

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Журавлев, Арифметика двухцветных поворотов окружности, *Чебышевский сб.*, 2007, том 8, выпуск 2, 56–72

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.85

15 января 2025 г., 23:22:23

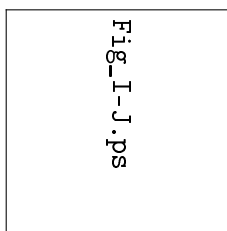


УДК 511

**АРИФМЕТИКА ДВУХЦВЕТНЫХ ПОВОРОТОВ
ОКРУЖНОСТИ¹**

В. Г. Журавлев (г. Владимир)

Аннотация



"Все благо...

Благословен и день забот,
благословен и тьмы приход—

А.С. Пушкин

1 Одномерные разбиения Фибоначчи

В этих заметках мы предполагаем обсудить вопрос о связи одномерных разбиений Фибоначчи с диссипативными — сжимающими фазовое пространство — динамическими системами. Вначале покажем, как возникают данные разбиения из индуцированных отображений для поворотов окружности на иррациональный угол. Более подробное изложение и доказательства см. [1], [2].

Отождествим единичный полуинтервал $I = [0, 1)$ с единичной окружностью $S \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ и зададим на нем *простой сдвиг*

$$S : x \mapsto x + \tau \pmod{1},$$

где $\tau = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.618\dots$ - *золотое сечение*. Если для сдвига S рассмотреть его *производные*

$$S^{(m)} = S|I^m$$

или иначе — индуцированные преобразования, отображения первого возвращения или отображения Пуанкаре — определяемые как ограничения сдвига S на

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант \mathcal{N} 05-01-00435.

некоторые полуинтервалы $I^m = [\varepsilon_m, 1) \subset I$, и потребовать, чтобы производные преобразования были подобны

$$S^{(m)} \sim S^{\pm 1} \tag{1}$$

самому исходному сдвигу S или ему *обратному сдвигу*

$$S^{-1} : x \mapsto x - \tau \pmod 1,$$

то при таком подходе мы естественным образом приходим к понятию *ветвящегося В-процесса*, порождающего *собственные значения*

$$\varepsilon_m = 1 - \tau^{-m} \tag{2}$$

с номерами $m = 0, 1, 2, \dots$. Только для таких ε_m выполняется свойство (1), при этом показатель степени в $S^{\pm 1}$ определяется четностью m . Каждый *интервал дифференцирования* $I^m = [\varepsilon_m, 1)$ разбивается

$$I^m = G_0^m \oplus E_0^m$$

на приложенные друг к другу полуинтервалы G_0^m, E_0^m , имеющие длины $g_m = |G_0^m|, e_m = |E_0^m|$, равные

$$g_m = 1 - \varepsilon_{m+2} = \tau^{-(m+2)}, \quad e_m = 1 - \varepsilon_{m+1} = \tau^{-(m+1)} \text{ для четных } m,$$

$$e_m = 1 - \varepsilon_{m+2} = \tau^{-(m+2)}, \quad g_m = 1 - \varepsilon_{m+1} = \tau^{-(m+1)} \text{ для нечетных } m.$$

Теперь в случае четного m , если подействовать сдвигом S на полуинтервалы G_0^m, E_0^m соответственно $F_{m+1} - 1$ и $F_{m+2} - 1$ раз, где F_n — *числа Фибоначчи*:

$$F_{m+2} = F_{m+1} + F_m \tag{3}$$

и $F_1 = F_2 = 1$, то получим *одномерное разбиение Фибоначчи* $\text{Til}(\varepsilon_m)$ единичного полуинтервала I *уровня* m . Для нечетного m количество сдвигов соответственно равно $F_{m+2} - 1$ и $F_{m+1} - 1$. На рис. 1 изображено несколько начальных разбиений Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$.

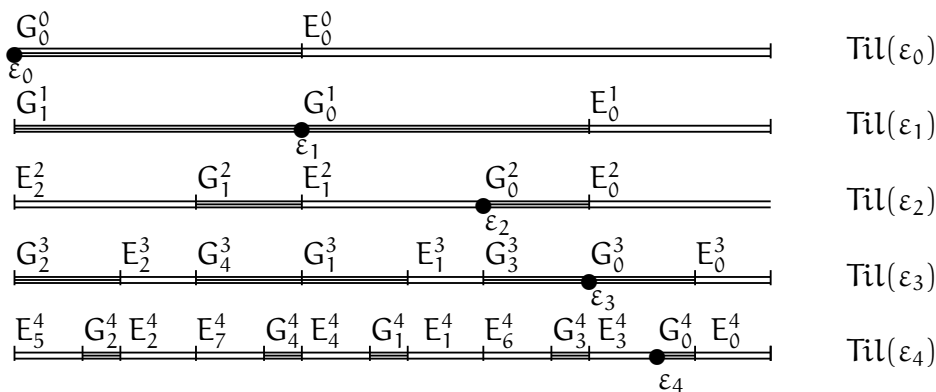


Рис. 1. Разбиения Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$ уровней $0 \leq m \leq 4$.

Следующее свойство инвариантности разбиений Фибоначчи

$$S(\text{Til}(\varepsilon_m)) = \text{Til}^+(\varepsilon_m) \quad (4)$$

является основным. В *действенном разбиении* $\text{Til}^+(\varepsilon_m)$ в полуинтервале $I^m = E_0^m \oplus G_0^m$ под действием сдвига S происходит перекладывание

$$E_0^m \oplus G_0^m \xrightarrow{S} G_0^m \sqcup E_0^m$$

образующих его базисных полуинтервалов G_0^m и E_0^m . Свойство (4) означает, что под действием сдвига S все полуинтервалы из разбиения $\text{Til}(\varepsilon_m)$ отображаются снова на интервалы этого же разбиения, т.е. не происходит дробление полуинтервалов, за исключением двух указанных выше полуинтервалов G_0^m и E_0^m . Если допустить сохранения и этих двух полуинтервалов, то отсюда бы вытекала рациональность угла поворота τ .

Из инвариантности (4) непосредственно вытекает свойство подобия (1) для производных $S^{(m)}$.

Существуют несколько способов [1] построения одномерных разбиений Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$:

1) Способ, использующий представление натуральных чисел N в системе счисления Фибоначчи, т.е. разложения N по "жадному" алгоритму в сумму чисел Фибоначчи F_m .

