Ю. В. Матиясевич, Простые примеры неразрешимых ассоциативных исчислений, *Докл. АН СССР*, 1967, том 173, номер 6, 1264–1266

Доклады Академии наук СССР
1967. Том 173, № 6

УДК 51.01:518.5

МАТЕМАТИКА

Ю. В. МАТИЯСЕВИЧ

ПРОСТЫЕ ПРИМЕРЫ НЕРАЗРЕШИМЫХ АССОЦИАТИВНЫХ ИСЧИСЛЕНИЙ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 21 VI 1966)

1. Способ построения ассоциативного исчисления с неразрешимой проблемой эквивалентности был впервые указан в работах А. А. Маркова ([1]) и Поста ([2]). Определяющие системы исчислений, построенных по этому способу, состоят из значительного числа соотношений. Г. С. Цейтин в работе ([3]) построил ассоциативное исчисление с определяющей системой из 7 соотношений, для которого неразрешима проблема эквивалентности. Способ построения ассоциативного исчисления с определяющей системой из 7 соотношений и неразрешимой проблемой эквивалентности указывает также Скотт ([4]).

В настоящей работе мы построим ассоциативное исчисление с неразрешимой проблемой эквивалентности фиксированному слову, определяющая система которого состоит из 5 соотношений. Кроме того, мы укажем способ построения ассоциативного исчисления с определяющей системой из 3 соотношений, для которого также неразрешима проблема эквивалентности некоторому фиксированному слову.

2. Обозначим через А алфавит $\{a, b, c, d, e\}$. Пусть i — некоторое целое неотрицательное число. Обозначим через $\mathfrak{C}_i$ следующее ассоциативное исчисление в алфавите А:

$$\begin{gathered} ac \leftrightarrow ca, \qquad ad \leftrightarrow da, \\ bc \leftrightarrow cb, \qquad bd \leftrightarrow db, \\ ce \leftrightarrow eca, \qquad de \leftrightarrow edb, \\ cd^ica \leftrightarrow cd^icae. \end{gathered}$$

Через $\mathfrak{E}_i$ мы обозначим ассоциативное исчисление в алфавите А с определяющей системой

$$\begin{gathered} ac \leftrightarrow ca, \qquad ad \leftrightarrow da, \\ bc \leftrightarrow cb, \qquad bd \leftrightarrow db, \\ ce \leftrightarrow eca, \qquad de \leftrightarrow edb, \\ cd^ica \leftrightarrow cd^ice. \end{gathered}$$

Г. С. Цейтин в работе ([3]) доказал, что *каково бы ни было целое неотрицательное число i, для исчисления $\mathfrak{C}_i$ неразрешима проблема эквивалентности некоторому фиксированному слову.* Аналогичным образом можно доказать, что, *каково бы ни было целое неотрицательное число i, для исчисления $\mathfrak{E}_i$ неразрешима проблема эквивалентности некоторому фиксированному слову.*

3. Обозначим через Б алфавит $\{\alpha, \sigma\}$, через φ — следующий нормальный алгорифм в алфавите А $\cup$ Б:

$$\begin{gathered} a \to \alpha\alpha\sigma\alpha, \\ b \to \alpha\sigma\alpha\alpha, \\ c \to \alpha\sigma\sigma, \\ d \to \sigma\sigma\alpha, \\ e \to \alpha\alpha\alpha\alpha, \end{gathered}$$

Обозначим через $\mathfrak{H}$ следующее ассоциативное исчисление в алфавите Б:

$$
\begin{gathered}
\alpha\sigma\alpha\alpha\sigma\sigma \leftrightarrow \sigma\sigma\alpha\alpha\sigma\alpha,\\
\alpha\alpha\sigma\alpha\sigma\sigma\alpha \leftrightarrow \sigma\sigma\alpha\alpha\alpha\sigma\alpha,\\
\alpha\sigma\alpha\alpha\alpha\sigma\sigma \leftrightarrow \alpha\sigma\sigma\alpha\sigma\alpha\alpha,\\
\sigma\sigma\sigma\alpha\alpha\sigma\sigma\alpha\alpha\sigma\alpha \leftrightarrow \sigma\sigma\sigma\alpha\alpha\sigma\sigma\alpha\alpha\alpha\alpha,\\
\alpha\alpha\alpha\alpha\sigma\sigma\alpha\alpha\sigma\alpha \leftrightarrow \sigma\sigma\alpha\alpha\alpha\alpha.
\end{gathered}
$$

Теорема 1. *Каковы бы ни были слова P и Q в алфавите* А, *для того, чтобы* $\mathfrak{S}_1$: $P \underline{\parallel} Q$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathfrak{H}$: $\varphi(P) \underline{\parallel} \varphi(Q)$.

