УДК 512.813.4

Д. В. Артамонов, В. А. Голубева

Некоммутативные пфаффианы, связанные с ортогональной алгеброй

Вычисляются коммутаторы пфаффианов, связанных с ортогональной алгеброй $\mathfrak{o}_N$ в кососимметрической и расщепленной реализациях алгебры $\mathfrak{o}_N$. Доказывается, что производящая функция пфаффианов удовлетворяет уравнению отражения. Находится связь между пфаффианами в кососимметрической и расщепленной реализациях. С помощью полученных результатов конструируется интегрируемое уравнение типа Книжника–Замолодчикова на основе центральных элементов Капелли в $U(\mathfrak{o}_N)$, являющихся суммами квадратов изучаемых пфаффианов. Находится классический предел построенного уравнения типа Книжника–Замолодчикова, который оказывается весьма специальной системой изомонодромных деформаций.

Библиография: 18 названий.

Ключевые слова: ортогональная алгебра, некоммутативные пфаффианы, центральные элементы, элементы Капелли, уравнения Книжника–Замолодчикова.

Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли, $U(\mathfrak{g})$ – ее универсальная обертывающая. В современной физике большую роль играют различные центральные элементы в $U(\mathfrak{g})$, такие как элементы Казимира различных порядков, элементы Капелли и др.

Наиболее часто в современных приложениях используются элементы Казимира второго порядка. Так, в работах [1], [2] элемент Казимира второго порядка используется для построения R-матрицы при решении уравнения Янга–Бакстера, а также уравнений отражения [3]. Также этот элемент важен для построения коэффициентов уравнения Книжника–Замолодчикова. Кроме того, элементы Казимира более высокого порядка используются в задачах построения чисел, определяющих представления группы.

В $U(\mathfrak{gl}_N)$, $U(\mathfrak{sp}_N)$, $U(\mathfrak{o}_N)$ имеются и другие центральные элементы, а именно элементы Капелли (см. монографию Молева [4; гл. 7]). Связь элементов Капелли и элементов Казимира рассмотрена в [5].

Большую роль в теории центральных элементов алгебры $U(\mathfrak{o}_N)$ играют пфаффианы некоммутативных матриц (см. теоремы 1, 2). Настоящая работа посвящена исследованию этих объектов. Отметим, что соотношения между пфаффианами коммутирующих переменных также активно изучались. В частности, пфаффианы некоторых подматриц фиксированной матрицы удовлетворяют соотношениям Плюккера (см. [6]), а также более общим формулам суммирования миноров (см. [7]–[9]). Установлена формула для пфаффиана суммы

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-31414) и Программ Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-8508.2010.1) и поддержки молодых кандидатов наук (грант № МК-4270.2011.1).

© Д. В. Артамонов, В. А. Голубева, 2012

(см. [10]). В связи с теорией итерированных интегралов Чена (см. [11]) изучались также и пфаффианы матриц, элементы которых принадлежат алгебре, операцией в которой является умножение с перетасовками [12].

Отметим, что в случае алгебры $U(\mathfrak{gl}_N)$ роль, близкую пфаффианам, играют некоммутативные детерминанты некоторых матриц (см. [4; гл. 1, 7]). Эти детерминанты изучались даже более активно, чем некоммутативные пфаффианы. В частности, находились различные коммутационные соотношения между некоммутативными минорами (см. [4; гл. 1, §§ 1, 15]). Эти вычисления используются при построении повышающих и понижающих операторов на базисе Гельфанда–Цетлина (построения приведены в [13]).

В настоящей работе вычисляются коммутационные соотношения между некоммутативными пфаффианами (п. 1.3).

С другой стороны, известно, что коммутационные соотношения между образующими ортогональной алгебры (т.е. фактически между пфаффианами второго порядка) могут быть записаны в матричном виде, а именно в виде уравнения отражения. В работе будет показано, что производящая функция некоммутативных пфаффианов при специальном определении операции произведения производящих функций также удовлетворяет уравнению отражения. Напомним, что уравнения отражения появляются как условия факторизуемости S-матрицы в задачах на полупрямой с отражением частиц от начала координат (см. [14]). С другой стороны, уравнение отражения возникает в чисто алгебраической ситуации как определяющее коммутационные соотношения для скрученного янгиана (см. [4]). Дальнейшее обобщение понятия скрученного янгиана, приводящее к новым решениям уравнения отражения, имеется в работах Н. Дж. МакКая [3], [15] (см. также обзор [16]).

Полученные результаты о некоммутативных пфаффианах прилагаются к построению интегрируемых пфаффовых систем типа Книжника–Замолодчикова. Уравнение Книжника–Замолодчикова – это система дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют корреляционные функции в конформной теории поля. Оно возникает также и в чисто математических ситуациях, например, оно тесным образом связано с изомонодромными деформациями, а именно система Шлезингера, описывающая изомонодромные деформации фуксовых систем на римановой сфере, есть классический предел системы Книжника–Замолодчикова. Возникает оно и в других вопросах, например, при квантовании универсальных обертывающих алгебр.

В построении системы Книжника–Замолодчикова ключевую роль играет элемент Казимира второго порядка. Представляется заманчивым использовать высшие центральные элементы для построения интегрируемых уравнений типа Книжника–Замолодчикова.

В настоящей работе строится такое уравнение на основе высшего элемента Капелли алгебры $\mathfrak{o}_{2n+1}$. Это очень естественно, так как элементы Капелли по своей структуре весьма напоминают элемент Казимира второго порядка. Именно, элемент Капелли является суммой квадратов некоммутативных пфаффианов, тогда как элемент Казимира второго порядка есть сумма квадратов элементов ортонормированного базиса алгебры. Чтобы доказать интегрируемость построенного уравнения, используются формулы для действия некоммутативных пфаффианов в тензорных представлениях.

Эти построения представляют интерес со стороны аналитической теории дифференциальных уравнений, предоставляя новый пример интегрируемых пфаффовых уравнений с фуксовыми особенностями.

Известно [17], [18], что уравнения Книжника–Замолодчикова являются квантованием уравнений Шлезингера, описывающих изомонодромные деформации фуксовых систем на римановой сфере. Для построенной нами системы типа Книжника–Замолодчикова мы находим "классический предел". Он оказывается системой, описывающей нешлезингеровские деформации весьма специальной фуксовой системы на римановой сфере. Однако при этом эти деформации описываются гамильтоновой системой. При этом, вообще говоря, нешлезингеровские деформации не являются гамильтоновыми.

Работа состоит из трех параграфов. Первый посвящен выводу соотношений между пфаффианами. В п. 1.1 приводятся некоторые факты об ортогональной алгебре. В п. 1.2 дается определение пфаффиана матрицы некоммутирующих элементов. Основным примером является пфаффиан матрицы $F = (F_{ij})$, где $F_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$. В п. 1.3 выводятся коммутационные соотношения для пфаффианов. Получаемые формулы близки по духу коммутационным соотношениям для квантовых миноров, выводимых в [4; гл. 1, §§ 1, 15]. В п. 1.4 доказывается, что производящая функция пфаффианов удовлетворяет уравнению отражения. В п. 1.5 определена операция коумножения для пфаффианов. В п. 1.6 указана связь между двумя пфаффианами в двух реализациях – кососимметрической и расщепленной – ортогональной алгебры $\mathfrak{o}_N$.

Второй параграф посвящен изучению действия пфаффианов в тензорных представлениях.

Последний, третий параграф посвящен построению интегрируемых уравнений типа Книжника–Замолодчикова на основе высших элементов Капелли. Также выводятся уравнения изомонодромных деформаций, являющиеся "классическим" пределом построенных уравнений типа Книжника–Замолодчикова.

§ 1. Некоммутативные пфаффианы и соотношения между ними

1.1. Ортогональная алгебра. Сделаем некоторые замечания о рассматриваемой алгебре Ли $\mathfrak{o}_N$. Данная алгебра есть касательное пространство в единице к группе линейных преобразований, сохраняющих невырожденную квадратичную форму. Пусть G обозначает матрицу квадратичной формы. Матрица f принадлежит ортогональной алгебре, если выполнено условие $f^tG + Gf = 0$. Фиксируя вид квадратичной формы, можно получить различные реализации ортогональной алгебры.

Наиболее удобен один из двух следующих выборов квадратичной формы. В работе эти две реализации будут названы кососимметрической и расщепленной.

В первом случае $G = E$. Таким образом, $\mathfrak{o}_N$ реализуется как алгебра кососимметрических матриц. Имеется базис, состоящий из матриц $F_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$, $i, j = 1, \dots, n$, $i < j$, E_{ij} – матричные единицы. Коммутационные соотношения между этими матрицами имеют вид

$$[F_{ij}, F_{kl}] = \delta_{kj}F_{il} - \delta_{il}F_{kj} - \delta_{ik}F_{jl} + \delta_{jl}F_{ki}.$$

Другая реализация соответствует квадратичной форме

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Элементы $\widetilde{f}$ алгебры $\mathfrak{o}_N$ в этой реализации должны удовлетворять уравнению $\widetilde{f}^t G + G\widetilde{f} = 0$.

Для введения базиса алгебры в расщепленной реализации изменим индексацию. При нечетном числе N строки и столбцы матрицы $\widetilde{f}$ нумеруются числами $\{-n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n\}$, где $n = (N-1)/2$. При четном N строки и столбцы матрицы $\widetilde{f}$ нумеруются числами $\{-n, \dots, -1, 1, \dots, n\}$, где $n = N/2$.

Базисом алгебры $\mathfrak{o}_N$ в этой реализации являются элементы $\widetilde{F}_{ij} = E_{ij} - E_{-j-i}$. Можно показать, что матрицы $\widetilde{F}_{-n-n}, \dots, \widetilde{F}_{-1-1}$ образуют базис в подалгебре Картана, а оставшиеся элементы $\widetilde{F}_{ij}$, $j < -i$, являются корневыми векторами.

Коммутационные соотношения между этими образующими имеют вид

$$[\widetilde{F}_{ij}, \widetilde{F}_{kl}] = \delta_{kj}\widetilde{F}_{il} - \delta_{il}\widetilde{F}_{kj} + \delta_{-ki}\widetilde{F}_{-jl} - \delta_{-lj}\widetilde{F}_{k-i}.$$

В обоих случаях коммутационные соотношения могут быть единообразно записаны следующим образом. Именно, соотношения между порождающими в кососимметрической реализации можно записать так:

$$[F_{ij}, F_{kl}] = F_{F_{ij}k,l} + F_{i,F_{kl}j}.$$

Здесь $F_{F_{ij}k,l}$ означает следующее. Мы отождествляем индекс k с вектором e_k стандартного представления $\mathfrak{o}_N$. Имеем $F_{ij}e_k = \sum_\alpha c_\alpha e_\alpha$. Тогда положим

$$F_{F_{ij}k,l} = \sum_\alpha c_\alpha F_{\alpha,l}.$$

В расщепленной реализации коммутационные соотношения записываются точно таким же способом:

$$[\widetilde{F}_{ij}, \widetilde{F}_{kl}] = \widetilde{F}_{\widetilde{F}_{ij}k,l} + \widetilde{F}_{i,\widetilde{F}_{kl}j}.$$

1.2. Некоммутативные пфаффианы. Пусть $\Phi = (\Phi_{ij})$, $i, j = 1, \dots, 2n$, – кососимметрическая $(2n \times 2n)$-матрица, матричные элементы которой принадлежат некоммутативному кольцу.

Определение 1. Некоммутативный пфаффиан матрицы Φ определяется по формуле

$$\operatorname{Pf}\Phi = \frac{1}{n!\,2^n} \sum_{\sigma \in S_{2n}} (-1)^\sigma \Phi_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots \Phi_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)},$$

где σ – перестановка множества $\{1, \dots, 2n\}$.

Ниже для удобства будем считать, что пфаффиан матрицы нечетного порядка нулевой.

Сделаем некоторые замечания. Во-первых, при перестановке строк с номерами i_1 и i_2 и одновременной перестановке столбцов с теми же номерами пфаффиан меняет знак. Во-вторых, пфаффиан матрицы, у которой имеется две одинаковые строки (а значит и два одинаковых столбца) равен нулю.

Некоммутативные пфаффианы возникают при описании центра $U(\mathfrak{o}_N)$. Приведем это описание. В кососимметрической реализации имеется базис, составленный из матриц $F_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$, $i, j = 1, \dots, N$, $i < j$.

Отметим, что если множества индексов $\{i, j\}$ и $\{k, l\}$ не пересекаются, то коммутатор $[F_{ij}, F_{kl}]$ равен нулю.

Определим матрицу $F = (F_{ij})$, $i, j = 1, \dots, N$. Так как $F_{ij} = -F_{ji}$, то F кососимметрична.

Ниже рассматриваются пфаффианы в $U(\mathfrak{o}_N)$ матрицы F и матриц F_I, конструируемых следующим образом. Пусть $I \subset \{1, \dots, N\}$ – набор индексов, при этом на множестве I произвольным образом задан порядок. Всюду ниже, если порядок не оговаривается, то считается, что он индуцируется с естественного порядка на множестве $\{1, \dots, N\}$. Подматрицу в F, образованную строками и столбцами с номерами из множества I (расставленные в том же порядке, что и в I) обозначим через F_I. После этого столбцы и строки расставляются в соответствии с порядком на множестве I.