2) Непрерывный В-процесс.

3) В-оператор — метод подстановок или деления длинных интервалов разбиений $\text{Til}(\varepsilon_m)$ в отношении τ (inflation rules).

4) Построение через *рекуррентное соотношение Фибоначчи*

$$\text{Til}^+(\varepsilon_{m+2}) = \tau^{-1} \cdot \text{Til}^+(\varepsilon_{m+1}) \oplus \tau^{-2} \cdot \text{Til}^+(\varepsilon_m), \quad (5)$$

где знаком \oplus обозначена некоммутативная операция прикладывания к первому разбиению второго, предварительно сжатым в τ^{-1} и τ^{-2} раз соответственно.

5) Способ, использующий квазилокальные или глобальные координаты полуинтервалов из разбиений $\text{Til}(\varepsilon_m)$.

6) Дифференциальный подход (1), основанный на индуцированных отображениях.

Сделаем несколько дополненных замечаний относительно только что перечисленных способов построения разбиений Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$.

Разложение натуральных чисел N в сумму

$$N = \varepsilon_2(N)F_2 + \varepsilon_3(N)F_3 + \dots + \varepsilon_n(N)F_n + \dots = \sum_{n \geq 2} \varepsilon_n(N)F_n \quad (6)$$

чисел Фибоначчи F_m осуществляется по "жадному" алгоритму. В этом разложении коэффициенты ε_n принимают значения только 0 или 1 и для них выполняется правило сокращения: $\varepsilon_n \varepsilon_{n+1} = 0$ для всех $n \geq 1$. Наоборот, если некоторый

конечный набор коэффициентов ε_n удовлетворяет правилу сокращения, то отвечающая ему сумма (6) будет разложением в системе счисления Фибоначчи. Связь разложений (6) с разбиениями Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$ осуществляется следующим образом:

натуральные числа N , имеющие в разложении (6) на m -ом месте фиксированную цифру $\varepsilon_m(N) = 0$ или 1 отображением

$$N \mapsto \kappa_m(N) = \{N\tau + s_m\}, \tag{7}$$

где $\{x\}$ обозначает дробную часть x и число s_m зависит только от номера m , переводятся только в длинные или короткие полуинтервалы из разбиения Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_{m-2})$.

На связь (7) системы счисления Фибоначчи (6) с разбиениями Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$ автору сообщил А.В. Шутов (доклад на семинаре по теории чисел, ВГПУ).

B -оператор является дискретным вариантом B -процесса, порождающего непрерывное однопараметрическое семейство разбиений $\text{Til}(\varepsilon)$, где $\varepsilon \in I$, и непрерывно переводящего разбиения $\text{Til}(\varepsilon_m)$ в разбиения следующего уровня $\text{Til}(\varepsilon_{m+1})$. Разбиения $\text{Til}(\varepsilon_m)$ выделяются из семейства разбиений $\text{Til}(\varepsilon)$ как разбиения, содержащие полуинтервалы двух длин. Остальные разбиения из данного семейства содержат полуинтервалы трех различных длин.

Поскольку золотое сечение τ удовлетворяет квадратичному уравнению

$$\tau^{-1} + \tau^{-2} = 1,$$

то общая длина всех полуинтервалов объединенного разбиения справа из (5) снова равна 1. Как следствие, из рекуррентного соотношения (5) для двойственных разбиений Фибоначчи $\text{Til}^+(\varepsilon_m)$ вытекает рекуррентное соотношение (3) для чисел Фибоначчи F_m , через которые выражаются количества полуинтервалов в разбиениях $\text{Til}^+(\varepsilon_m)$. Таким образом, мы получаем подъем коммутативного рекуррентного соотношения (3) до некоммутативного (геометрического) рекуррентного соотношения (5).

2 Двухцветные сдвиги и их производные

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Двухцветный или двойной сдвиг*

$$S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b}) : I \mapsto I$$

с целыми параметрами $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}$ зависит от раскраски единичного полуинтервала

$$I = I_\varepsilon^- \oplus I_\varepsilon^+, \tag{8}$$

где $I_\varepsilon^- = [0, \varepsilon)$, $I_\varepsilon^+ = [\varepsilon, 1)$, и определяется двухцветным полем

$$\begin{aligned} x &\mapsto x + a\tau \bmod 1, \text{ если } x \in I_\varepsilon^-, \\ x &\mapsto x + b\tau \bmod 1, \text{ если } x \in I_\varepsilon^+. \end{aligned} \tag{9}$$

Динамические свойства двухцветных сдвигов $S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ обладают богатой геометрической структурой, допускающей описание в терминах одномерных разбиений Фибоначчи $\text{Fil}(\varepsilon_m)$. Покажем некоторые свойства двухцветных сдвигов на примере простейшего двухцветного сдвига $S_\varepsilon(2, 1)$.

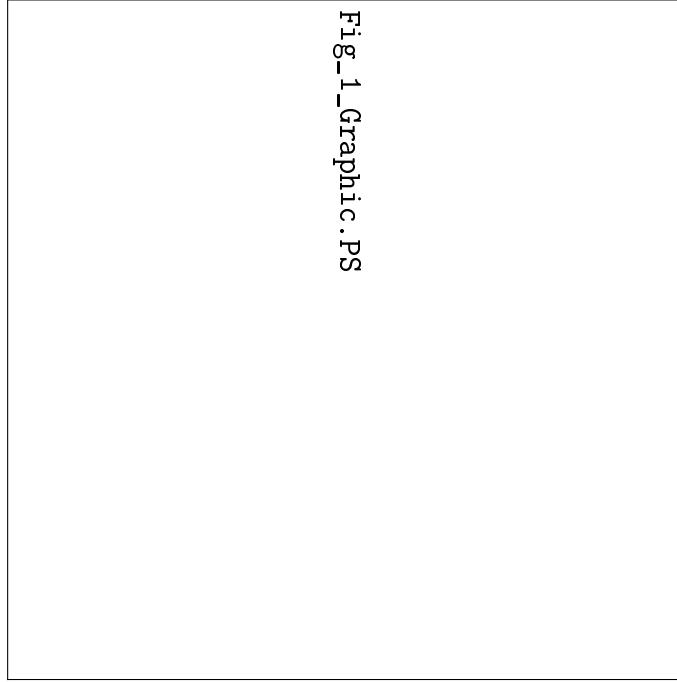


Рис 2. График функции частотного распределения $\nu(\varepsilon)$ для двухцветного сдвига $S_\varepsilon(2, 1)$