Необходимость вытекает из того, что

$$
\begin{array}{ll}
\mathfrak{H} : \varphi(ac) \perp \varphi(ca), & \mathfrak{H} : \varphi(ad) \perp \varphi(da),\\
\mathfrak{H} : \varphi(bc) \perp \varphi(cb), & \mathfrak{H} : \varphi(bd) \perp \varphi(db),\\
\mathfrak{H} : \varphi(ce) \perp \varphi(eca), & \mathfrak{H} : \varphi(de) \perp \varphi(edb),
\end{array}
$$

$$\mathfrak{H}: \varphi(cdca) \perp \varphi(cdce).$$

Достаточность доказывается индукцией по длине $\mathfrak{H}$-ряда, связывающего слова $\varphi(P)$ и $\varphi(Q)$.

База индукции очевидна.

Индукционный переход проводится на основе следующей леммы.

Лемма 1. *Каковы бы ни были слово R в алфавите* А *и слово V в алфавите* Б, *если* $\mathfrak{H}$: $\varphi(R) \perp V$, *то можно построить слово S в алфавите* А *такое, что* $\mathfrak{S}_1$: $R \perp S$ *и* $\varphi(S) \circ V$.

Из теоремы 1 немедленно следует, что *для исчисления $\mathfrak{H}$ неразрешима проблема эквивалентности некоторому фиксированному слову.*

4. Обозначим через В алфавит $А \cup \{f_1, \ldots, f_7\}$, через $\mathfrak{K}$ — следующее ассоциативное исчисление в алфавите В:

$$
\begin{array}{ll}
f_1 \leftrightarrow ac, & f_1 \leftrightarrow ca,\\
f_2 \leftrightarrow ad, & f_2 \leftrightarrow da,\\
f_3 \leftrightarrow bc, & f_3 \leftrightarrow cb,\\
f_4 \leftrightarrow bd, & f_4 \leftrightarrow db,\\
f_5 \leftrightarrow ce, & f_5 \leftrightarrow ef_1,\\
f_6 \leftrightarrow de, & f_6 \leftrightarrow ef_4,\\
f_7 \leftrightarrow cf_1, & f_7 \leftrightarrow f_7e,\\
f_7 \leftrightarrow cf_1, & f_7 \leftrightarrow f_7e
\end{array}
$$

(последние два соотношения повторены потому, что нам потребуется в дальнейшем тот факт, что число соотношений исчисления $\mathfrak{K}$ является степенью числа 2).

Лемма 2. *Каковы бы ни были слова P и Q в алфавите* А, $\mathfrak{S}_0$: $P \underline{\parallel} Q$ *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{K}$: $P \underline{\parallel} Q$.

Обозначим через Г алфавит $\{\beta, \gamma\}$, через ψ — следующий нормальный алгорифм в алфавите $В \cup Г$:

$$
\begin{gathered}
f_1 \to \beta\beta\gamma\beta\gamma^{12},\\
\cdots\cdots\cdots\\
f_i \to \beta\beta\gamma^i\beta\gamma^{13-i},\\
\cdots\cdots\cdots\\
f_{12} \to \beta\beta\gamma^{12}\beta\gamma,
\end{gathered}
$$

где $f_8, \ldots, f_{12}$ обозначают буквы a, b, c, d, e соответственно.

Обозначим через $A_1, \ldots, A_{16}$, $B_1, \ldots, B_{16}$ слова в алфавите В такие, что система $A_i \longleftrightarrow B_i$ $(i = 1, \ldots, 16)$ является определяющей системой исчисления $\mathfrak{K}$. Обозначим через C_i слово $\psi(A_i)$, через D_i —слово $\psi(B_i)$ $(i=1,\ldots,16)$. Обозначим через $\mathfrak{L}$ ассоциативное исчисление в алфавите Г, определяющей системой которого является система $C_i \leftrightarrow D_i$ $(i = 1,\ldots,16)$.

Лемма 3. *Каковы бы ни были слова P и Q в алфавите* В, $\mathfrak{K} : P \mathrel{\underline{\|}} Q$ *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{L} : \psi(P) \mathrel{\underline{\|}} \psi\ (Q)$.