Справедлива следующая

Теорема 1 (см. [4; § 7.6]). *Пусть*

$$C_k = \sum_{|I|=k,\, I \subset \{1,\dots,N\}} (\operatorname{Pf} F_I)^2, \qquad k = 2, 4, \dots, 2\left[\frac{N}{2}\right],$$

– элементы Капелли. Тогда C_k принадлежат центру алгебры $U(\mathfrak{o}_N)$.

Отметим, в случае нечетного N элементы C_k алгебраически порождают центр, в случае четного N то же самое верно, если заменить $C_{N/2} = (\operatorname{Pf} F)^2$ на $\operatorname{Pf} F$.

Подчеркнем, что при построении C_k суммирование идет по неупорядоченным подмножествам $I \subset \{1, \dots, N\}$, порядок на множестве I индуцируется с множества $\{1, \dots, N\}$.

Отметим, что для пфаффианов матриц F_I в кососимметрической реализации имеется упрощенная формула.

Предложение 1 (см. [5; замечание 1.3]). *Пусть $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ – упорядоченный набор, k четно. Пусть P – множество разбиений множества $\{i_1, \dots, i_k\}$ на пары $(p_1 p_2), (p_3, p_4), \dots, (p_{k-1}, p_k)$. При этом порядок самих пар неважен, порядок внутри пары также неважен. Записав разбиение p таким образом, что во всех парах $p_i < p_{i+1}$, положим $(-1)^p = (-1)^{(p_1, p_2, \dots, p_k)}$ (знак перестановки $(p_1, p_2, \dots, p_k)$). Тогда*

$$\operatorname{Pf} F_I = \sum_{p \in P} (-1)^p F_{p_1 p_2} \cdots F_{p_{k-1} p_k}.$$

Аналогичная конструкция возможна и в расщепленной реализации. Напомним, что в ней базис состоит из матриц $\widetilde{F}_{ij} = E_{ij} - E_{-j-i}$. Образуем матрицу $\widetilde{F} = (\widetilde{F}_{ij})$, она не является кососимметрической в обычном смысле, однако она кососимметрична относительно побочной диагонали. По упорядоченному подмножеству $I \subset \{-n, \dots, n\}$ можно построить пфаффиан

$$\operatorname{Pf} \widetilde{F}_I := \operatorname{Pf}(\widetilde{F}_{-ij})_{-i,j\in I}.$$

Для множества $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ обозначим через $-I$ множество $\{-i_1, \dots, -i_k\}$. Справедлива следующая

Теорема 2 (см. [4; § 7.6]). *Пусть*

$$C_k = \sum_{|I|=k,\, I\subset\{-n,\dots,n\}} \operatorname{Pf} \widetilde{F}_I \operatorname{Pf} \widetilde{F}_{-I},$$

где $k = 2, 4, \dots, 2[N/2]$. *Тогда* C_k *принадлежат центру алгебры* $U(\mathfrak{o}_N)$.

Суммирование при определении C_k снова идет по всем неупорядоченным подмножествам $I \subset \{-n, \dots, n\}$.

Аналог предложения 1 в этом случае отсутствует.

1.3. Коммутаторы между пфаффианами. Основной результат этого пункта – вычисление коммутаторов пфаффианов в кососимметрической и расщепленной реализациях.

В п. 1.1 показано, каким образом коммутационные соотношения между порождающими в кососимметрической и расщепленной реализациях можно записать единым способом. Мы будем пользоваться этим способом записи коммутационных соотношений. Так как эта запись дает соотношения и в кососимметрической, и в расщепленной реализациях, то мы получим коммутационные соотношения между пфаффианами сразу в обеих реализациях. Для определенности мы будем использовать обозначения, отвечающие кососимметрической реализации.

Чтобы сформулировать результат вычисления коммутационных соотношений, введем новое обозначение.

Пусть $I = \{i_1, \dots, i_k\}$, $i_r \in \{1, \dots, N\}$, есть множество индексов. Определим $F_{ij}I$. Для этого отождествим i_r с вектором e_{i_r} стандартного представления V алгебры $\mathfrak{o}_N$, множество $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ отождествим с тензором $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k} \in V^{\otimes k}$. Тогда $F_{ij}I$ определяется как тензор, получающийся в результате действия F_{ij} на тензор I.

Для чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ положим

$$\operatorname{Pf} F_{\alpha I+\beta J} := \alpha \operatorname{Pf} F_I + \beta \operatorname{Pf} F_J.$$

Тогда для каждого $g \in \mathfrak{o}_N$ определено выражение $\operatorname{Pf} F_{gI}$.

Предложение 2. *Имеет место равенство* $[F_{ij}, \operatorname{Pf} F_I] = \operatorname{Pf} F_{F_{ij}I}$.

Доказательство. По определению имеем

$$\operatorname{Pf} F_I = \frac{1}{2^{k/2}(k/2)!} \sum_{\sigma\in S_k} (-1)^\sigma F_{\sigma(i_1)\sigma(i_2)} \cdots F_{\sigma(i_{k-1})\sigma(i_k)}.$$

Обозначим произведение $F_{i_1 i_2} \cdots F_{i_{k-1} i_k}$ через F^I. Также положим $F^{\alpha I + \beta J} = \alpha F^I + \beta F^J$. Вследствие соотношений $[F_{ij}, F_{kl}] = F_{F_{ij}k,l} + F_{k,F_{ij}l}$, имеем

$$[F_{ij}, F^{\sigma(I)}] = F^{F_{ij}\sigma(I)}.$$

Пфаффиан может быть записан следующим способом:

$$\operatorname{Pf} F_I = \frac{1}{2^{k/2}(k/2)!} \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma F^{\sigma(I)}.$$

Таким образом, имеем

$$[F_{ij}, \operatorname{Pf} F_I] = \frac{1}{2^{k/2}(k/2)!} \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma [F_{ij}, F^{\sigma(I)}].$$

Заметим, что соотношение $F_{ij}\sigma(I) = \sigma(F_{ij}I)$ справедливо по модулю слагаемых, содержащих повторяющиеся индексы, значит,

$$[F_{ij}, \operatorname{Pf} F_I] = \frac{1}{2^{k/2}(k/2)!} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma F^{\sigma(F_{ij}I)} = \operatorname{Pf} F_{F_{ij}I}.$$

Следствием предложения 2 является следующее утверждение.

Предложение 3. *Для произвольного элемента $g \in \mathfrak{o}_n$ имеем* $[g, \operatorname{Pf} F_I] = \operatorname{Pf} F_{gI}$.

Справедлива следующая

Теорема 3. *Коммутатор двух пфаффианов вычисляется по следующему правилу*:

$$[\operatorname{Pf} F_I, \operatorname{Pf} F_J] = \frac{1}{k/2} \sum_{I' \sqcup I'' = I,\, I'' \neq \varnothing} (-1)^{(I', I'')} \frac{|I'| + 2}{2} \operatorname{Pf} F_{I'} \operatorname{Pf} F_{\operatorname{Pf} F_{I''} J}.$$

Доказательство. По определению имеем

$$\operatorname{Pf} F_I = \frac{1}{2^{k/2}(k/2)!} \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma F_{\sigma(i_1)\sigma(i_2)} \cdots F_{\sigma(i_{k-1})\sigma(i_k)}.$$

Применяя коммутатор $[\,\cdot\,, \operatorname{Pf} F_J]$, согласно предложению 2 получаем

$$\begin{aligned}
[\operatorname{Pf} F_I, \operatorname{Pf} F_J] &= \frac{1}{2^{k/2}(k/2)!} \sum_{\sigma \in S_k} \sum_{r=2,3,\ldots,k} (-1)^\sigma F_{\sigma(i_1)\sigma(i_2)} \cdots [F_{\sigma(i_{r-1})\sigma(i_r)}, \operatorname{Pf} F_J] \\
&\quad \times F_{\sigma(i_{r+1})\sigma(i_{r+2})} \cdots F_{-\sigma(i_{k-1})\sigma(i_k)} \\
&= \frac{1}{2^{k/2}(k/2)!} \sum_{\sigma \in S_k} \sum_{r=2,3,\ldots,k} (-1)^\sigma F_{\sigma(i_1)\sigma(i_2)} \cdots \operatorname{Pf} F_{F_{\sigma(i_{r-1}),\sigma(i_r)} J} \\
&\quad \times F_{\sigma(i_{r+1})\sigma(i_{r+2})} \cdots F_{\sigma(i_{k-1})\sigma(i_k)}.
\end{aligned}$$

Зафиксируем индекс r и будем перемещать пфаффиан $\operatorname{Pf} F_{F_{\sigma(i_{r-1})\sigma(i_r)}}$ влево. При этом, вследствие использования коммутационных соотношений, появляются новые слагаемые. Например, после первого шага мы получаем, что пфаффиан $[\operatorname{Pf} F_I, \operatorname{Pf} F_J]$ равен

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{k/2}(k/2)!}\sum_{\sigma\in S_k}\sum_{r=2,3,\dots,k}&(-1)^\sigma F_{\sigma(i_1)\sigma(i_2)}\cdots F_{\sigma(i_{r+1})\sigma(i_{r+2})}\\ &\times \operatorname{Pf} F_{F_{\sigma(i_{r-1}),\sigma(i_r)}J}\cdots F_{\sigma(i_{k-1})\sigma(i_k)} + F_{\sigma(i_1)\sigma(i_2)}\cdots F_{\sigma(i_{r+1})\sigma(i_{r+2})}\\ &\times \operatorname{Pf} F_{F_{\sigma(i_{r+1})\sigma(i_{r+2})}F_{\sigma(i_{r-1}),\sigma(i_r)}J}\cdots F_{\sigma(i_{k-1})\sigma(i_k)}.\end{aligned}$$

Для множества $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ введем обозначения $F^I = F_{i_1 i_2}\cdots F_{i_{k-1}i_k}$. Коммутатор $[\operatorname{Pf} F_I, \operatorname{Pf} F_J]$ может быть записан следующим способом:

$$\frac{1}{2^{k/2}(k/2)!}\sum_{\sigma\in S_k}\sum_{r=2,3,\dots,k}\sum_{K',K''}(-1)^\sigma F_{\sigma(i_1),\dots,\sigma(i_{r-2})}F^{K'}\operatorname{Pf} F_{F^{K''}F_{\sigma(i_{r-1}),\sigma(i_r)}J}.$$

Суммирование $\sum_{K',K''}$ проводится по всем разбиениям множества $\{\sigma(i_{r+1}), \dots, \sigma(i_k)\}$ на два подмножества, удовлетворяющие следующим ограничениям. Если $\sigma(i_{2s}) \in I'$, то $\sigma(i_{2s-1}) \in I'$. Другими словами, разбиение $K' \sqcup K'' = \{\sigma(i_{r+1}), \dots, \sigma(i_k)\}$ определяет разбиение множества пар $\{(\sigma(i_{r+1}), \sigma(i_{r+2})), \dots, (\sigma(i_{k-1}), \sigma(i_k))\}$. Порядок на множествах K', K'' индуцируется со множества $\{\sigma(i_{r+1}), \dots, \sigma(i_k)\}$.

Теперь проведем суммирование по-другому. Обозначим через I' множество $\{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_{r-2})\} \sqcup K'$ с естественным (индуцированным с I) порядком. Аналогично обозначим через I'' множество $K'' \sqcup \{\sigma(i_{r-1}), \sigma(i_r)\}$ с естественным порядком. Заметим, что $2 \leqslant |I''| \leqslant k - r + 2$ и $\sigma(i_{r-1}), \sigma(i_r) \in I''$.

Пусть σ' есть перестановка множества I', которая переводит его в $\{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_{r-2})\} \sqcup K'$. Аналогично, пусть σ'' есть перестановка множества I'', которая переводит его в $K'' \sqcup \{\sigma(i_{r-1}), \sigma(i_r)\}$.

Ограничения на множество I'' следующие: $2 \leqslant |I''| \leqslant k - r + 2$.

Отображение $r, \sigma, K', K'' \mapsto r, I', I'', \sigma', \sigma''$ не инъективно. Прообраз r, I', I'', σ', σ'' состоит из наборов r, σ, K', K'', конструируемых следующим способом. Множество I делится на два подмножества, состоящих из $|I'|$ и $|I''|$ элементов соответственно. Индексы i_{r-1}, i_r должны принадлежать второму множеству.

Это может быть сделано

$$\frac{((|I| - 2)/2)!}{(|I'|/2)!\,(|I''|/2)!}$$

способами.

Перестановка σ и множества K', K'' восстанавливаются следующим способом. Перестановка σ получается записыванием элементов $\sigma'(I')$ на местах первого выбранного подмножества в I, состоящего из $|I'|$ элементов, и записыванием элементов $\sigma''(I'')$ во второе выбранное подмножество в I. Подмножество K' есть подмножество $\sigma'(I')$, из которого удалены первые $r - 2$ элемента. Подмножество K'' есть подмножество $\sigma''(I'')$, из которого удалены последние 2 элемента.