Пусть

$$\nu_\varepsilon(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#\{k : 0 \leq S_\varepsilon^k(\mathbf{a}, \mathbf{b})(x) < \varepsilon, k = 0, 1, \dots, n-1\},$$

— частота попаданий некоторой фиксированной точки $x \in I$ в полуинтервал $I_\varepsilon^- = [0, \varepsilon)$. При выборе параметров $\mathbf{a} = \mathbf{b} \neq 0$ частота $\nu_\varepsilon = \nu_\varepsilon(x)$ не зависит от начальной точки x и удовлетворяет равенству

$$\nu_\varepsilon = \varepsilon \quad \text{для всех } \varepsilon \in I. \quad (10)$$

Данное равенство вытекает из иррациональности золотого сечения τ . Оно означает равномерную распределенность на единичном полуинтервале S_ε -орбиты

$$\text{Orb}_\varepsilon(x) = \{S_\varepsilon^k(\mathbf{a}, \mathbf{a})(x)\}_{k=0}^\infty.$$

Равенство (4) нарушится, если отказаться от ограничения на параметры $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. На рис. 2 изображен график функции частотного распределения орбит ν_ε двухцветного сдвига $S_\varepsilon(2, 1)$. При таком выборе параметров \mathbf{a} и \mathbf{b} равенство (4) сохраняется только для дискретного множества значений $\varepsilon \in I$ и, следовательно,

орбиты сложных сдвигов S_ε перестают быть равномерно распределенными на I .

Характерной особенностью поведения функции ν_ε является наличие плато на ее графике — участков постоянства функции ν_ε . График функции ν_ε состоит из бесконечного числа горизонтальных отрезков — плато — и соединяющих их кусков гипербол. Тут важно подчеркнуть, что график функции ν_ε не является "чертовой" лестницей, образованной одними плато. Сравнивая поведение функции ν_ε с равномерным распределением (4), заметим, что данная функция растет то слишком быстро, то ее рост останавливается.

2.2. Граничные производные двухцветного сдвига. Для исследования двухцветных сдвигов используется *метод дифференцирования* - ограничения двухцветных сдвигов $S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ на специальные полуинтервалы I^m, I_m и J^m , связанные с разбиениями Фибоначчи $Til(\varepsilon_m)$. При этом рассматриваются два вида производных:

- 1) граничные верхние и нижние производные,
- 2) внутренние производные.

Верхние производные порядка $m = 0, 1, 2, \dots$ определяются как двойные ограничения

$$S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})^{(m)} = S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b}) | I^m \times I^m \tag{11}$$

двухцветного сдвига $S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ по области действия x и параметру ε на полуинтервалы $I^m = [\varepsilon_m, 1)$, где ε_m - собственные значения (2) В- процесса.

В определении (9) двухцветного сдвига $S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ параметры \mathbf{a} и \mathbf{b} входят симметрично. Поэтому верхним производным $S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})^{(m)}$ (11) можно сопоставить двойственные им *нижние производные*

$$S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{(m)} = S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b}) | I_m \times I_m,$$

где полуинтервалы дифференцирования $I_m = \text{inv}(I^m) = (0, 1 - \varepsilon_m]$ симметричны полуинтервалам I^m относительно *инволюции*

$$\text{inv} : x \longmapsto 1 - x$$

единичного полуинтервала $I = [0, 1)$.

2.3. Внутренние производные двухцветного сдвига. *Внутренние производные* двухцветного сдвига $S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ определяются двумя способами

$$S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b}) | I^m(\delta) \times J^m, \tag{12}$$

$$S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b}) | \text{Orb}(I^m(\delta)) \times J^m$$

— *локальным* и *глобальным*. Здесь

$$I^m(\delta) = I^m + \delta \text{ mod } 1,$$

$$\delta = |E_0^m|, J^m = [1 - |G_0^m| - |L^m|, 1 - |G_0^m|),$$

если уровень m четный; и

$$\delta = \varepsilon - (1 - |E_0^m|), \quad J^m = [1 - |E_0^m| - |L^m|, 1 - |E_0^m|)$$

в случае нечетного m . Через $\text{Orb}(I^m(\delta))$ обозначена *орбита* полуинтервала $I^m(\delta)$ относительно сдвига $S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и L^m — ее *лакуна* (некоторый полуинтервал из области притяжения двухцветного сдвига $S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})$).

2.4. Инвариантность пространства двухцветных сдвигов. Основное свойство двухцветных сдвигов $S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ состоит в том, что относительно операций граничного дифференцирования *пространство* \mathbf{S} двухцветных сдвигов замкнуто [2], т.е. производные от сдвигов $S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ снова являются двухцветными сдвигами $S_{\varepsilon'}(\mathbf{a}', \mathbf{b}')$, но, возможно, с другими перенормированными параметрами $\varepsilon', \mathbf{a}', \mathbf{b}'$.

Пусть сложный сдвиг $S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ (9) имеет целые параметры \mathbf{a}, \mathbf{b} одного знака, и пусть для индекса $m = 0, 1, 2, \dots$ числа Фибоначчи F_{m+1}, F_{m+2} удовлетворяют сравнениям

$$F_{m+1} \equiv F_{m+2} \equiv F \pmod{\mathbf{a}},$$

где $1 \leq F \leq |\mathbf{a}|$. Тогда если $|\mathbf{b}| \leq s((|\mathbf{b}|F^{-1})_{\mathbf{a}}, m)$ для некоторой явно определяемой функции $s(k, m)$ [2], то верхняя производная порядка m

$$S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})^m \sim S_{\varepsilon'}((-1)^m \mathbf{a}, (-1)^m \text{sign}(\mathbf{b}) \cdot \mathbf{b}') \quad (13)$$

снова является сложным сдвигом, подобным сдвигу с новыми параметрами из правой части формулы (13), где

$$\mathbf{b}' = (|\mathbf{b}|F^{-1})_{\mathbf{a}}$$

равно наименьшему положительному решению сравнения

$$xF \equiv |\mathbf{b}| \pmod{\mathbf{a}}$$

и параметр ε' вычисляется по следующей формуле

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon - \varepsilon_m}{1 - \varepsilon_m}$$

— перенормировка параметра ε . *Подобие* \sim сложных сдвигов в (13) означает их сопряженность

$$S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})^{(m)} = h_m \circ S_{\varepsilon'}((-1)^m \mathbf{a}, (-1)^m \text{sign}(\mathbf{b}) \cdot \mathbf{b}') \circ h_m^{-1}$$

аффинным изоморфизмом

$$h_m(x) = \tau^{-m}(x - 1) + 1$$

единичного полуинтервала I и полуинтервала дифференцирования I^m .