Обозначим через $p_{i,j}$ i-ю слева букву слова C_j $(i=1,\ldots,16$*, $j = 1,\ldots,16)$, через $q_{i,j}$ i-ю слева букву слова D_j $(i=1,\ldots,32$**, $j = 1,\ldots,16)$. Обозначим через M слово

$$p_{1,1}\ldots p_{1,16}p_{2,1}\ldots p_{2,16}\ldots p_{16,1}\ldots p_{16,16},$$

через N — слово

$$q_{1,1}\ldots q_{1,16}q_{2,1}\ldots q_{2,16}\ldots q_{32,1}\ldots q_{32,16}.$$

Обозначим через Д алфавит $\Gamma \cup \{\varepsilon\}$, через $\mathfrak{M}$ — следующее ассоциативное исчисление в алфавите Д:

$$\begin{gathered} \varepsilon\beta\beta \leftrightarrow \beta\varepsilon, \quad \varepsilon\gamma\beta \leftrightarrow \beta\varepsilon, \\ \varepsilon\beta\gamma \leftrightarrow \gamma\varepsilon, \quad \varepsilon\gamma\gamma \leftrightarrow \gamma\varepsilon, \\ \mathrm{M} \leftrightarrow \mathrm{N}. \end{gathered}$$

Теорема 2. *Каковы бы ни были слова P и Q в алфавите* В, $\mathfrak{K} : P \mathrel{\underline{\|}} Q$ *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{M} : \psi(P)\gamma\varepsilon^4 \mathrel{\underline{\|}} \psi(Q)\gamma\varepsilon^4$.

Обозначим через τ следующий нормальный алгорифм в алфавите $Б \cup Д$:

$$\begin{gathered} \beta \to \sigma\alpha, \\ \gamma \to \sigma, \\ \varepsilon \to \alpha\alpha. \end{gathered}$$

Обозначим через $\mathfrak{R}$ ассоциативное исчисление в алфавите Б, определяющей системой которого является система:

$$\begin{gathered} \alpha\alpha\sigma\alpha\sigma \leftrightarrow \sigma\alpha\alpha, \quad \alpha\alpha\sigma\sigma \leftrightarrow \sigma\alpha\alpha, \\ \tau(\mathrm{M}) \leftrightarrow \tau(\mathrm{N}). \end{gathered}$$

Теорема 3. *Каковы бы ни были слова P и Q в алфавите* В, *для того чтобы* $\mathfrak{K} : P \mathrel{\underline{\|}} Q$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathfrak{R} : \tau(\psi(P)\gamma\varepsilon^4) \mathrel{\underline{\|}} \tau(\psi(Q)\gamma\varepsilon^4)$.

Необходимость немедленно вытекает из теоремы 2 и следующих легко проверяемых утверждений:

$$\begin{gathered} \mathfrak{R} : \tau(\varepsilon\beta\beta) \perp \tau(\beta\varepsilon), \quad \mathfrak{R} : \tau(\varepsilon\gamma\beta) \perp \tau(\beta\varepsilon), \\ \mathfrak{R} : \tau(\varepsilon\beta\gamma) \perp \tau(\gamma\varepsilon), \quad \mathfrak{R} : \tau(\varepsilon\gamma\gamma) \perp \tau(\gamma\varepsilon), \\ \mathfrak{R} : \tau(\mathrm{M}) \perp \tau(\mathrm{N}). \end{gathered}$$

Из леммы 2 и теоремы 3 немедленно следует, что *для исчисления $\mathfrak{R}$ неразрешима проблема эквивалентности некоторому фиксированному слову.*

Замечание. Мы свели проблему эквивалентности для исчисления $\mathfrak{C}_0$ к проблеме эквивалентности для исчисления $\mathfrak{R}$. Аналогичным образом *проблема эквивалентности для произвольного ассоциативного исчисления может быть сведена к проблеме эквивалентности для некоторого ассоциативного исчисления в двубуквенном алфавите, определяющая система которого состоит из 3 соотношений.*

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
16 IV 1966

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Марков, ДАН, 55, № 7, 587 (1947). [2] E. L. Post, J. Symb. Logic, 12, 1 (1947). [3] Г. С. Цейтин, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 52, 172 (1958). [4] D. Scott, J. Symb. Logic, 21, 111 (1956).

* 16 — длина слова C_j.

** 32 — длина слова D_j.