Таким образом, набор r, σ, K', K'' может быть восстановлен

$$\frac{((|I|-2)/2)!}{(|I'|/2)!\,(|I''|/2)!}$$

способами.

Имеем

$$(-1)^{\sigma} = (-1)^{\sigma'}(-1)^{\sigma''}(-1)^{(I',I'')}.$$

Здесь $(-1)^{(I',I'')}$ есть знак перестановки $(I'I'')$ множества I.

Отметим, что

$$\frac{1}{(k/2)!} = \frac{1}{k/2}\,\frac{1}{\frac{((|I|-2)/2)!}{(|I'|/2)!\,(|I''|/2)!}}\,\frac{1}{(|I'|/2)!}\,\frac{1}{(|I''|/2)!}.$$

Таким образом, получается формула

$$[\operatorname{Pf} F_I, \operatorname{Pf} F_J] = \frac{1}{k/2}\sum_{r=2,4,\dots,k}\ \sum_{I'\sqcup I''=I,\,2\leqslant|I''|\leqslant k-r+2}(-1)^{(I',I'')}$$
$$\times\sum_{\sigma',\sigma''}\frac{1}{2^{|I'|/2}}\,\frac{1}{(|I'|/2)!}\,\frac{1}{2^{|I''|/2}}\,\frac{1}{(|I''|/2)!}(-1)^{\sigma'}(-1)^{\sigma''}F^{\sigma'(I')}\operatorname{Pf} F_{F^{\sigma''(I'')}J}.$$

Из нее получаем, что

$$[\operatorname{Pf} F_I, \operatorname{Pf} F_J] = \frac{1}{k/2}\sum_{r=2,4,\dots,k}\ \sum_{I'\sqcup I''=I,\,2\leqslant|I''|\leqslant k-r+2}(-1)^{(I',I'')}\operatorname{Pf} F_{I'}\operatorname{Pf} F_{\operatorname{Pf} F_{I''}J}.$$

Или

$$[\operatorname{Pf} F_I, \operatorname{Pf} F_J] = \frac{1}{k/2}\sum_{I'\sqcup I''=I,\,I''\neq\varnothing}\frac{|I|-|I''|+2}{2}(-1)^{(I',I'')}\operatorname{Pf} F_{I'}\operatorname{Pf} F_{\operatorname{Pf} F_{I''}J}.$$

Отметим, что $|I| = |I'| + |I''|$.

1.4. R-тензорное соотношение. Кроме выведенного выше коммутационного соотношения между пфаффианами, можно получить интересную формулу для производящей функции пфаффианов. Цель этого пункта – доказать, что производящая функция пфаффианов удовлетворяет уравнению отражения. Прежде всего укажем связь между уравнением отражения и ортогональной алгеброй.

Введем матрицу

$$t\left(u+\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{F}{u+1/2},$$

где матрица F имеет вид $\sum_{ij} E_{ij}\otimes F_{ij} = \sum_{ij} F_{ij}\otimes F_{ij}$. Это определение совпадает со старым определением $F = (F_{ij})$. Для t справедливо уравнение отражения. Выпишем его.

Определим также матрицы $t_1(u)$ и $t_2(u)$ равенствами

$$t_1(u) = 1 + \frac{1}{2u}\sum_{ij} F_{ij}\otimes 1\otimes F_{ij}, \qquad t_2(u) = 1 + \frac{1}{2u}\sum_{ij} 1\otimes F_{ij}\otimes F_{ij}.$$

Тогда уравнение отражения записывается в виде

$$R(u-v)t_1\left(u+\frac{1}{2}\right)R^t(-u-v)t_2\left(v+\frac{1}{2}\right)=t_2\left(v+\frac{1}{2}\right)R^t(-u-v)t_1\left(u+\frac{1}{2}\right)R(u-v)$$

(см. [4; гл. 2, предложения 2.2.1, 2.1.2]), где R-матрица определяется по формуле

$$R(z)=1-\frac{1}{z}\sum_{ij}E_{ij}\otimes E_{ji}.$$

Транспонирование действует только на ее вторую тензорную компоненту, так что $R^t(z)=1-1/z\sum_{ij}E_{ij}\otimes E_{ij}$.

Ниже будет получен аналог приведенного выше четверного соотношения для случая производящей функции пфаффианов.

С этой целью рассмотрим элементы e_i, $i=1,\dots,N$, а также элементы e_{ij}, $i,j=1,\dots,N$. Через Λ обозначим внешнюю алгебру, построенную на этих переменных.

Введем операцию матричного умножения, позволяющую перемножать элементы линейной оболочки $\langle e_{ij}\rangle$ и элементы линейной оболочки $\langle e_{ij}\rangle$ или линейной оболочки $\langle e_k\wedge e_l\rangle$. Произведение задается формулами

$$e_{ij}e_{kl}:=\delta_{jk}e_{il},\qquad e_{ij}(e_k\wedge e_l):=e_{ij}(e_{kl}-e_{lk})=\delta_{jk}e_{il}-\delta_{jl}e_{ik}.$$

Данные формулы говорят, что e_{ij} при перемножении ведут себя как матричные единицы E_{ij}, а $e_k\wedge e_l$ ведут себя как матрицы $F_{kl}=E_{kl}-E_{lk}$. Поэтому приведенное выше четверное соотношение можно записать для матриц

$$R(z)=1-\frac{1}{z}\sum_{ij}e_{ij}\otimes e_{ji},\qquad t(u)=1+\frac{1}{2u}\sum_{i_1,i_2}e_{i_1}\wedge e_{i_2}\otimes F_{i_1i_2}.$$

Построим формальный ряд – производящую функцию пфаффианов.

Определение 2. Производящим пфаффианным тензором назовем формальный ряд

$$T(u)=\sum_{k\geqslant 0}k!(-1)^k\sum_{I=\{i_1<\dots<i_{2k}\}\subset\{1,\dots,N\}}(e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_{2k}})\otimes\frac{1}{u^k}\operatorname{Pf}F_I\in\Lambda\otimes U(\mathfrak{o}_n)[[u]].$$

Суммирование идет по неупорядоченным подмножествам I, но мы явно зададим порядок на его элементах, индуцированный с $\{1,\dots,N\}$.

Для получения четверного соотношения для $T(u)$ определим вспомогательный элемент

$$\Theta=\frac{1}{2}\sum_{i_1,i_2\in\{1,\dots,N\}}e_{i_1}\wedge e_{i_2}\otimes\frac{1}{u}F_{i_1i_2}.$$

Тогда справедливо соотношение

$$T(u)=1-\Theta+\Theta\wedge\Theta-\Theta\wedge\Theta\wedge\Theta+\cdots.$$

Действительно, достаточно проверить, что

$$\Theta^{\wedge k}=k!\sum_{I=\{i_1<\dots<i_{2k}\}}e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_{2k}}\frac{1}{u^k}\operatorname{Pf}F_I.$$

Доказательство этого утверждения имеется в [5].

Таким образом, $T(u) = (1+\Theta)^{-\wedge}$ – обратный тензор во внешней алгебре Λ. Заметим, что

$$1+\Theta = 1 + \frac{1}{2u}\sum_{i_1,i_2} e_{i_1}\wedge e_{i_2}\otimes F_{i_1 i_2}.$$

То есть $1+\Theta = t(u)$, и, следовательно, $T(u) = t(u)^{-\wedge}$.

Определим теперь тензоры $T_1(u), T_2(u) \in \Lambda\otimes\Lambda\otimes U(\mathfrak{o}_n)[[u]]$ следующими равенствами:

$$T_1(u) = \sum_{k\geqslant 0} k!\,(-1)^k \sum_{I=\{i_1,\dots,i_k\}\subset\{1,\dots,N\}} (e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_k})\otimes 1\otimes \frac{1}{u^k}\operatorname{Pf} F_I = t_1^{-\wedge}(u),$$

$$T_2(u) = \sum_{k\geqslant 0} k!\,(-1)^k \sum_{I=\{i_1,\dots,i_k\}\subset\{1,\dots,N\}} 1\otimes (e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_k})\otimes \frac{1}{u^k}\operatorname{Pf} F_I = t_2^{-\wedge}(u).$$

Отметим, что $-\wedge$ обозначает обращение в алгебре $\Lambda\otimes\Lambda\otimes U(\mathfrak{o}_n)[[u]]$.

Тот факт, что выполняется уравнение отражения для матрицы $t(u)$, записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} &R(u-v)T_1^{-\wedge}\left(u+\frac{1}{2}\right)R^t(-u-v)T_2^{-\wedge}\left(v+\frac{1}{2}\right)\\ &\quad= T_2^{-\wedge}\left(v+\frac{1}{2}\right)R^t(-u-v)T_1^{-\wedge}\left(u+\frac{1}{2}\right)R(u-v). \end{aligned}$$

При этом матрицы R, R^t, $T_1^{-\wedge} = t_1(u)$, $T_2^{-\wedge} = t_2(u)$ перемножаются с помощью матричного умножения.

Следующий шаг состоит в том, чтобы из этих соотношений для матриц R, R^t, $T_1^{-\wedge}$, $T_2^{-\wedge}$ получить соотношение для обратных элементов в алгебре $\Lambda\otimes\Lambda\otimes U(\mathfrak{o}_n)[[u]]$, т.е. для элементов $R^{-\wedge}$, $(R^t)^{-\wedge}$, T_1, T_2.

Для получения такого соотношения необходимо заменить операцию матричного умножения на новую операцию $\bullet$ умножения между тензорами.

Для ее построения прежде всего заметим, что матрицы R, $T_1^{-\wedge} = t_1(u)$, а также R^t, $T_2^{-\wedge} = t_2(u)$, рассмотренные как тензоры, имеют вид $1+a$, где a – тензор ненулевого порядка. Так, для R имеем $a = \sum_{ij}(e_{ij}\otimes e_{ji}\otimes 1)/z$, для R^t имеем $a = \sum_{ij}(e_{ij}\otimes e_{ij}\otimes 1)/z$, для $T_1^{-\wedge}$ имеем $a = \sum_{ij} 1/(2u)(e_i\wedge e_j)\otimes 1\otimes F_{ij}$, для $T_2^{-\wedge}$ имеем $a = \sum_{ij} 1/(2u) 1\otimes(e_i\wedge e_j)\otimes 1\otimes F_{ij}$.

У таких элементов имеется обратный во внешней алгебре, а именно элемент $(1+a)^{-\wedge} = 1 - a + a\wedge a - \dots = \sum_k (-1)^k a^{\wedge k}$.

Определим операцию умножения между рядами $(1+a)^{-\wedge} = \sum_k(-1)^k a^{\wedge k}$ и $(1+b)^{-\wedge} = \sum_k(-1)^l b^{\wedge l}$ формулой

$$(1+a)^{-\wedge}\bullet(1+b)^{-\wedge} := ((1+a)(1+b))^{-\wedge} = (1+a+b+ab)^{-\wedge} = \sum(-1)^q(a+b+ab)^q.$$

Можно доказать, что данная операция ассоциативна, но не дистрибутивна.

Эквивалентным способом эта операция определяется следующим образом. Определим $a^{\wedge k}\bullet b^{\wedge l}$ по следующему комбинаторному правилу. Сначала $k+l$ позиций всеми возможными способами разбиваем на три группы, содержащие r_1, r_2, r_3 элементов, при этом требуем, чтобы $r_1+r_3 = k$, $r_2+r_3 = l$. На местах из первой группы пишем элемент $c_i = a$, на местах из второй группы пишем

элемент $c_i = b$, на местах из третьей группы пишем элемент $c_i = ab$. После этого берем произведение $c_1 \wedge \cdots \wedge c_{k+l}$ и суммируем такие произведения по всем разбиениям $k+l$ позиций.

После этого определяем произведение рядов $\sum_k a^{\wedge k} \bullet \sum_l b^{\wedge l}$ по формуле $\sum_{k,l} a^{\wedge k} \bullet b^{\wedge^l}$.

Это определение эквивалентно прежнему, так как по построению $a^{\wedge k} \bullet b^{\wedge l}$ есть сумма тех слагаемых из $(a+b+ab)^{\wedge(k+l)}$, что содержат ровно k символов a и l символов b (в том числе и в произведениях ab). Значит, $\sum_{kl} a^{\wedge k} \bullet b^{\wedge l} = \sum_r (a+b+ab)^r$, что и требовалось доказать.

Из определения следует, что $(RT_1^{-\wedge} R^t T_2^{-\wedge})^{-\wedge} = R^{-\wedge} \bullet T_1 \bullet (R^t)^{-\wedge} \bullet T_2$. Аналогично, имеем $(T_2^{-\wedge} R^t T_1^{-\wedge} K)^{-\wedge} = T_2 \bullet (R^t)^{-\wedge} \bullet T_1 \bullet R^{-\wedge}$.