Для нижних производных $S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{(m)}$ соотношение (13) принимает симметричный вид

$$S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{(m)} \sim S_{\varepsilon'}((-1)^m \text{sign}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{a}', (-1)^m \mathbf{b})).$$

Внутренние производные (12) двухцветных сдвигов устроены более сложным образом и имеют *локальный* инвариантный характер. Рассмотрим один из простейших сценариев, объясняющий появление *плато* у функции ν_ε частотного распределения $S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ -орбит.

2.5. Ядро двухцветных сдвигов. Пусть $S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ - сложный сдвиг (9) с целыми взаимно простыми параметрами $1 \leq \mathbf{b} < \mathbf{a}$, удовлетворяющими сравнениям

$$F_{m+1} \equiv \mathbf{b} \pmod{\mathbf{a}}, \quad F_{m+2} \equiv 0 \pmod{\mathbf{a}}.$$

Тогда, в зависимости от четности уровня m , имеют место следующие изоморфизмы

$$\begin{aligned} S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})|_{I^m(\delta) \times J^m} &\simeq S^{\pm 1}, \\ S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})|_{\text{Orb}(I^m(\delta)) \times J^m} &\simeq \int S^{\pm 1} d_\varepsilon. \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь, справа в (14), записано интегральное преобразование от простого сдвига

$$S^{\pm 1} : x \mapsto x \pm \tau \pmod{1}$$

относительно некоторого двухцветного распределения d_ε на единичном полуинтервале I .

3 Самоподобие двухцветных сдвигов

Из свойства замкнутости пространства сложных сдвигов \mathbf{S} и из квадратичности золотого сечения τ вытекает такой феномен глобальной структуры сложных сдвигов, как их самоподобие. Поскольку верхние и нижние производные двойственны друг другу, то приведем следствия из инвариантности (13) только для верхних производных.

Любой сложный сдвиг $S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ с целыми параметрами \mathbf{a}, \mathbf{b} одного знака и с условием $1 \leq |\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}|$ обладают свойством *самоподобия* [2]

$$S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})^{(m)} \sim S_{\varepsilon'}(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \tag{15}$$

Порядок производной m можно выбрать равным T или $2T$, если *период* $T = T(\mathbf{a})$ последовательности чисел Фибоначчи

$$F_1, F_2, \dots, F_n, \dots \pmod{\mathbf{a}}$$

четный или нечетный соответственно.

Если в качестве параметра \mathbf{a} выбрать *простое число* p с условием $1 \leq \mathbf{b} \leq p$, то свойство самоподобия (15) конкретизируется следующим образом (теорема Ферма для двухцветных сдвигов) [2]:

$$S_\varepsilon(p, \mathbf{b})^{(p-1)} \sim S_{\varepsilon'}(p, \mathbf{b}) \tag{16}$$

для простых чисел $p \equiv 1$ или $4 \pmod{5}$,

$$S_\varepsilon(p, b)^{(2(p+1))} \sim S_{\varepsilon'}(p, b)$$

для простых чисел $p \equiv 2$ или $3 \pmod{5}$ и

$$S_\varepsilon(p, b)^{(20)} \sim S_{\varepsilon'}(p, b)$$

для $p = 5$.

Особый интерес представляет случай, когда параметр a равен числу Фибоначчи F_m с номером $m \geq 4$ [2]:

$$S_\varepsilon(F_m, b)^{(2m)} \sim S_{\varepsilon'}(F_m, b) \quad (17)$$

для четных m и

$$S_\varepsilon(F_m, b)^{(4m)} \sim S_{\varepsilon'}(F_m, b)$$

для нечетных m . Для $m = 2$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S_\varepsilon(1, 1)^{(2)} & \sim & S_{\varepsilon'}(1, 1) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ S^{(2)} & \sim & S, \end{array} \quad (18)$$

из которой вытекает формула (1) для производных простого сдвига S .

Для $m = 3$ имеет место первый нетривиальный случай самоподобия двухцветных сдвигов (см. рис. 2)

