомянутых двух объединений множеств состоит из концов траекторий, приемлемых для обоих игроков одновременно, т.е. просто приемлемых траекторий. На рис. 1 это – множество $OF_1F_2B_3B_4EA_1A_2C_3C_4O$, на рис. 2 – множество $OB_1B_2F_3F_4O$.

Поясним, что на рисунках A_1OA_4, B_1OB_4, C_1OC_4 и F_1OF_4 – дуги окружностей с центрами в точках $a^{(1)}$, $b^{(1)}$, $a^{(2)}$ и $b^{(2)}$ соответственно, причем длины дуг OA_1, OA_4, OB_1, OB_4, OC_1, OC_4, OF_1, OF_4 равны радиусу круга – множества достижимости, а отрезки $a^{(1)}A_2$, $a^{(1)}A_3$, $b^{(1)}B_2$, $b^{(1)}B_3$, $a^{(2)}C_2$, $a^{(2)}C_3$, $b^{(2)}F_2$, $b^{(2)}F_3$ лежат на касательных к границе множества достижимости.



x_2
$a^{(2)}$
$b^{(2)}$
A_2
A_1
B_4
B_3
C_2
E
F_3
F_4
C_1
F_2
$a^{(1)}$
$b^{(1)}$
K
L
C_3
O
F_1
x_1
C_4
A_3
B_2
A_4
B_1

Рис. 1



x_2
$b^{(1)}$
$b^{(2)}$
A_1
C_4
C_3
A_2
F_3
B_2
F_4
F_2
$a^{(1)}$
$a^{(2)}$
B_3
B_1
O
F_1
x_1
B_4
C_2
A_4
C_1

Рис. 2

Теперь нетрудно получить множества концов траекторий, порожденных решениями игры в обоих вариантах. На рис. 1 это – множество $KLF_2B_3B_4EA_1A_2K$, а на рис. 2 – множество $F_4B_1B_2F_3F_4$. Поясним, что точки K и L лежат на отрезке, соединяющем точки $a^{(1)}$ и $b^{(1)}$.

Поступила 15.5.92

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой.– М.: Наука, 1985.– 518 с.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры.– М.: Наука, 1974.– 456 с.
3. **Гусев М.И., Куржанский А.Б.** О ситуациях равновесия в многокритериальных игровых задачах // Докл. АН СССР.– 1976.– Т.229, N. 6.– С.1295–1298.
4. **Петросян Л.А.** Многошаговые многокритериальные игры с полной информацией // Теория игр и ее приложения: Сб. науч. тр.– Кемерово, 1989.– С.66–74.
5. Многокритериальные системы при неопределенности и их приложения: Межвуз. сб. науч. тр.– Челябинск, 1988.– 146 с.
6. **Тынянский Н.Т., Жуковский В.И.** Дифференциальные игры с ненулевой суммой (кооперативный вариант) // Итоги науки и техники: Мат. анализ.– М.: ВИНИТИ, 1979.– Т.17.– С.3–112.
7. **Подиновский В.В.** Принцип гарантированного результата для частичных отношений предпочтения // Журн. вычисл. математики и мат. физики.– 1979.– Т.19, N. 6.– С.1436–1450.
8. **Корниенко И.А.** Бинарные отношения множеств и многокритериальные задачи оптимизации в условиях неопределенности // Сб. науч. тр. / ВНИИ системных исследований.– 1986.– С.47–53.
9. **Subbotin A.I. and Kleimenov A.F.** Positional differential games: theory, applications, related topics // Intern. Conf. on Game Theory, Florence, Italy, 1991: Abstr. of invited lect.– Firenze, 1991.
10. **Клейменов А.Ф.** К кооперативной теории бескоалиционных позиционных дифференциальных игр // Докл. АН СССР.– 1990.– Т.312, N. 1.– С.32–35.
11. **Клейменов А.Ф.** Кооперативные решения в позиционной дифференциальной игре многих лиц с непрерывными функциями платежей // Прикл. математика и механика.– 1990.– Т.54, вып. 3.– С.389–394.
12. **Клейменов А.Ф.** О классификации решений в неантагонистической позиционной дифференциальной игре многих лиц // Устойчивость и нелинейные колебания: Сб. науч. тр.– Свердловск, 1991.– С.36–40.