Введем обозначения

$$\mathcal{R}(z) = R(z)^{-\wedge} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e_{ij} \otimes e_{ji}}{z^k} \right)^{\wedge k}, \qquad \mathcal{R}^t(z) = (R^t(z))^{-\wedge} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e_{ij} \otimes e_{ij}}{z^k} \right)^{\wedge k}.$$

Теорема 4. *Во веденных обозначениях выполнено соотношение*

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}(u-v) \bullet T_1\left(u+\frac{1}{2}\right) \bullet (\mathcal{R}^t(-u-v)) \bullet T_2\left(v+\frac{1}{2}\right) \\ &\quad = T_2\left(v+\frac{1}{2}\right) \bullet (\mathcal{R}^t(-u-v)) \bullet T_1\left(u+\frac{1}{2}\right) \bullet \mathcal{R}(u-v). \end{aligned}$$

1.5. Коумножение пфаффианов и формула суммирования миноров. В этом пункте выводятся формула для коумножения пфаффианов и формула суммирования миноров.

Прежде всего рассмотрим результат применения операции коумножения в универсальной обертывающей алгебре к пфаффианам. Для определенности сделаем это в кососимметрической реализации.

Лемма 1. *Справедлива следующая формула*:

$$\Delta \operatorname{Pf} F_I = \sum_{I' \subset I} (-1)^{(I', I \setminus I')} \operatorname{Pf} F_{I'} \otimes \operatorname{Pf} F_{I \setminus I'}.$$

Доказательство. Суммирование идет по неупорядоченным подмножествам $I' \subset I$, при построении $\operatorname{Pf} F_{I'}$, $\operatorname{Pf} F_{I \setminus I'}$ порядок на подмножествах I', $I \setminus I'$ индуцируется с I. Здесь $(-1)^{(I', I \setminus I')}$ есть знак перестановки множества I, при которой сначала записываются все элементы I' в порядке, индуцированном с I, а затем все элементы $I \setminus I'$ в порядке, индуцированном с I.

Вывод этой формулы основан на выполнении двух процедур в различном порядке.

Имеем

$$\Delta \operatorname{Pf} F_I = \Delta \sum_{p \in P} (-1)^p F_{p_1,p_2} F_{p_3,p_4} \cdots F_{p_{k-1}p_k},$$

где $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$.

Эта формула предписывает вычислять $\Delta \operatorname{Pf} F_I$ так. Первая процедура состоит в разбиении p множества I на пары $(p_1, p_2), \ldots, (p_{k-1}p_k)$, порядок пар не важен.

Вторая процедура состоит в вычислении для выбранного разбиения на пары коумножения произведения $F_{p_1,p_2}F_{p_3,p_4}\cdots F_{p_{k-1}p_k}$. Это делается так. Сомножители $F_{p_ip_{i+1}}$ этого произведения всевозможными способами разбиваются на две группы. Для каждого фиксированного разбиения сомножители из первой группы ставятся справа от знака тензорного произведения, а сомножители второй группы – слева, затем проводится суммирование по всем возможным разбиениям. Видно, что эта процедура эквивалентна некоторому разбиению множества I на 2 подмножества с четным числом элементов.

Наконец, для получения $\Delta\operatorname{Pf}F_I$ суммируются результаты коумножения всех произведений $F_{p_1,p_2}F_{p_3,p_4}\cdots F_{p_{k-1}p_k}$.

Для получения желаемой формулы

$$\Delta\operatorname{Pf}F_I=\sum_{I'\subset I}(-1)^{(I',I\setminus I')}\operatorname{Pf}F_{I'}\otimes\operatorname{Pf}F_{I\setminus I'}$$

меняем местами порядок действий.

Первая процедура в этом случае состоит в разбиении множества индексов I на 2 группы $I'=\{i_{t_1},\dots,i_{t_s}\}$ и $I\setminus I'$ с четным числом элементов (обратите внимание, что выше эта процедура выполнялась во вторую очередь).

Вторая процедура состоит в разбиении p^1, p^2 множеств I' и $I\setminus I'$ на пары. Заметим, что разбиения на пары p^1, p^2 множеств I' и $I\setminus I'$ задают разбиение на пары p множества I. При этом

$$(-1)^p=(-1)^{p^1}(-1)^{p^2}(-1)^{(I',I\setminus I')}.$$

После выполнения процедур образуем произведения $(-1)^{p^1}F_{p_1^1p_2^1}\cdots F_{p_{s-1}^1p_s^1}$ и $(-1)^{p^2}F_{p_1^2p_2^2}\cdots F_{p_{k-s-1}^2p_{k-s}^2}$. Суммируем сначала по всевозможным разбиениям на пары, а затем по разбиениям индексов на 2 группы со знаком $(-1)^{(I',I\setminus I')}$.

Так что при таком порядке выполнения процедур $\Delta\operatorname{Pf}F_I$ превращается в

$$\sum_{I'\subset I}(-1)^{(I',I\setminus I')}\operatorname{Pf}F_{I'}\otimes\operatorname{Pf}F_{I\setminus I'},$$

что и требовалось.

Теперь докажем формулу суммирования миноров.

Лемма 2. *Имеет место формула*

$$\operatorname{Pf}F_I=\frac{(p/2)!\,(q/2)!}{(k/2)!}\sum_{I=I'\sqcup I'',\,|I'|=p,\,|I''|=q}(-1)^{(I'I'')}\operatorname{Pf}F_{I'}\operatorname{Pf}F_{I''}.$$

Здесь $(-1)^{(I'I'')}$ – знак перестановки множества $I=\{i_1,\dots,i_k\}$, которая вначале ставит подмножество $I'\subset I$, а затем подмножество $I''\subset I$.

Числа p, q, k четные и удовлетворяют соотношению $p+q=k=|I|$.

Доказательство. Согласно определению имеем

$$\operatorname{Pf}F_I=\frac{1}{2^{k/2}(k/2)!}\sum_{\sigma\in S_k}(-1)^{\sigma}F_{-\sigma(i_1)\sigma(i_2)}\cdots F_{-\sigma(i_{k-1}),\sigma(i_k)}.$$

Слагаемое $(-1)^{\sigma} F_{-\sigma(i_1)\sigma(i_2)} \cdots F_{-\sigma(i_{k-1}),\sigma(i_k)}$ может быть записано как

$$(-1)^{(I'I'')}(-1)^{\sigma'} F_{-\sigma'(i'_1)\sigma'(i'_2)} \cdots F_{-\sigma'(i'_{p-1}),\sigma'(i'_p)} \\ \times (-1)^{\sigma''} F_{-\sigma''(i''_1)\sigma''(i''_2)} \cdots F_{-\sigma''(i''_{q-1}),\sigma''(i''_q)}.$$

Здесь $I' = \{i'_1, \dots, i'_p\}$ есть множество индексов $\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_p)$, записанное в естественном порядке, $I'' = \{i''_1, \dots, i''_q\}$ есть множество индексов $\sigma(i_{p+1}), \dots, \sigma(i_k)$, записанное в естественном порядке, σ' есть перестановка $\{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_p)\}$ множества I', а σ'' – перестановка I'', определяемая аналогичным способом. Отметим, что

$$(-1)^{(I'I'')}(-1)^{\sigma'}(-1)^{\sigma''} = (-1)^{\sigma}.$$

Отображение $\sigma \mapsto I', I'', \sigma', \sigma''$ инъективно.

Таким образом, пфаффиан может быть записан так:

$$\frac{(p/2)!\,(q/2)!}{(k/2)!} \sum_{I=I'\sqcup I'',\, |I'|=p,\, |I''|=q} (-1)^{(I'I'')} \frac{1}{2^{k/2}(p/2)!\,(q/2)!} \sum_{\sigma'} (-1)^{\sigma'}(-1)^{\sigma''} \\ \times F_{-\sigma'(i'_1)\sigma'(i'_2)} \cdots F_{-\sigma'(i'_{p-1}),\sigma'(i'_p)} F_{-\sigma''(i''_1)\sigma'(i''_2)} \cdots F_{-\sigma''(i''_{q-1}),\sigma''(i''_q)} \\ = \frac{(p/2)!\,(q/2)!}{(k/2)!} \sum_{I=I'\sqcup I'',\, |I'|=p,\, |I''|=q} (-1)^{(I'I'')} \operatorname{Pf} F_{I'} \operatorname{Pf} F_{I''}.$$

1.6. Связь между пфаффианами кососимметрической и расщепленной реализаций $\mathfrak{o}_N$. В этом пункте удобно обозначать элементы ортогональной алгебры прописными буквами.

Пусть e_{ij} – матричные единицы, $f_{ij} = e_{ij} - e_{ji}$ – образующие ортогональной алгебры в кососимметрической реализации, а $\widetilde{f}_{ij} = e_{ij} - e_{-j-i}$ – образующие ортогональной алгебры в расщепленной реализации. Из этих элементов были составлены матрицы $\widetilde{F} = (\widetilde{f}_{ij})$ и $F = (f_{ij})$.

Цель этого пункта – установить связь между пфаффианами этих матриц.

Будем считать, что в обеих реализациях строки и столбцы матриц, составляющих $\mathfrak{o}_N$, занумерованы числами $\{-n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n\}$, где $n = (N-1)/2$. В случае четного N строки и столбцы матрицы f занумеруем числами $\{-n, \dots, -1, 1, \dots, n\}$, где $n = N/2$.

Эти две реализации изоморфны. Действительно, обозначим через $v_{-n}, \dots, v_n$ базис, в котором квадратичная форма G, соответствующая расщепленной реализации, превращается в единичную. Пусть T – матрица перехода к этому базису. Бесконечно малое преобразование $\widetilde{f}$, сохраняющее форму G, перейдет в бесконечно малое преобразование $f = T^{-1}\widetilde{f}T$, сохраняющее форму с единичной матрицей E.

Таким образом, изоморфизм, отображающий матрицу $\widetilde{f} \in \mathfrak{o}_N$ в расщепленной реализации в матрицу в кососимметрической реализации, задается формулой $\widetilde{f} \mapsto f = T^{-1}\widetilde{f}T$. В обратную сторону изоморфизм задается формулой $f \mapsto \widetilde{f} = TfT^{-1}$.

Матрица T перехода дает равенство $T^t G T = E$ или $G = (T^t)^{-1}T^{-1}$. Поэтому $T^{-1} = T^t G$.

В явном виде матрицы T, T^{-1} таковы:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dots & 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \dots & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \dots & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dots & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & \dots & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \dots & 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

В случае, когда размерность нечетна, в нулевой строке на месте 00 стоит 1, а на оставшихся местах – нули.

Сформулируем утверждение о связи матриц F, $\widetilde{F}$. Используя описание матриц T и T^{-1}, получаем теорему.

Теорема 5. *Построенный выше изоморфизм между расщепленной и кососимметрическими реализациями задает между матрицами F, $\widetilde{F}$ следующее соотношение*:

$$\widetilde{F} = \frac{1}{2}GTFT^t - \frac{1}{2}TFT^tG.$$

Доказательство. Как было установлено, в кососимметрической реализации матрице $\widetilde{f}_{ij}$ соответствует матрица $T^{-1}\widetilde{f}_{ij}T$. Ее матричный элемент с индексами k, l таков:

$$(T^{-1}\widetilde{f}_{ij}T)_{kl} = (T^{-1})_{ki}T_{jl} - (T^{-1})_{k-j}T_{-il}.$$

Так как $T^{-1} = T^tG$, то

$$(T^{-1})_{ki} = (T^tG)_{ki} = T^t_{k-i} = T_{-ik},$$

здесь подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Аналогично $(T^{-1})_{k-j} = T_{jk}$.

Таким образом, имеем

$$(T^{-1}\widetilde{f}_{ij}T)_{kl} = T_{-ik}T_{jl} - T_{jk}T_{-il}.$$

Следовательно,

$$T^{-1}\widetilde{f}_{ij}T = \frac{1}{2}\sum_{kl}(T_{-ik}T_{jl} - T_{jk}T_{-il})f_{kl}.$$

Матрица

$$\widetilde{F} = (\widetilde{f}_{ij}) = \left(\frac{1}{2}\sum_{kl}(T_{-ik}f_{kl}T_{jl} - T_{jk}f_{kl}T_{-il})\right)$$

с матрицей $F = (f_{ij})$ связана соотношением

$$\widetilde{F} = \frac{1}{2}GTFT^t - \frac{1}{2}TFT^tG.$$

Матрица $\widetilde{F}$ не является кососимметрической. Пфаффианы, соответствующие расщепленной реализации – это пфаффианы кососимметрической матрицы

$$G\widetilde{F} = \frac{1}{2}TFT^t - \frac{1}{2}GTFT^tG = \frac{1}{2}TFT^t - \frac{1}{2}QFQ^t,$$

где $Q = GT$.

Матрица Q может быть явно выписана:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \dots & 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & \dots & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

При этом в случае, когда размерность нечетна, в нулевой строке на месте 00 стоит 1, а на оставшихся местах – нули.

Установим связь между пфаффианами матриц F и QFQ^t. Пусть $Q^{i_{j_1},\dots,i_{j_{2t}}}_{\alpha_1,\dots,\alpha_{2t}}$ есть подматрица матрицы Q, полученная на пересечении строк с номерами $i_{j_1},\dots,i_{j_{2t}}$ и столбцов с номерами $\alpha_1,\dots,\alpha_{2t}$.