$$S_\varepsilon(2, 1)^{(6)} \sim S_{\varepsilon'}(2, 1). \quad (19)$$

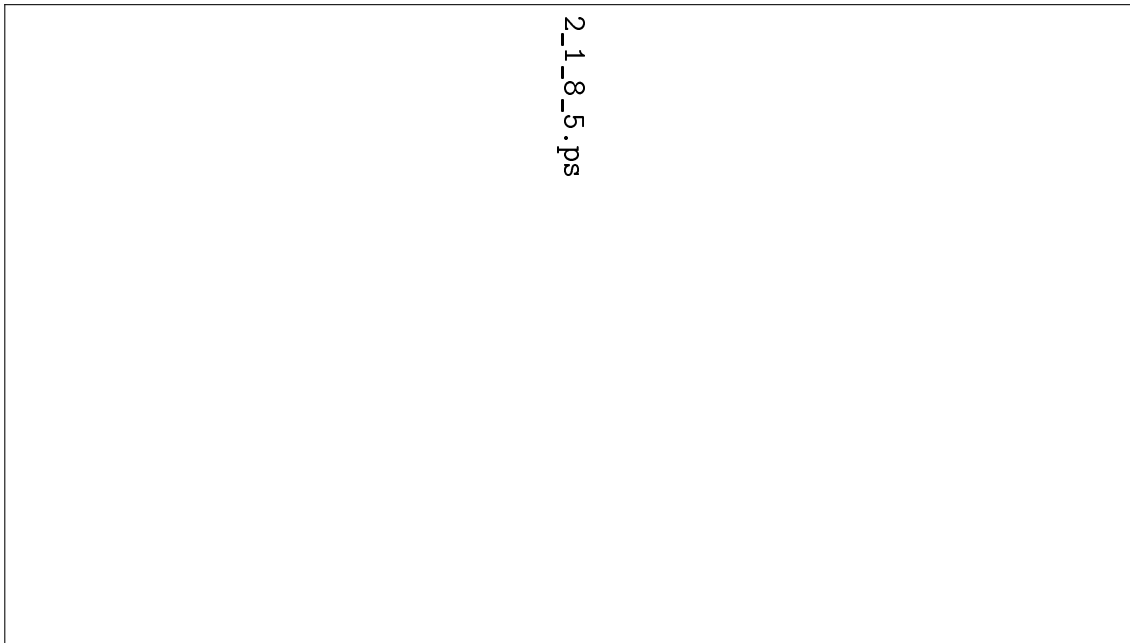


Рис. 3. Развертка аттрактора $Att(2, 1)$.

В общем случае сложный сдвиг $S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ является *сжимающим* отображением

$$I \supset S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})(I) \supset \dots \supset S_\varepsilon^k(\mathbf{a}, \mathbf{b})(I) \supset \dots$$

Для любых целых параметров \mathbf{a}, \mathbf{b} , $\mathbf{ab} > 0$, данная цепь содержит лишь конечное число $k(\varepsilon)$ строгих включений. *Аттрактор* сложного сдвига $S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ определяется равенством

$$\text{Att}(S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \bigcap_{k=0}^{\infty} S_\varepsilon^k(\mathbf{a}, \mathbf{b})(I),$$

где $S_\varepsilon^k(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ обозначает k -кратную композицию сдвига $S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Единичный полуинтервал I разбивается

$$I = \text{Att}(S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})) \sqcup \text{Spir}_\varepsilon \tag{20}$$

на аттрактор $\text{Att}(S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ — минимальное множество относительно сдвига $S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и *спираль* Spir_ε — область притяжения аттрактора, любая точка которой через конечное число итераций попадает в аттрактор $\text{Att}(S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$. Если за максимальное динамическое расстояние от I до $\text{Att}(S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ взять количество итераций, то относительно этой метрики спираль Spir_ε находится на конечном расстоянии $\text{dis}(\varepsilon) < \infty$ от аттрактора $\text{Att}(S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$.

Для двухцветного сдвига $S_\varepsilon(2, 1)$ известны верхняя и нижняя оценки

$$\frac{c_1}{1 - \varepsilon} - 2 < k(\varepsilon) < \frac{c_2}{1 - \varepsilon} + 1$$

с константами

$$c_1 = \frac{\tau^2}{2\sqrt{5}} \approx 0.58\dots$$

и

$$c_2 = \tau c_1 \approx 0.94\dots$$

Из приведенных оценок, в частности, следует, что максимальное динамическое расстояние

$$\text{dis}(\varepsilon) \longrightarrow \infty \quad \text{при} \quad \varepsilon \uparrow 1.$$

Для двухцветного сдвига $S_\varepsilon(2, 1)$ на рис. 3 изображена *развертка* по параметру $\varepsilon \in I$ разложения (20)

$$I \times I = \text{Att}(2, 1) + \text{Spir}. \tag{21}$$

С учетом раскраски единичного полуинтервала $I = I_\varepsilon^- \oplus I_\varepsilon^+$ (8), развертка аттрактора $\text{Att}(2, 1)$ состоит из *серой* $\text{Att}(2, 1)^-$ и *темной* $\text{Att}(2, 1)^+$ областей, а развертке спирали (области притяжения) Spir соответствует *светлая* область.

Геометрический смысл *самоподобия* (19) для двухцветного сдвига $S_\varepsilon(2, 1)$ состоит в том (см. рис. 3), что ограничение развертки (21) на верхний правый квадрат $I^6 \times I^6$ подобно полной развертке (21). Из самоподобия следует, что сама развертка (21) является фракталом. Порождаемые двухцветными сдвигами $S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ фракталы

4 Внутренние производные и плато

Значение второй формулы из (14) проясняет следующее равенство [2]

$$\text{Orb}(I^m(\delta)) = \text{Att}(S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})),$$

справедливое для всех параметров $\varepsilon \in J^m$. Принимая во внимание указанное равенство, приходим к следующему метрическому изоморфизму

$$S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b}) | \text{Att}(S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})) \times J^m \simeq \int S^{\pm 1} d_\varepsilon, \quad (22)$$

из которого вытекают свойства распределения точек $S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ -орбит.

Пусть двухцветный сдвиг $S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ удовлетворяет условию (14) и его параметр ε принадлежит полуинтервалу J^m . Тогда для любых x, θ из $I = [0, 1]$ существует не зависящий от выбора начальной точки x предел

$$\nu_\varepsilon(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#\{k : S_\varepsilon^k(\mathbf{a}, \mathbf{b})(x) \leq \theta, k = 0, 1, \dots, n-1\}$$

— частота попадания точек $S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ -орбиты x в интервал $[0, \theta]$. Для $\nu_\varepsilon(\theta)$ имеет место следующая формула

$$\nu_\varepsilon(\theta) = \frac{|\text{Att}(S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})) \cap [0, \theta]|}{|\text{Att}(S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b}))|}, \quad (23)$$

где $|\cdot|$ обозначает меру Хаара на торе $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Для *диагональной частоты* $\nu_\varepsilon = \nu_\varepsilon(\theta)$, когда $\theta = \varepsilon$, формула (23) преобразуется к виду

$$\nu_\varepsilon = \frac{|\text{Att}(S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b}))^-|}{|\text{Att}(S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b}))|}, \quad (24)$$

где через $\text{Att}(S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b}))^-$ обозначено пересечение аттрактора $\text{Att}(S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ с полуинтервалом $I_\varepsilon^- = [0, \varepsilon)$.

На рис. 2 серая область $\text{Att}(2, 1)^-$ представляет собой развертку множества $\text{Att}(S_\varepsilon(2, 1))^-$ по параметру $\varepsilon \in I$.

Из формулы (24) вытекает существование *плато* (см. рис. 1), означающее независимость частоты ν_ε от параметра $\varepsilon \in J^m$ [2].

Пусть $S_\varepsilon(F_n, F_{n-1})$ - двухцветный сдвиг (9) с параметром $\varepsilon \in J^m$, где

$$m \equiv n - 1 \pmod{T(F_n)},$$

$n \geq 3$ и $T(F_n)$ — период последовательности чисел Фибоначчи

$$F_1, F_2, \dots, F_m, \dots \pmod{F_n}.$$

Тогда независимо от выбора начальной точки x из $I = [0, 1)$ частота попадания ν_ε точек ее $S_\varepsilon(F_n, F_{n-1})$ -орбиты в полуинтервал $I_\varepsilon^- = [0, \varepsilon)$ вычисляется по формуле

$$\nu_\varepsilon = \frac{1 - F_{n-1}\tau^{-(m+2)}}{1 + F_{n-2}\tau^{-(m+2)}} \tag{25}$$

или – по формуле

$$\nu_\varepsilon = 1 - \frac{\tau^{-(m+2)}}{|\text{Att}(S_\varepsilon(F_n, F_{n-1}))|}, \tag{26}$$

связывающей частоту ν_ε с мерой аттрактора $|\text{Att}(S_\varepsilon(F_n, F_{n-1}))|$. Таким образом, если известна частота ν_ε , то с помощью формулы (26) можно найти меру $|\text{Att}(S_\varepsilon(F_n, F_{n-1}))|$.

Из формул (25) и (26) вытекают несколько следствий.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если выполнены, указанные выше условия, то мера аттрактора $|\text{Att}(S_\varepsilon(F_n, F_{n-1}))|$ вычисляется по формуле

$$|\text{Att}(S_\varepsilon(F_n, F_{n-1}))| = \frac{\tau^{-(m+2)}}{1 - \nu_\varepsilon}.$$

Следовательно, мера аттрактора

$$|\text{Att}(S_\varepsilon(F_n, F_{n-1}))| \rightarrow \frac{1}{F_n}$$

для $\varepsilon \rightarrow 1$ при условии, что ε принадлежит объединению полуинтервалов J^m (см. (12)).

СЛЕДСТВИЕ 2. Если параметр ε двухцветного сдвига $S_\varepsilon(F_n, F_{n-1})$, $n \geq 3$, принадлежит полуинтервалу $J^{n-2} = [\tau^{-(n-1)}, 1 - \tau^{-n})$, то частота ν_ε не зависит от номера n серии сдвигов и равна

$$\nu_\varepsilon = \tau^{-1} = 0.618\dots$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Если параметр ε двухцветного сдвига $S_\varepsilon(2, 1)$ принадлежит полуинтервалу $J^m = [1 - \tau^{-m}, 1 - \tau^{-(m+2)})$ уровня $m \equiv 1 \pmod 3$, $m \geq 1$, то для ν_ε имеет место явная формула (см. рис. 2)

$$\nu_\varepsilon = \text{th}_\tau\left(\frac{m}{2} + 1\right), \tag{27}$$

где

$$\text{th}_\tau(x) = \frac{\tau^x - \tau^{-x}}{\tau^x + \tau^{-x}}$$

— гиперболический тангенс с основанием, равным золотому сечению $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$.

5 Спектральное разложение и сингулярности

Обозначим через $\mu(\nu)$ меру тех $\varepsilon \in I$, для которых частота ν_ε равна ν , т.е.

$$\mu(\nu) = |\{\varepsilon \in [0, 1] : \nu_\varepsilon = \nu\}|.$$

Назовем *спектром* $\text{sp}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ двухцветного сдвига $S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ множество всех $\nu \in I$, имеющих ненулевой вес $\mu(\nu) > 0$.

Для сдвига $S_\varepsilon(2, 1)$ спектр $\text{sp}(2, 1)$ состоит из точек (см. рис. 3)

$$\nu_\varepsilon = \text{th}_\tau\left(\frac{m}{2} + 1\right) \quad (28)$$

с весами $\mu^m = \tau^{-(m+1)}$ и номерами $m \equiv 1 \pmod{3}$, $m \geq 1$. Каждой спектральной точке $\nu^m \in \text{sp}(2, 1)$ отвечает некоторое плато функции частоты ν_ε . При этом вес $\mu^m = \mu(\nu^m)$ равен длине интервала постоянства для ν_ε . Поскольку

$$\nu^m \sim 1 - \tau^{-(m+2)}$$

при $m \rightarrow \infty$, то график функции $\mu(\nu)$, с выделенными точками спектра и их весами, обладают *асимптотическим самоподобием* с центром в точке $(\nu, \mu) = (1, 0)$ и коэффициентом самоподобия τ^{-3} . Удобно самоподобие спектра для сложного сдвига $S_\varepsilon(2, 1)$ изображать символически

$$\text{sp}(2, 1) = (|). \quad (29)$$

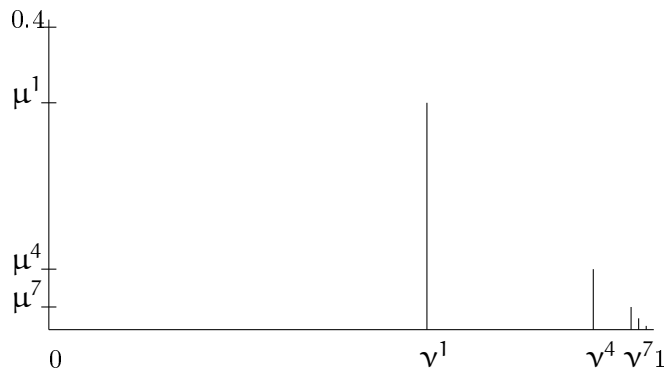


Рис. 4. Спектр двухцветного сдвига $S_\varepsilon(2, 1)$

Символ $(|)$ (29) означает, что двухцветный сдвиг $S_\varepsilon(2, 1)$ имеет *элементарный спектр* $\text{sp}(2, 1)$ (см. рис. 4), порождаемый единственной спектральной точкой $\nu^1 = \tau^{-1} = 0.618\dots$. Более того, символ $(|)$ указывает на то, что спектр $\text{sp}(2, 1)$ является асимптотически самоподобным и $|$ - его *фундаментальная частота*.