Предложение 4. *Имеет место формула*

$$\operatorname{Pf}(QFQ^t)_{i_1,\dots,i_k} = \sum_{\alpha_1<\dots<\alpha_k} \det Q^{i_1,\dots,i_k}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k} \operatorname{Pf} F_{\alpha_1,\dots,\alpha_k},$$

где k предполагается четным.

В этой формуле подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

Доказательство. Снова рассмотрим элемент $\Theta = \sum_{ij=-n}^{n} e_i\wedge e_j F_{ij}$. Тогда (напоминаем, что k четно)

$$\Theta^{\wedge k/2} = \sum_{I=\{i_1<\dots<i_k\}\subset\{-n,\dots,n\}} 2^{k/2}\left(\frac{k}{2}\right)!\; e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_k} \operatorname{Pf} F_I.$$

При этом суммирование ведется по всем неупорядоченным подмножествам I, но мы явно пишем порядок $i_1<\dots<i_k$ на его элементах, индуцированный с множества $\{-n,\dots,n\}$.

Так как пфаффиан, так же как и внешнее произведение $e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_k}$, есть кососимметрическая функция упорядоченного множества $I=\{i_1,\dots,i_k\}$, то суммирование $\sum_{I=\{i_1<\dots<i_k\}\subset\{-n,\dots,n\}}$ можно дополнить суммированием по всем порядкам на множестве I, поделив после этого результат на $k!$.

Это означает, что суммирование $\sum_{I=\{i_1<\dots<i_k\}\subset\{-n,\dots,n\}}$ по всем неупорядоченным подмножествам можно заменить операцией $\sum_{I=\{i_1,\dots,i_k\}\subset\{-n,\dots,n\}} 1/k!$, где суммирование идет по всем упорядоченным подмножествам, т.е. по всевозможным подмножествам с всевозможными порядками на них.

Получаем

$$\Theta^{\wedge k/2} = \sum_{I=\{i_1,\dots,i_k\}\subset\{-n,\dots,n\}} 2^{k/2}\frac{1}{k!}\left(\frac{k}{2}\right)!\; e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_k} \operatorname{Pf} F_I.$$

Соответственно,

$$\widetilde{\Theta} = \sum_{ij} e_i\wedge e_j((QFQ^t)_{ij}) = \sum_{ij} e_i\wedge e_j q_{i\alpha}q_{j\beta}F_{\alpha\beta}.$$

Если ввести элементы $\widetilde{e}_\alpha = e_i q_{i\alpha}$, то получим $\widetilde{\Theta} = \sum_{\alpha\beta}\widetilde{e}_\alpha\wedge\widetilde{e}_\beta F_{\alpha\beta}$.

Таким образом,

$$\begin{aligned}\widetilde{\Theta}^{\wedge k/2} &= \sum_{I=\{i_1,\dots,i_k\}\subset\{-n,\dots,n\}} 2^{k/2}\frac{1}{k!}\left(\frac{k}{2}\right)!\; e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_k} \operatorname{Pf}(QFQ^t)_I\\ &= \sum_{J=\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}\subset\{-n,\dots,n\}} 2^{k/2}\frac{1}{k!}\left(\frac{k}{2}\right)!\; \widetilde{e}_{\alpha_1}\wedge\dots\wedge\widetilde{e}_{\alpha_k} \operatorname{Pf} F_J.\end{aligned}$$

Суммирование в обоих случаях идет по упорядоченным подмножествам.

В силу равенства $\widetilde{e}_\alpha = e_i q_{i\alpha}$ получаем

$$\widetilde{e}_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \widetilde{e}_{\alpha_k} = q_{i_1\alpha_1} \cdots q_{i_k\alpha_k} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\operatorname{Pf}(QFQ^t)_{i_1,\dots,i_k} = q_{i_1\alpha_1} \cdots q_{i_k\alpha_k} \operatorname{Pf} F_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}.$$

Заметим, что для перестановки σ множества $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ пфаффиан меняет знак. Поэтому суммирование по всем возможным наборам $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ можно вести сначала по всем упорядоченным наборам $\{\alpha_1 < \dots < \alpha_k\}$ и всем перестановкам множества $\{1, \dots, k\}$.

Выполняя суммирование $\sum_\sigma (-1)^\sigma q_{i_1\alpha_1} \cdots q_{i_k\alpha_k}$, приходим к анонсированной формуле.

В дальнейшем будет использоваться произведение с перетасовками. Напомним его определение. Пусть $\mathbb{C}\langle A\rangle$ – свободная ассоциативная алгебра. Индуктивно определим произведение с перетасовками $\star$ формулой $au \star bv = a(u \star bv) + b(au \star v)$, где $a, b \in A$, а $u, v \in A^*$ – слова.

Пфаффиан был определен как элемент $U(\mathfrak{o}_N)$. На самом деле имеющееся определение пфаффиана задает элемент $\mathbb{C}\langle F_{ij}\rangle$, поэтому можно говорить о произведениях пфаффианов с перетасовками.

Сделаем важное замечание.

Предложение 5. *Пусть имеется матрица* Φ *размера* $2n \times 2n$, *матричные элементы которой – линейные комбинации букв в алфавите* A. *Тогда обычный некоммутативный пфаффиан* $\operatorname{Pf}\Phi$ *и пфаффиан* $\operatorname{Pf}^\star \Phi$, *вычисленный с помощью произведения в перетасовками связаны соотношением* $\operatorname{Pf}\Phi = 1/n!\, \operatorname{Pf}^\star \Phi$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что если $a_1, \dots, a_n$ – линейные комбинации букв в алфавите A, то индукцией по n доказывается, что

$$a_1 \star \dots \star a_n = \sum_{\delta \in S_n} a_{\delta(1)} \cdots a_{\delta(n)},$$

суммирование берется по всем перестановкам δ множества $\{1, \dots, n\}$. Следовательно, произведение с перетасовками $(-1)^\sigma \Phi_{\sigma(1)\sigma(2)} \star \dots \star \Phi_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)}$ есть сумма $n!$ различных произведений вида $(-1)^{\sigma_i} \Phi_{\sigma_i(1)\sigma_i(2)} \cdots \Phi_{\sigma_i(2n-1)\sigma_i(2n)}$, при этом все перестановки σ_i имеют тот же знак, что и σ. Суммируя по всем перестановкам σ, получаем, что $\operatorname{Pf}^\star \Phi = n!\, \operatorname{Pf}\Phi$.

Напомним, что имеется формула для пфаффиана суммы [10]. Для пфаффианов матриц порядка k, вычисленных с помощью произведения с перетасовками, она записывается так:

$$\operatorname{Pf}^\star(A+B) = \sum_{t=0}^{k/2} \sum_{J=\{j_1,\dots,j_{2t}\}} (-1)^{\|J\|-t} \operatorname{Pf}^\star(A_J) \star \operatorname{Pf}^\star(B_{J_c}).$$

Возвращаясь к пфаффианам, вычисленным с помощью обычного произведения, получаем формулу

$$\operatorname{Pf}(A+B) = \sum_{t=0}^{k/2} \frac{(k/2)!}{t!\,(t-k/2)!} \sum_{J=\{j_1,\dots,j_{2t}\}} (-1)^{\|J\|-t} \operatorname{Pf}(A_J) \star \operatorname{Pf}(B_{J_c}).$$

Здесь $\|J\| = j_1 + \dots + j_{2t}$, а $J_c = \{1, \dots, k\} \setminus J$, суммирование идет по неупорядоченным подмножествам.

Применим ее для $A = (\frac{1}{2}TFT^t)_I$, $B = (-\frac{1}{2}QFQ^t)_I$, $I = \{i_1, \dots, i_k\}$. В этом случае $J = \{i_{j_1}, \dots, i_{j_{2t}}\}$ есть подмножество I и $\|J\| = j_1 + \dots + j_{2t}$. Кроме того, пфаффиан матрицы $B_{J_c} = (-\frac{1}{2}QFQ^t)_{I\setminus J}$ связан с пфаффианом матрицы $(\frac{1}{2}QFQ^t)_{I\setminus J}$ умножением на $(-1)^{(k-2t)/2}$.

С учетом предложения 4 получаем следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{-n, \dots, n\}$ – упорядоченное множество. Тогда*

$$\operatorname{Pf} \widetilde{F}_I = \sum_{t=0}^{k/2} \frac{(k/2)!}{2^{k/2} t!\,(t-k/2)!} \sum_{I=\{i_{j_1},\dots,i_{j_{2t}}\}\sqcup\{i_{r_1},\dots,i_{r_{k-2t}}\}} (-1)^{\|J\|+k/2}$$
$$\times \sum_{\alpha_1<\dots<\alpha_t} \sum_{\beta_1<\dots<\beta_{k-2t}} \operatorname{Pf}(F_{\alpha_1,\dots,\alpha_{2t}}) \star \operatorname{Pf}(F_{\beta_1,\dots,\beta_{k-2t}})$$
$$\times \det T^{\{i_{j_1},\dots,i_{j_{2t}}\}}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k} \det Q^{i_{r_1},\dots,i_{r_{k-2t}}}_{\beta_1,\dots,\beta_{k-2t}}.$$

При этом $\|J\| = j_1 + \dots + j_{2t}$.

Используя правила вычисления определителей (разложения по минорам), показываем, что

$$\sum_{I=\{i_{j_1},\dots,i_{j_{2t}}\}\sqcup\{i_{r_1},\dots,i_{r_{k-2t}}\}} (-1)^{\|J\|+k/2} \det T^{i_{j_1},\dots,i_{j_{2t}}}_{\alpha_1,\dots,\alpha_{2t}} \det Q^{i_{r_1},\dots,i_{r_{k-2t}}}_{\beta_1,\dots,\beta_{k-2t}}$$
$$= (-1)^{k/2+\|\alpha\|} \det TQ^I_{\alpha_1,\dots,\alpha_{2t}|\beta_1,\dots,\beta_{k-2t}}.$$

Справа написан детерминант матрицы, получаемой так. Выбираем столбцы матрицы T с номерами $\alpha_1, \dots, \alpha_{2t}$ и столбцы матрицы Q с номерами $\beta_1, \dots, \beta_{k-2t}$. Затем в полученной матрице выбираем строки с номерами из множества I.

При этом $\|\alpha\| = 1 + \dots + 2t = t \mod 2$. Здесь $\|\alpha\|$ есть сумма номеров строк, относящихся к матрице T.

Итак, доказана

Теорема 6. *Имеет место формула*

$$\operatorname{Pf} \widetilde{F}_I = \sum_{t=0}^{k/2} \frac{(k/2)!}{2^{k/2} t!\,(t-k/2)!} \sum_{\alpha_1<\dots<\alpha_{2t},\,\beta_1<\dots<\beta_{k-2t}} (-1)^{t+k/2}$$
$$\times \operatorname{Pf}(F_{\alpha_1\cdots\alpha_{2t}}) \star \operatorname{Pf}(F_{\beta_1\cdots\beta_{k-2t}}) \det TQ^I_{\alpha_1,\dots,\alpha_{2t}|\beta_1,\dots,\beta_{k-2t}}.$$

§ 2. Действие пфаффианов в тензорных представлениях

Чтобы построить интегрируемое уравнение типа Книжника–Замолодчикова, нам понадобится исследовать действие пфаффианов в тензорных представления ортогональной алгебры.

Мы сделаем это последовательно. Сначала будет выяснено действие пфаффиана $\operatorname{Pf} F_I$ при $|I| = k$ на векторах e_r стандартного представления, затем на

тензорах $e_{r_2} \otimes e_{r_4} \cdots \otimes e_{r_t}$ для $t < k/2$. Затем будет разобран случай $t = k/2$ и, наконец, произвольный случай $t > k/2$. Из полученных формул будет выведена формула действия пфаффиана на бесследовых тензорах v_T, задаваемых таблицами Юнга T.

Начнем с явного вычисления действия пфаффианов на векторах стандартного представления $\mathfrak{o}_N$.

Предложение 6. *На векторы стандартного представления $\mathfrak{o}_5$ пфаффианы $\operatorname{Pf} F_I$ при $|I| = 4$ действуют как нулевые операторы.*

Доказательство. Предложение доказывается непосредственными вычислениями с учетом того, что

$$\operatorname{Pf} F_{\widehat{5}} = F_{21}F_{43} - F_{31}F_{42} + F_{41}F_{32}, \qquad \operatorname{Pf} F_{\widehat{4}} = F_{21}F_{53} - F_{31}F_{52} + F_{51}F_{32},$$
$$\operatorname{Pf} F_{\widehat{3}} = F_{21}F_{54} - F_{41}F_{52} + F_{51}F_{42}, \qquad \operatorname{Pf} F_{\widehat{2}} = F_{31}F_{54} - F_{41}F_{53} + F_{51}F_{43},$$
$$\operatorname{Pf} F_{\widehat{1}} = F_{32}F_{54} - F_{42}F_{53} + F_{52}F_{43}.$$

Теперь докажем аналогичное утверждение в произвольной размерности.