Сдвиг $S_\varepsilon(2, 1)$ имеет простейший спектр. В этом нетрудно убедиться, если сравнить его со спектром двухцветного сдвига $S_\varepsilon(3, 1)$, показанным на рис. 6. Развертка аттрактора $\text{Att}(3, 1)$ изображена на рис. 5.

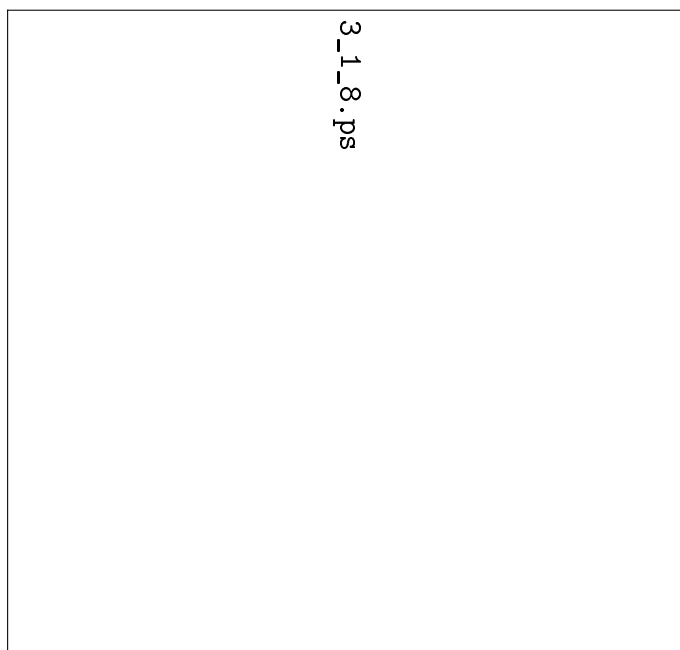


Рис. 5. Развертка аттрактора $Att(3, 1)$.

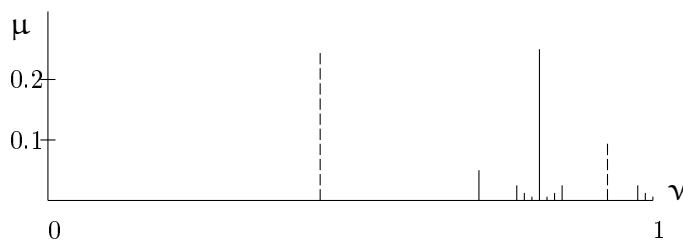


Рис. 6. Спектр двухцветного сдвига $S_\epsilon(3, 1)$

Символически спектр $sp(3, 1)$, по аналогии со спектром $sp(2, 1)$ (29), можем записать следующим образом

$$sp(3, 1) = ((-2, -1)|(-1, -2) |), \tag{30}$$

где

$$sp(-2, -1) = (| (2, 1)) \tag{31}$$

и внешние скобки в символах (30) и (31) указывают на *период* соответствующих спектров. Спектр $sp(-1, -2)$ (31) получается с помощью инволюции $inv : v \rightarrow 1 - v$ из спектра $sp(2, 1)$ и, соответственно, развертка $Att(-1, -2)$ получается поворотом на 180° развертки $Att(2, 1)$ (ср. рис. 1 и рис. 4). В спектральном разложении (30) первая вертикальная черта $|$ соответствует *предельной* точке спектра, а вторая вертикальная черта $\smile |$ с пропуском слева — его *дискретной* точке.

Приведем полный список спектральных разложений для всех сложных сдвигов $S_\epsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ с целыми взаимно простыми параметрами \mathbf{a}, \mathbf{b} , удовлетворяющими

условиям $1 \leq b < a \leq 4$:

$$\begin{aligned}
 \text{sp}(3, 1) &= (| (2, 1)|(-1, -2) |), \\
 \text{sp}(3, 2) &= (-1, -2) | (3, 1), \\
 \text{sp}(3, 2) &= ((-1, -2) | (2, 1)|), \\
 \text{sp}(4, 1) &= ((2, 1)|(-1, -2) |), \\
 \text{sp}(4, 3) &= ((2, 3)|(-1, -2) | (2, 1)|(3, 2)|).
 \end{aligned} \tag{32}$$

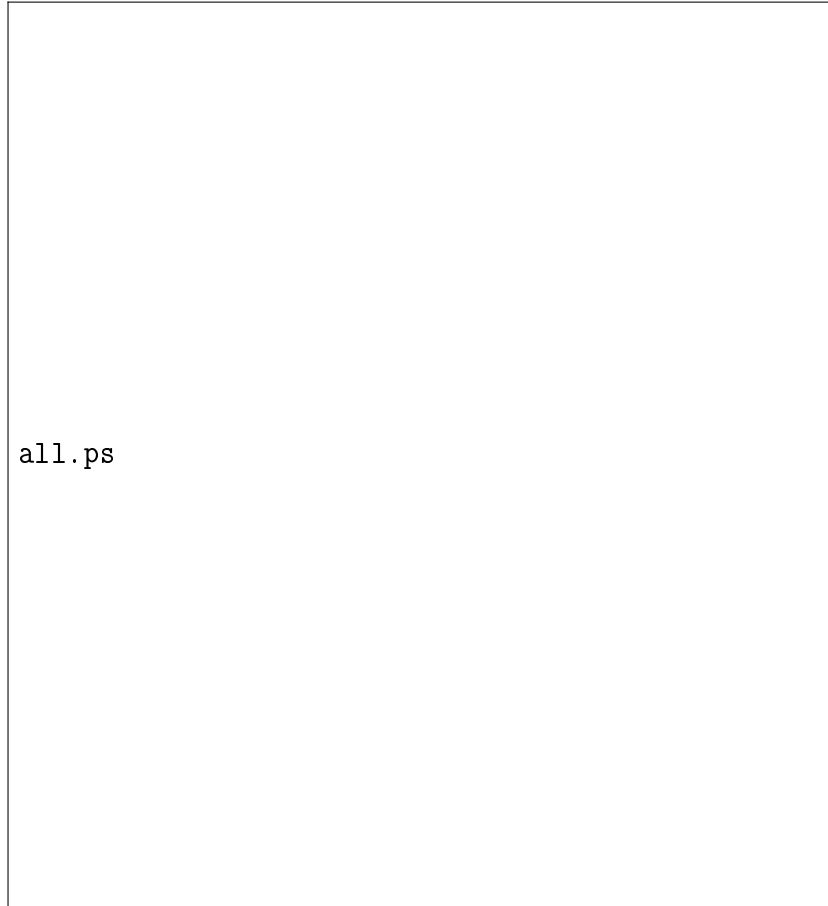


Рис. 7. Развертки аттракторов двухцветных сдвигов
(a) $\text{Att}(-2, -1)$, (b) $\text{Att}(3, 2)$, (c) $\text{Att}(4, 1)$, (d) $\text{Att}(4, 3)$.