Предложение 7. *На векторы стандартного представления $\mathfrak{o}_N$ пфаффианы $\operatorname{Pf} F_I$ при $|I| > 2$ действуют как нулевые операторы.*

Доказательство. Имеется равенство (см. лемму 2 для $q = 4$, $p = k - 4$)

$$\operatorname{Pf} F_I e_j = \sum_{I' \sqcup I'' = I,\, |I'| = k-4,\, |I''| = 4} \frac{(p/2)!\,(q/2)!}{(k/2)!} (-1)^{(I'I'')} \operatorname{Pf} F_{I'} \operatorname{Pf} F_{I''} e_j.$$

Если $j \notin I''$, то по очевидным соображениям $\operatorname{Pf} F_{I''} e_j = 0$. Если же $j \in I''$, то в силу предложения 7 $\operatorname{Pf} F_{I''} e_j = 0$.

Предложение 8. *Имеет место равенство $\operatorname{Pf} F_I e_{r_2} \otimes e_{r_4} \otimes \cdots \otimes e_{r_t} = 0$ при $t < k$.*

Доказательство. По определению имеем

$$\operatorname{Pf} F_I e_{r_2} \otimes \cdots \otimes e_{r_k} = (\Delta^k \operatorname{Pf} F_I) e_{r_2} \otimes \cdots \otimes e_{r_k}.$$

Так как $t < k$, то коумножение $\Delta^k \operatorname{Pf} F_I$ содержит лишь слагаемые, в которых на некотором месте стоит пфаффиан, соответствующий множеству индексов I, для которого $|I| \geqslant 4$ (см. формулу для коумножения в лемме 1). Вклад такого слагаемого нулевой, что следует из предложения 7.

Теперь найдем действие пфаффиана порядка k на тензорное произведение порядка $k/2$, а именно на произведение $e_{r_2} \otimes e_{r_4} \otimes \cdots \otimes e_{r_k}$.

Предложение 9. *Если $\{r_2, r_4, \ldots, r_k\}$ не содержится в I, $|I| = k$, то*

$$\operatorname{Pf} F_I e_{r_2} \otimes e_{r_4} \otimes \cdots \otimes e_{r_k} = 0.$$

В противном случае выберем перестановку γ множества I такую, что $(\gamma(i_1), \ldots, \gamma(i_k)) = (r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{k-1}, r_k)$. Тогда

$$\operatorname{Pf} F_I e_{r_2} \otimes \cdots \otimes e_{r_k} = (-1)^{\gamma} (-1)^{k(k-1)/2}$$
$$\times \sum_{\delta \in \operatorname{Aut}(r_1, r_3, \ldots, r_{k-3}, r_{k-1})} (-1)^{\delta} e_{\delta(r_1)} \otimes e_{\delta(r_3)} \otimes \cdots \otimes e_{\delta(r_{k-3})} \otimes e_{\delta(r_{k-1})}.$$

Доказательство. Согласно определению имеем

$$\operatorname{Pf} F_I e_{r_2} \otimes \cdots \otimes e_{r_k} = (\Delta^k \operatorname{Pf} F_I) e_{r_2} \otimes \cdots \otimes e_{r_k}.$$

Применяя многократно формулу для коумножения пфаффиана, получаем

$$\Delta^{k/2} \operatorname{Pf} F_I = \sum_{I = I^1 \sqcup \cdots \sqcup I^k} (-1)^{(I^1 \cdots I^k)} \operatorname{Pf} F_{I^1} \otimes \cdots \otimes \operatorname{Pf} F_{I^k}.$$

Используя предложение 8, получаем, что только те слагаемые, для которых $|I^j| = 2$, $j = 1, \ldots, k$, являются ненулевыми операторами.

Суммирование по разбиениям можно записать по формуле

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Pf} F_I e_{r_2} \otimes \cdots \otimes e_{r_k} \\
&\quad = \frac{1}{2^{k/2}} \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma F_{\sigma(i_1)\sigma(i_2)} \otimes \cdots \otimes F_{\sigma(i_{k-1})\sigma(i_k)} (e_{r_2} \otimes \cdots \otimes e_{r_k}) \\
&\quad = \frac{1}{2^{k/2}} \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma F_{\sigma(i_1)\sigma(i_2)} e_{r_2} \otimes \cdots \otimes F_{\sigma(i_{k-1})\sigma(i_k)} e_{r_k}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим выражение $F_{\sigma(i_1)\sigma(i_2)} e_{r_2}$. Это есть $e_{\sigma(i_1)}$, если $\sigma(i_2) = r_2$, или $e_{\sigma(i_2)}$, если $\sigma(i_1) = r_2$, в остальных случаях это нуль. Таким образом, слагаемое ненулевое тогда и только тогда, когда σ удовлетворяет следующему условию. В каждой паре $(\sigma(i_{2t-1}), \sigma(i_{2t}))$ либо $\sigma(i_{2t-1}) = r_{2t}$, либо $\sigma(i_{2t}) = r_{2t}$.

Покажем, что можно рассматривать перестановки σ такие, что $\sigma(i_{2t}) = r_{2t}$, т.е. перестановки вида $(\sigma(i_1), r_2, \sigma(i_2), r_3, \ldots, \sigma(i_{k-1}), r_k)$. Но при этом одновременно необходимо умножить получившуюся сумму на $2^{k/2}$.

Достаточно доказать, что перестановки $\sigma = (\sigma(i_1), \sigma(i_2) = r_2, \sigma(i_3) \ldots, \sigma(r_k))$ и $\sigma' = (\sigma(i_2) = r_2, \sigma(i_1), \sigma(i_3) \ldots, \sigma(r_k))$ дают одинаковый вклад.

Напомним, что вклад σ есть

$$(-1)^\sigma F_{\sigma(i_1)\sigma(i_2)} e_{r_2} \otimes \cdots \otimes F_{\sigma(i_{k-1})\sigma(i_k)} e_{r_k}.$$

С одной стороны, имеем $F_{\sigma(i_1)\sigma(i_2)} e_{r_2} = e_{\sigma(i_1)}$, а с другой – $F_{\sigma'(i_1)\sigma'(i_2)} e_{r_2} = -e_{\sigma'(i_2)} = -e_{\sigma(i_1)}$. Одновременно $(-1)^\sigma = -(-1)^{\sigma'}$. Таким образом, вклады σ и σ' одинаковы.

Значит, можно рассматривать перестановки σ вида $(\sigma(i_1), r_2, \sigma(i_2), r_3, \ldots, \sigma(i_{k-1}), r_{k-1})$, умножая полученную сумму на $2^{k/2}$.

Для перестановки σ вида $(\sigma(i_1), r_2, \sigma(i_2), r_3, \ldots, \sigma(i_{k-1}), r_k)$, используя определение γ, получаем

$$\begin{aligned}
&(-1)^\sigma F_{\sigma(i_1)\sigma(i_2)} e_{r_2} \otimes \cdots \otimes F_{\sigma(i_{k-1})\sigma(i_k)} e_{r_k} \\
&\quad = (-1)^{(\sigma(i_1), r_2, \ldots, \sigma(i_{k-1}), r_k)} e_{\sigma(i_1)} \otimes e_{\sigma(i_3)} \otimes \cdots \otimes e_{\sigma(i_k)} \\
&\quad = (-1)^{k(k-1)/2} (-1)^\gamma (-1)^\delta e_{\delta(r_1)} \otimes \cdots \otimes e_{\delta(r_{k-1})}.
\end{aligned}$$

Здесь δ есть перестановка множества $\{r_1, r_3, \ldots, r_{k-3}, r_k\}$. Имеет место равенство $(-1)^{k(k-1)/2}(-1)^\delta(-1)^\gamma = (-1)^\sigma$.

Суммируя по всем перестановкам δ, получаем

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Pf} F_I e_{r_2} \otimes e_{r_4} \otimes \cdots \otimes e_{r_k} \\
&\quad = (-1)^{k(k-1)/2} (-1)^\gamma \sum_{\delta \in \operatorname{Aut}(r_1, \ldots, r_{k-1})} (-1)^\delta e_{\delta(r_1)} \otimes \cdots \otimes e_{\delta(r_{k-1})}.
\end{aligned}$$

Наконец, исходя из формулы $\operatorname{Pf} \widetilde{F}_I e_{r_2} \otimes \cdots \otimes e_{r_t} = (\Delta^t \operatorname{Pf} \widetilde{F}_I) e_{r_2} \otimes \cdots \otimes e_{r_t}$, рассуждая так же, как при доказательстве предложения 9, получаем формулу действия пфаффиана на произвольный тензор $e_{r_2} \otimes \cdots \otimes e_{r_t}$.

Предложение 10. *Имеет место равенство*

$$\operatorname{Pf} F_I e_{r_2} \otimes e_{r_4} \otimes \cdots \otimes e_{r_t} = \sum_{\{j_2, j_4, \ldots, j_k\} \subset \{2, 4, \ldots, t\}} \operatorname{Pf}^{j_2, j_4, \ldots, j_t} F_I e_{r_2} \otimes e_{r_4} \otimes \cdots \otimes e_{r_t}.$$

Здесь $\operatorname{Pf}^{j_2, j_4, \ldots, j_k} F_I$ *действует только на сомножители с номерами* $j_2, j_4, \ldots, j_k$. *При этом действие описывается предложением* 9.

Известно, что неприводимые тензорные представления ортогональной алгебры задаются диаграммами Юнга. При этом таблице Юнга T соответствует вектор представления v_T, получающийся из тензорного произведения векторов e_{t_i}, соответствующих числам в таблице Юнга, применением симметризатора Юнга и взятием проекции на пространство бесследовых тензоров. Отметим, что для того чтобы получить независимые векторы, нужно ограничиться рассмотрением так называемых ортогональных таблиц Юнга.

Выясним, как пфаффиан $\operatorname{Pf} F_I$ действует на базисный тензор v_T.

Согласно определению v_T действие $\operatorname{Pf} F_I$ происходит так. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ – диаграмма Юнга, лежащая в основе T, $m = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$. Места в диаграмме занумерованы числами $1, \ldots, m$, в таблице T на месте i стоит t_i.

1. К тензорному произведению $e_{t_1} \otimes \cdots \otimes e_{t_m}$ применяется симметризатор Юнга c_λ.
2. Применяется проекция P на пространство бесследовых тензоров.
3. Применяется пфаффиан $\operatorname{Pf} F_I$.

Поменяем порядок выполнения операций.

Так как симметризатор и проекция коммутируют с действием ортогональной алгебры, то можно сначала применить пфаффиан, затем симметризатор и проекцию.

Используя предложение 10, получаем следующую теорему.

Теорема 7. *Образ* $\operatorname{Pf} F_I v_T$ *вычисляется по следующему правилу.*

1. *Всеми возможными способами в таблице* T *выбираются* $k/2$ *мест такие, что на них стоят различные индексы* $r_2, r_4, \ldots, r_k \in I$. *Если это невозможно, то образ нулевой.*
2. *Находится перестановка* γ *множества* I *такая, что* $(\gamma(i_1), \ldots, \gamma(i_k)) = (r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots, r_{k-1}, r_k)$.
3. *Индексы на найденных местах заменяются всевозможными способами на индексы* $r_1, r_3, \ldots, r_{k-1}$.
4. *Берется альтернированная сумма* $\sum \pm T'$ *таблиц, получаемых всевозможными вставками индексов* $r_1, r_3, \ldots, r_{k-1}$ *на выбранные места. Места, на которые производится вставка, упорядочены и знак определяется порядком вставки* $r_1, r_3, \ldots, r_{k-1}$ *на эти места.*
5. *Полученная сумма умножается на* $(-1)^\gamma (-1)^{k(k-1)/2}$.
6. *По каждой полученной таблице* T' *строится тензор* $v_{T'}$.
7. *Сумма* $\sum_{T'} v_{T'}$ *есть* $\operatorname{Pf} F_I v_T$.

В качестве следствия получаем следующий важный результат.

Теорема 8. *В случае* $\mathfrak{o}_{2n+1}$, *если* $I \subset J$, $|J| = 2n$, *вектор* $v = e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}$, *то* $\operatorname{Pf} F_I \operatorname{Pf} F_J v = \operatorname{const} \operatorname{Pf} F_J v$, *где константа зависит только от* n.

§ 3. Элементы Капелли и уравнение типа Книжника–Замолодчикова

3.1. Построение интегрируемого уравнения. В этом пункте, используя получены выше результаты, мы конструируем интегрируемую пфаффову систему, аналогичную системе Книжника–Замолодчикова.

Система типа Книжника–Замолодчикова имеет вид

$$dy = \lambda \sum_{i \neq j = 1}^{n} \frac{d(z_i - z_j)}{z_i - z_j} \tau_{ij} y,$$

где λ есть некоторая константа, $y(z_1, \ldots, z_n)$ – вектор-функция, а τ_{ij} – постоянные матрицы.

Условие интегрируемости Фробениуса данного уравнения в явном виде записывается так. Для различных индексов i, j, k, l имеем

$$[\tau_{ij}, \tau_{ik} + \tau_{jk}] = 0, \qquad [\tau_{ij}, \tau_{kl}] = 0. \tag{1}$$

Оригинальное уравнение Книжника–Замолодчикова получается, если мы берем

$$\tau_{ij} = \sum_s 1 \otimes \cdots \otimes \rho(I_s) \otimes \cdots \otimes \rho(I_s) \otimes \cdots \otimes 1, \tag{2}$$

где I_s – ортонормированный относительно формы Киллинга базис некоторой алгебры Ли, при этом элементы I_s стоят на местах i, j, а ρ – представление алгебры Ли в пространстве V. Таким образом, τ_{ij} есть матрица оператора на пространстве $V^{\otimes n}$.

Тот же самый элемент может быть записан с использованием произвольного, не обязательно ортонормированного базиса следующим образом:

$$\tau_{ij} = \sum_s 1 \otimes \cdots \otimes \rho(I_s) \otimes \cdots \otimes \rho(\omega(I_s)) \otimes \cdots \otimes 1, \tag{3}$$

где $\{\omega(I_s)\}$ – двойственный к $\{I_s\}$ относительно формы Киллинга базис.

При доказательстве того, что приведенный элемент τ_{ij} удовлетворяет соотношениям (1), ключевую роль играет тот факт, что $\sum_s I_s^2$ (в случае формулы (2)) есть центральный элемент второго порядка в универсальной обертывающей алгебре. При этом достаточно проверить только соотношение

$$[\tau_{12}, \tau_{13} + \tau_{23}] = 0, \tag{4}$$

оставшиеся же условия будут выполнены автоматически.

Элементы Капелли $C_k = \sum_{|I|=k} \operatorname{Pf} F_I^2$ имеет сходную структуру с элементом Казимира второго порядка. Представляется заманчивым использовать его для построения интегрируемого уравнения типа Книжника–Замолодчикова.

Это удается сделать в случае $\mathfrak{o}_{2n+1}$, если $k = 2n$ и ρ – неприводимое представление со старшим весом $(1, \ldots, 1)$.

Доказательству этого факта и посвящен настоящий пункт.

Вначале не будем накладывать на k никаких ограничений. Положим

$$\tau = \sum_{|I|=k} \operatorname{Pf} F_I \otimes \operatorname{Pf} F_I \in U(\mathfrak{o}_N)^{\otimes 2}. \tag{5}$$

Определим элемент $\tau_{ij} \in U(\mathfrak{o}_N)^{\otimes 3}$ как образ элемента $\tau \in U(\mathfrak{o}_N)^{\otimes 2}$ при вложении $U(\mathfrak{o}_N) \subset U(\mathfrak{o}_N)^{\otimes 3}$ на места i, j.

Тогда имеем

$$[\tau_{12}, \tau_{13} + \tau_{23}] = \sum_{|J|=k} [\tau_{12}, \operatorname{Pf} F_J \otimes 1 + 1 \otimes \operatorname{Pf} F_J] \otimes \operatorname{Pf} F_J.$$

Так как элементы $\operatorname{Pf} F_J$ при разных J линейно независимы в $U(\mathfrak{o}_N)$, то обращение данного коммутатора в нуль в $U(\mathfrak{o}_N)$ эквивалентно обращению в нуль для любого J коммутатора

$$[\tau_{12}, \operatorname{Pf} F_J \otimes 1 + 1 \otimes \operatorname{Pf} F_J] = \sum_{|I|=k} [\operatorname{Pf} F_I, \operatorname{Pf} F_J] \otimes \operatorname{Pf} F_I + \operatorname{Pf} F_I \otimes [\operatorname{Pf} F_I, \operatorname{Pf} F_J].$$

Используя теорему 3, мы можем переписать эти соотношения в виде

$$\frac{1}{k/2} \sum_{I=I' \sqcup I'',\, I'' \neq \varnothing} (-1)^{(I',I'')} \frac{|I''|+2}{2} \\ \times (\operatorname{Pf} F_{I'} \operatorname{Pf} F_{\operatorname{Pf} F_{I''} J} \otimes \operatorname{Pf} F_J + \operatorname{Pf} F_J \otimes \operatorname{Pf} F_{I'} \operatorname{Pf} F_{\operatorname{Pf} F_{I''} J}).$$

Теперь пусть $N = 2n+1$ и $|I| = 2n$. Множество I из $2n$ элементов имеет вид $\{1, \dots, N\} \setminus i$. Положим

$$\operatorname{Pf} F_I = \operatorname{Pf} F_{\widehat{i}}.$$

Тогда $\operatorname{Pf} F_{\operatorname{Pf} F_{I''} J} = 0$ при $|I''| > 2$ и

$$[\operatorname{Pf} F_{\widehat{i}}, \operatorname{Pf} F_{\widehat{j}}] = \frac{1}{n} \sum_{k \neq i,j} (-1)^{(I'I'')} \operatorname{Pf} F_{\widehat{ikj}} \operatorname{Pf} F_{\widehat{k}}.$$

Знак $(-1)^{(I'I'')}$ вычисляется так. Для произвольного индекса s обозначим через $\overline{s}$ либо s при $s < i$, либо $s-1$ при $s > i$.

Тогда $(-1)^{(I'I'')}$ есть $(-1)^{n-\overline{j}+(n-1)-\overline{k}} = (-1)^{\overline{j}+\overline{k}-1}$ в случае $j < k$ и $(-1)^{\overline{j}+\overline{k}}$ в случае $j > k$. Обозначим этот знак для краткости через s_{jk}. Имеем $s_{jk} = -s_{kj}$.

Применяя теорему 8, получаем, что для вектора v из представления $\mathfrak{o}_{2n+1}$ со старшим весом $(1, \dots, 1)$ выполняется следующее

Предложение 11. *Выполнено равенство*

$$[\operatorname{Pf} F_{\widehat{i}}, \operatorname{Pf} F_{\widehat{j}}] v = \mathrm{const} \sum_{k \neq i,j} s_{jk} \operatorname{Pf} F_{\widehat{k}} v.$$

Теперь имеем

$$[\tau_{12}, \operatorname{Pf} F_{\widehat{j}} \otimes 1 + 1 \otimes \operatorname{Pf} F_{\widehat{j}}]v \otimes w$$
$$= \operatorname{const} \sum_{i,k} s_{jk} \operatorname{Pf} F_{\widehat{k}} v \otimes \operatorname{Pf} F_{\widehat{j}} w + s_{jk} \operatorname{Pf} F_{\widehat{j}} v \otimes \operatorname{Pf} F_{\widehat{k}} w.$$

Во второй сумме поменяем местами индексы j и k. Тогда получим следующее:

$$[\tau_{12}, \operatorname{Pf} F_{\widehat{j}} \otimes 1 + 1 \otimes \operatorname{Pf} F_{\widehat{j}}]v \otimes w$$
$$= \operatorname{const} \sum_{i,k} s_{jk} \operatorname{Pf} F_{\widehat{k}} v \otimes \operatorname{Pf} F_{\widehat{j}} w - s_{jk} \operatorname{Pf} F_{\widehat{k}} v \otimes \operatorname{Pf} F_{\widehat{j}} w = 0.$$

Итак, доказана

Теорема 9. *В случае $\mathfrak{o}_{2n+1}$ коэффициенты τ_{ij}, построенные по элементу*

$$\tau = \sum_{i=1}^{2n+1} \operatorname{Pf} F_{\widehat{i}} \otimes \operatorname{Pf} F_{\widehat{i}}, \tag{6}$$

удовлетворяют соотношению (4) при переходе к представлению со старшим весом $(1, \dots, 1)$.

Теорема 10. *Имеется интегрируемое уравнение типа Книжника–Замолодчикова*

$$d\psi = \lambda \sum \tau_{ij} \frac{d(z_i - z_j)}{z_i - z_j} \psi,$$

где $\psi(z_1, \dots, z_n)$ принимает значение в $V \otimes \dots \otimes V$ – тензорном произведении тензорных представлений $\mathfrak{o}_{2n+1}$ со старшим весом $(1, \dots, 1)$, а τ_{ij} конструируется из формулы (6).

3.2. Уравнения типа Книжника–Замолодчикова и изомонодромные деформации. В работах [17], [18] было показано, что уравнения Книжника–Замолодчикова тесно связаны с уравнения изомонодромных деформаций. Сначала напомним эту связь в случае обычного уравнения Книжника–Замолодчикова, связанного с $\mathfrak{gl}_n$, а затем построим уравнения изомонодромных деформаций, являющиеся классическими аналогами построенных нами уравнений типа Книжника–Замолодчикова.

3.2.1. *Связь уравнений Книжника–Замолодчикова и Шлезингера в случае $\mathfrak{gl}_n$.* Напомним связь уравнений Шлезингера и Книжника–Замолодчикова. Подробности могут быть найдены в [17] , [18].

Система Шлезингера есть система уравнений, описывающая изомонодромные деформации фуксовой системы

$$\frac{d}{dz}\psi = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i}{z - z_i} \psi,$$

где N_i – матрица с элементами $(N_i)_{ab}$.

Система Шлезингера имеет вид

$$\frac{\partial N_i}{\partial z_j} = \frac{[N_i, N_j]}{z_i - z_j}, \quad i \neq j, \qquad \frac{\partial N_i}{\partial z_i} = -\sum_{j\neq i} \frac{[N_i, N_j]}{z_i - z_j}, \quad i, j = 1, \dots, n. \tag{7}$$

Эта система может быть записана как гамильтонова система с n временами $z_1, \dots, z_n$, гамильтонианами $H_i = \sum_{j\neq i} \operatorname{tr}(N_i N_j)/(z_j - z_i)$ и скобкой Пуассона

$$\{(N_i)_{ab}, (N_j)_{cd}\} = \delta_{ij}\big((N_i)_{ad}\delta_{cb} - (N_i)_{cb}\delta_{ad}\big).$$

Приведенные гамильтонианы коммутируют относительно этой скобки Пуассона. Система Шлезингера записывается в этих терминах следующим образом:

$$\{H_i, H_j\} = 0, \quad \frac{\partial H_i}{\partial z_j} - \frac{\partial H_j}{\partial z_i} = 0, \quad \frac{\partial N_i}{\partial z_j} = \{H_j, N_i\}, \qquad i, j = 1, \dots, n. \tag{8}$$

Квантование этой гамильтоновой системы есть следующая система. Переменными в ней будут операторы $(\widetilde{N}_i)_{ab}$. Так что $\widetilde{N}_i$ есть операторнозначная матрица.

Коммутационные соотношения между $(\widetilde{N}_i)_{ab}$ имеют вид

$$[(N_i)_{ab}, (N_j)_{cd}] = \delta_{ij}\big((N_i)_{ad}\delta_{cb} - (N_i)_{cb}\delta_{ad}\big). \tag{9}$$

Гамильтониан задается формулой $\widetilde{H}_i = \sum_{j\neq i} \operatorname{tr}(\widetilde{N}_i \widetilde{N}_j)/(z_j - z_i)$, а уравнения движения, т.е. уравнения Гейзенберга, эквиваленты уравнениям

$$[\widetilde{H}_i, \widetilde{H}_j] = 0, \quad \frac{\partial \widetilde{H}_i}{\partial z_j} - \frac{\partial \widetilde{H}_j}{\partial z_i} = 0, \quad \frac{\partial \widetilde{N}_i}{\partial z_j} = \kappa[\widetilde{H}_j, \widetilde{N}_i], \qquad i, j = 1, \dots, n. \tag{10}$$

Константа κ связана с константой Планка в уравнении Шрёдингера. Эта система легко переписывается в виде, очень близком к (7):

$$\frac{\partial \widetilde{N}_i}{\partial z_j} = \kappa' \frac{[\widetilde{N}_i, \widetilde{N}_j]}{z_i - z_j}, \quad i \neq j, \qquad \frac{\partial \widetilde{N}_i}{\partial z_i} = -\kappa' \sum_{j\neq i} \frac{[\widetilde{N}_i, \widetilde{N}_j]}{z_i - z_j}, \quad i, j = 1, \dots, n. \tag{11}$$

Константа κ' также связана с константой Планка (см. вывод в [17]).

Можно доказать (см. [17], [18]), что система Книжника–Замолодчикова, связанная с $\mathfrak{gl}_n$, эквивалента специальному случаю такой системы. Действительно, запишем систему Книжника–Замолодчикова следующим образом. Пусть $\widehat{N}_i$ есть операторнозначная матрица, чьи матричные элементы $(\widehat{N}_i)_{ab}$ являются операторами, действующими на пространстве $V^{\otimes n}$, где V есть представление $\mathfrak{gl}_N$, при этом матричные элементы $(\widehat{N}_i)_{ab}$ определяются по правилу

$$(\widehat{N}_i)_{ab} = 1 \otimes \dots \otimes E_{ab} \otimes \dots \otimes 1,$$

где E_{ab} – матричная единица, которая стоит на i-м месте. Эти элементы $(\widehat{N}_i)_{ab}$ удовлетворяют соотношениям (9). Теперь уравнение Книжника–Замолодчикова, связанное с $\mathfrak{gl}_N$, с коэффициентами, определяемыми формулой (3), в которой в качестве базиса I_s взяты матричные единицы E_{ab}, можно записать следующим образом:

$$d\psi = \lambda \sum_{j\neq i} \operatorname{tr}(\widehat{N}_i \widehat{N}_j) \frac{d(z_i - z_j)}{z_i - z_j} \psi, \tag{12}$$

где след берется по матричным индексам a, b.