Спектральные разложения (32) показывают, что двухцветные сдвиги $S_\varepsilon(a, b)$ разлагаются в сумму *элементарных преобразований*, каждое из которых изоморфно

1) интегралу от простого сдвига $S^{\pm 1} : x \mapsto x \pm \tau \pmod{1}$

или

2) интегралу от двухцветного сдвига $S_\varepsilon(2, 1)$ или ему симметричного сдвига $S_\varepsilon(-1, -2)$.

Таким образом, если принять во внимание симметрию, то существуют только два *базисных сдвига* S и $S_\varepsilon(2, 1)$, через которые разлагаются сложные сдвиги $S_\varepsilon(a, b)$.

Хотя это и так, но при этом действии мы сразу пропускаем множество уровней. В результате будем получать слишком "мелкие" спектральные разложения и, тем самым, мы теряем структуру двухцветных сдвигов $S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. По-видимому, более естественен структурный подход, а именно: искать неприводимые спектральные разложения

$$sp(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = ((\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)|(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2)|\dots|(\mathbf{a}_l, \mathbf{b}_l)), \tag{33}$$

т.е. разложения минимальной возможной длины $l = l(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. При этом следует ожидать, что с точностью до перестановок параметры $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i$ в разложении (33) будут удовлетворять неравенствам (ср. с разложениями (32))

$$(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i) \prec (\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

относительно лексикографического упорядочения \prec пар.

6 Сингулярные частоты

Предельные в торической топологии $I \sim \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ точки s спектра (\mathbf{a}, \mathbf{b}) называются *сингулярными*. Каждой такой точке s приписывается *степень* $\deg(s)$.

В спектре $sp(2, 1)$ (см. рис. 4) сингулярность $s \equiv 0 \pmod{1}$ имеет степень 1.

В спектре $sp(3, 1)$ (см. рис. 6) сингулярность $s = 0.809\dots$ также имеет степень 1, а сингулярность $s \equiv 0 \pmod{1}$ будет имеет степень 2.

Дискретные точки спектра имеют по определению нулевую степень.

Степень спектра $\deg(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ полагается равной максимальной степени его сингулярностей.

Сложные сдвиги $S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ из списка (32) распределены согласно их степеням $\deg(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \deg(2, 1) &= 1, \quad \deg(-2, -1) = 1, \\ \deg(3, 1) &= 2, \quad \deg(3, 2) = 2, \quad \deg(4, 1) = 2, \\ \deg(4, 3) &= 3. \end{aligned}$$

Таким образом, степень $\deg(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ указывает на уровень сложности спектрального разложения сдвига и, следовательно, — на сложность самого двухцветного сдвига $S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Доказано [2], что для любого $n = 1, 2, 3, \dots$ найдется сложный сдвиг $S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ с целыми взаимно простыми параметрами $1 \leq \mathbf{b} < \mathbf{a} \leq F_{n+2}$, имеющий спектральную степень

$$dig(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq n$$

и, следовательно, существуют двухцветные сдвиги $S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, которые могут иметь сколь угодно большой уровень сложности.

Однако, даже на уровне гипотез, остается открытым вопрос о поведении длины $l(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ неприводимых спектральных разложений (33).

7 Разбиения Фибоначчи и двухцветные сдвиги — Инь и Янь

Разбиения Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$ полностью описывают динамику двухцветных сдвигов $S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и сами эти разбиения стали изучаться раньше двухцветных сдвигов. Если мы посмотрим на рис. 3, то в горизонтальных сечениях развертки аттрактора

$$\text{Att}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \text{Att}(S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})) \otimes_\varepsilon I,$$

где $\mathbf{a} = 2$ и $\mathbf{b} = 1$, можно увидеть как раз те самые разбиения Фибоначчи, которые изображены на рис. 1. Это означает, что двухцветные сдвиги $S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ делают разбиения Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$ видимыми, т.е. исследование двухцветных сдвигов $S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ непременно привело бы к открытию разбиений Фибоначчи, если бы они к тому времени не были открыты.

В п. 1 были перечислены известные способы построения разбиений Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$. На эти же способы построения можно посмотреть и иначе — как на свойства разбиений Фибоначчи. Если теперь поставить перед собой задачу поиска других свойств, то спектральные разложения (33) двухцветных сдвигов $S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ в прямую сумму тех же сдвигов $S_\varepsilon(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i)$, но с меньшими индексами $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i) \prec (\mathbf{a}, \mathbf{b})$, могут стать источником появления новых свойств разбиений Фибоначчи $\text{Til}(\varepsilon_m)$.

Поясним эту мысль следующим примером. Предположим, что некоторый сдвиг $S_\varepsilon(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i)$ входит в спектральное разложение (33) двухцветного сдвига $S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Тогда отсюда будет следовать, что сдвиг $S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ является

$$S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int S_\varepsilon(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i) d\varepsilon \quad (34)$$

— интегральным преобразованием двухцветного сдвига $S_\varepsilon(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i)$. А из представления (34), в свою очередь, будут вытекать рекуррентные формулы

$$\text{Til}(\varepsilon_m) = S_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b})(\text{Til}(\varepsilon_{m_i})), \quad (35)$$

частным случаем которых является рекуррентная формула (5).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Журавлев В. Г. Одномерные разбиения Фибоначчи // Изв. РАН. Сер. мат. 2007. Т. 71. № 2. С. 287–321.
- [2] Zhuravlev V. G. One-dimensional Fibonacci tilings and derivatives of two-colour rotations of a circle. Preprint Max-Planck-Institut für Mathematik. 2004. V. 59. P. 1–43.

Владимирский государственный педагогический университет.

Получено 17.09.2007.

E-mail: vzhuravlev@mail.ru