Пусть U – фундаментальное решение уравнения Книжника–Замолодчикова. Положим

$$\widetilde{N}_i = U^{-1}\widehat{N}_i U,$$

легко проверить, что $\widetilde{N}_i$ удовлетворяют системе (10). При этом константа λ в (12) определенным способом выражается через κ'.

Таким образом, квантованная система Шлезингера (10) есть записанная в трактовке Гейзенберга эволюция квантовой системы, которая в трактовке Шрёдингера записывается как система Книжника–Замолодчикова (12).

3.2.2. *Классический предел пфаффианной системы типа Книжника–Замолодчикова.* Напишем систему уравнений изомонодромных деформаций, которую можно назвать классическим пределом построенной нами в теореме 10 системы типа Книжника–Замолодчикова.

Результатом будет фуксова система на римановой сфере, при этом матричные элементы матриц вычетов (формула (13)) будут функциями от положения особых точек. Мы приведем скобки Пуассона (формула (14)) между этими матричными элементами и гамильтонианы (формула (15)), позволяющие написать уравнения изомонодромных деформаций.

Итак, мы взяли алгебру $\mathfrak{o}_{2n+1}$, построили по ней некоммутативные пфаффианы $\operatorname{Pf} F_I$, $|I| = 2n$, и с их помощью построили уравнение типа Книжика-Замолодчикова. Мы замечаем, что если ввести постоянные операторнозначные тензоры

$$(\widehat{N}_i)_I = 1 \otimes \cdots \otimes \operatorname{Pf}_I \otimes \cdots \otimes 1,$$

то система типа Книжника–Замолодчикова, построенная нами в теореме 10, также может быть записана в виде (12). При этом след $\operatorname{tr}(N_i N_j)$ берется по тензорному мультииндексу $I = \{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n\}$ с помощью равенства

$$\operatorname{tr}(\widehat{N}_i \widehat{N}_j) = \sum_{a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n} (\widehat{N}_i)_{a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n} (\widehat{N}_j)_{b_1,\ldots,b_n,a_1,\ldots,a_n}.$$

В соответствии с формулами из предложения 9, эти формулы выражают обычный след для действия пфаффиана на пространстве кососимметрических тензоров с n индексами.

Переходя к трактовке Гейзеберга, получаем гамильтонову систему вида (11).

Переменными в этой трактовке будут операторнозначные $(2n)$-тензоры $N_i = ((N_i)_I)_{|I|=2n}$. Коммутаторы между компонентами $(N_i)_I$, $(N_j)_J$ нулевые при $i \neq j$, а при $i = j$ выражаются формулами, аналогичными формулам для коммутаторов между $\operatorname{Pf} F_I$, $\operatorname{Pf} F_j$.

При переходе к классической картине мы получим обычные тензоры $N_i = ((N_i)_I)_{|I|=2n}$, или в явном виде $N_i = ((N_i)_{a_1,\ldots,a_{2n}})$. В дальнейшем будем работать только с этими классическими объектами.

Как и в случае пфаффиана, компоненты иногда удобнее индексировать одним числом $i = \{1, \ldots, 2n+1\} \setminus \{a_1, \ldots, b_n\}$. Так что тензор N_i имеет фактически n компонент. При этом используется обозначение

$$(N_i)_{a_1,\ldots,a_n b_1,\ldots,b_n} = (N_i)_{\widehat{i}}.$$

С N_i можно связать оператор на пространстве кососимметрических тензоров с n индексами, действующий по правилу

$$((N_i)_{a_1,\dots,a_n b_1,\dots,b_n})e_{b_1}\wedge\dots\wedge e_{b_n} = \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^\sigma e_{\sigma(a_1)}\wedge\dots\wedge e_{\sigma(a_n)} = n!\, e_{a_1}\wedge\dots\wedge e_{a_n}, \tag{13}$$

см. также предложение 9. Тензорные компоненты $(N_i)_{a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n}$ будут функциями от $z_1,\dots,z_n$, введем скобку Пуассона между ними по правилу

$$\{(N_i)_{\widehat{p}},(N_j)_{\widehat{q}}\} = \delta_{ij}\mathrm{const}\sum_{k\neq p,q} s_{pq}(N_i)_{\widehat{k}}, \tag{14}$$

где константа и знак s_{pq} – такие же, как и в предложении 11.

Далее определим гамильтонианы формулой

$$H_i = \sum_{j\neq i}\frac{\mathrm{tr}(N_iN_j)}{z_j-z_i}. \tag{15}$$

Благодаря связи с интегрируемым уравнением Книжника–Замолодчикова, имеем

$$\{H_i,H_j\} = 0.$$

Таким образом, мы получили гамильтонову систему, являющуюся классическим пределом квантовой системы (11).

Свяжем с ней систему уравнений изомонодромных деформаций. Равенство $\{H_i,H_j\}=0$ влечет, что операторы

$$D_z = \frac{\partial}{\partial z} - \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{z-z_i}, \qquad D_i = \frac{\partial}{\partial z_i} + \frac{N_i}{z-z_i}$$

коммутируют.

Таким образом, мы получаем, что если N_i есть решение гамильтоновой системы с гамильтонианами (15) и скобкой Пуассона (14), то они задают изомонодромную деформацию уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{\lambda-z_i}\right)\psi = 0.$$

При этом, чтобы написать эту систему в явном виде, когда N_i являются матрицами, а не тензорами, необходимо зафиксировать базис в пространстве кососимметрических тензоров с n индексами и явно написать матрицу оператора N_i (см. формулу (13)), действующего в этом базисе.

3.2.3. *Явный вид.* Итак, формула (13) из предыдущего раздела задает матрицу вычета неявно, так как предполагалось, что базисные элементы пространства, где действует эта матрица, занумерованы несколькими индексами. Приведем явную запись матрицы оператора, заданного формулой (13) в простейшем нетривиальном случае.

В случае $\mathfrak{o}_5$ имеется пять пфаффианов старшего порядка. Соответственно каждый тензор N_i имеет пять компонент, введем для них короткие обозначения

$$x_{\widehat{5}} = x_{1234}, \qquad x_{\widehat{4}} = x_{1235}, \qquad x_{\widehat{3}} = x_{1245}, \qquad x_{\widehat{2}} = x_{1345}, \qquad x_{\widehat{1}} = x_{2345}.$$

Каждая компонента $x_{\widehat{i}}$ будет функцией от положений особых точек z_i. Чтобы выписать явно полученную выше систему изомонодромных деформаций, выпишем матрицу оператора N_i на пространстве кососимметрических тензоров. В качестве базиса в этом пространстве выберем следующие элементы:

$$e_1\wedge e_2,\ e_1\wedge e_3,\ e_1\wedge e_4,\ e_1\wedge e_5,\ e_2\wedge e_3,\ e_2\wedge e_4,\ e_2\wedge e_5,\ e_3\wedge e_4,\ e_3\wedge e_5,\ e_4\wedge e_5.$$

Матрица действия $N_i=(x_{\widehat{5}},\dots,x_{\widehat{1}})$ на пространстве кососимметрических 2-тензоров имеет вид

$$N_i=2!\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{\widehat{5}} & x_{\widehat{4}} & x_{\widehat{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_{\widehat{5}} & -x_{\widehat{4}} & 0 & 0 & x_{\widehat{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{\widehat{5}} & 0 & -x_{\widehat{3}} & 0 & -x_{\widehat{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{\widehat{4}} & x_{\widehat{3}} & 0 & x_{\widehat{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_{\widehat{5}} & x_{\widehat{4}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{\widehat{1}} \\ 0 & -x_{\widehat{5}} & 0 & -x_{\widehat{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_{\widehat{1}} & 0 \\ 0 & -x_{\widehat{4}} & -x_{\widehat{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{\widehat{1}} & 0 & 0 \\ x_{\widehat{5}} & 0 & 0 & x_{\widehat{2}} & 0 & 0 & x_{\widehat{1}} & 0 & 0 & 0 \\ x_{\widehat{4}} & 0 & -x_{\widehat{2}} & 0 & 0 & -x_{\widehat{1}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{\widehat{3}} & x_{\widehat{2}} & 0 & 0 & x_{\widehat{1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно сделать вывод, что построенная нами система изомонодромных деформаций отличается от системы Шлезингера. Действительно, для нашей системы изомонодромных деформаций мы имеем те же самые гамильтонианы, что и в системе Шлезингера, но другую пуассонову структуру.

Например, $\{x_{\widehat{3}},x_{\widehat{2}}\}$ в нашей пуассоновой структуре есть сумма нескольких функций $x_{\widehat{i}}$, в то время как в пуассоновой структуре системы Шлезингера это одна функция.

Таким образом, мы получаем систему изомонодромных деформаций, отличную от системы Шлезингера.

Список литературы

[1] А. А. Белавин, В. Г. Дринфельд, “О решениях классического уравнения Янга–Бакстера для простых алгебр Ли”, *Функц. анализ и его прил.*, **16**:3 (1982), 1–29; англ. пер.: A. A. Belavin, V. G. Drinfel’d, “Solutions of the classical Yang–Baxter equation for simple Lie algebras”, *Funct. Anal. Appl.*, **16**:3 (1982), 159–180.

[2] N. J. MacKay, “Rational R-matrices in irreducible representations”, *J. Phys. A*, **24**:17 (1991), 4017–4026.

[3] N. J. MacKay, “Rational K-matrices and representations of twisted Yangians”, *J. Phys. A*, **35**:37 (2002), 7865–7876.

[4] А. И. Молев, *Янгианы и классические алгебры Ли*, МЦНМО, М., 2009; пер. с англ.: A. Molev, *Yangians and classical Lie algebras*, Math. Surveys Monogr., **143**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

[5] M. Itoh, T. Umeda, “On central elements in the universal enveloping algebras of the orthogonal Lie algebras”, *Compositio Math.*, **127**:3 (2001), 333–359.

[6] A. W. M. Dress, W. Wenzel, “A simple proof of an identity concerning Pfaffians of skew symmetric matrices”, *Adv. Math.*, **112**:1 (1995), 120–134.

[7] M. Ishikawa, S. Okada, M. Wakayama, “Applications of minor-summation formula. I. Littlewood’s formulas”, *J. Algebra*, **183**:1 (1996), 193–216.

[8] M. Ishikawa, M. Wakayama, “Applications of minor-summation formula. II. Pfaffians and Schur polynomials”, *J. Combin. Theory Ser. A*, **88**:1 (1999), 136–157.

[9] M. Ishikawa, M. Wakayama, “Applications of minor summation formula. III. Plücker relations, lattice paths and Pfaffian identities”, *J. Combin. Theory Ser. A*, **113**:1 (2006), 113–155.

[10] J. R. Stembridge, “Nonintersecting paths, Pfaffians, and plane partitions”, *Adv. Math.*, **83**:1 (1990), 96–131.

[11] K. Chen, “Iterated integrals of differential forms and loop space homology”, *Ann. of Math.* (2), **97** (1973), 217–246.

[12] J.-G. Luque, J.-Y. Thibon, “Pfaffian and Hafnian identities in shuffle algebras”, *Adv. in Appl. Math.*, **29**:4 (2002), 620–646.

[13] A. I. Molev, “Gelfand–Tsetlin bases for classical Lie algebras”, *Handbook of algebra*, Handb. Algebr., **4**, Elsevier, Amsterdam, 2006, 109–170.

[14] И. В. Чередник, “Факторизующиеся частицы на полупрямой и системы корней”, *ТМФ*, **61**:1 (1984), 35–44; англ. пер.: I. V. Cherednik, “Factorizing particles on a half-line and root systems”, *Theoret. and Math. Phys.*, **61**:1 (1984), 977–983.

[15] Н. Д. МакКай, “Интегрируемость нелинейных сигма-моделей с границей”, *ТМФ*, **142**:2 (2005), 322–328; англ. пер.: N. J. MacKay, “Boundary integrability of nonlinear sigma models”, *Theoret. and Math. Phys.*, **142**:2 (2005), 270–274.

[16] N. J. MacKay, “Introduction to Yangian symmetry in integrable field theory”, *Internat. J. Modern Phys. A*, **20**:30 (2005), 7189–7217.

[17] N. Reshetikhin, “The Knizhnik–Zamolodchikov system as a deformation of the isomonodromy problem”, *Lett. Math. Phys.*, **26**:3 (1992), 167–177.

[18] J. Harnad, “Quantum isomonodromic deformations and the Knizhnik–Zamolodchikov equations”, *Symmetries and integrability of difference equations* (Estérel, PQ, 1994), CRM Proc. Lecture Notes, **9**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, 155–161.

Д. В. Артамонов (D. V. Artamonov)
Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: artamonov.dmitri@gmail.com

Поступила в редакцию
11.07.2011 и 28.05.2012

В. А. Голубева (V. A. Goloubeva)
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)
E-mail: goloubeva@yahoo.com