В. А. Александров, О существовании двух аффинно-эквивалентных каркасов с заданными длинами ребер в евклидовом d-мерном пространстве, *Сиб. матем. журн.*, 2023, том 64, номер 6, 1131–1137

Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2023. Том 64, № 6

УДК 514.1

О СУЩЕСТВОВАНИИ ДВУХ АФФИННО–ЭКВИВАЛЕНТНЫХ КАРКАСОВ С ЗАДАННЫМИ ДЛИНАМИ РЕБЕР В ЕВКЛИДОВОМ d–МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. А. Александров

Аннотация. Исследуется проблема существования двух аффинно-эквивалентных шарнирно-стержневых каркасов в евклидовом d-мерном пространстве, которые имеют заданную комбинаторную структуру и предписанные длины ребер. Доказано, что теоретически эта задача всегда разрешима, и объяснено, почему нельзя предложить практический алгоритм ее решения.

DOI 10.33048/smzh.2023.64.602

Ключевые слова: евклидово d-мерное пространство, граф, шарнирный каркас, аффинно-эквивалентные каркасы, определитель Кэли — Менгера, теорема Коши об однозначной определенности выпуклого многогранника.

§ 1. Введение

Для графа G обозначим через $E(G)$ и $V(G)$ множества его ребер и вершин соответственно.

Шарнирно-стержневым каркасом в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, называют граф G и отображение $\mathbf{p} : G \to \mathbb{R}^d$, которое сопоставляет каждой вершине i графа G точку $\mathbf{p}_i$ в $\mathbb{R}^d$, причем так, что $\mathbf{p}_i \neq \mathbf{p}_j$ для всех $(i, j) \in E(G)$. Отображение $\mathbf{p}$ называется *конфигурацией* шарнирно-стержневого каркаса; точка $\mathbf{p}_i$ называется его *шарниром*; а отрезок прямой с концами $\mathbf{p}_i$, $\mathbf{p}_j$ называется его *стержнем* при условии, что (i, j) является ребром графа G. Шарнирно-стержневой каркас обозначается через $G(\mathbf{p})$.

Эта терминология и обозначения стандартны в теории жесткости шарнирно-стержневых каркасов (см., например, [1] и приведенные там ссылки). В этой статье рассматривается конфигурация $\mathbf{p}$ как геометрическая реализация графа G и часто сокращается термин «шарнирно-стержневой каркас» до «каркас».

Изучается следующая проблема.

Проблема 1. *Пусть $d \geq 1$ — натуральное число, G — граф, а $\lambda, \lambda' : E(G) \to (0, +\infty)$ — две функции, сопоставляющие действительные числа λ_{ij} и λ'_{ij} каждому ребру (i, j) графа G. Существуют ли два каркаса $G(\mathbf{p})$ и $G(\mathbf{p}')$ в $\mathbb{R}^d$ такие, что*

Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки РФ для Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (проект FWNF-2022-0006).

(a) $|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j| = \lambda_{ij}$ *для каждого* $(i,j) \in E(G)$,

(b) $|\mathbf{p}'_i - \mathbf{p}'_j| = \lambda'_{ij}$ *для каждого* $(i,j) \in E(G)$,

(c) $G(\mathbf{p})$ *и* $G(\mathbf{p}')$ *аффинно-эквивалентны, т. е. существует аффинное преобразование пространства* $\mathbb{R}^d$ *такое, что* $A(\mathbf{p}_i) = \mathbf{p}'_i$ *для каждого* $i \in V(G)$,

(d) $\operatorname{aff}(\mathbf{p}(G)) = \mathbb{R}^d$, *где* $\operatorname{aff}(\mathbf{p}(G))$ *является аффинной оболочкой множества* $\mathbf{p}(G) = \{\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^d : i \in V(G)\}$*?*

Другими словами, проблема 1 состоит в следующем: существуют ли две аффинно-эквивалентные геометрические реализации графа G с заданными длинами стержней.

Проблема 1 обобщает проблему распознавания аффинно-эквивалентных многогранников в евклидовом трехмерном пространстве по их естественным разверткам. Последняя изучалась в [2, 3] и рассматривалась там как обобщение теоремы Коши об однозначной определенности выпуклых многогранников [4]. Аргументы, использованные в [2, 3], в значительной степени основаны на структуре многогранных поверхностей в евклидовом трехмерном пространстве. Поэтому они не могут быть непосредственно применены к изучению проблемы 1. В этой статье предлагается алгоритм, решающий проблему 1 для любых входных данных, т. е. для любой размерности d, любого графа G и любых наборов предписанных длин $\{\lambda_{ij}\}_{(i,j)\in E(G)}$, $\{\lambda'_{ij}\}_{(i,j)\in E(G)}$ стержней. Предложенный алгоритм дает уверенность в том, что проблема 1 всегда разрешима, но не позволяет построить эффективный алгоритм для ее практического решения.

§ 2. Предварительные результаты

Если X — множество, то через $|X|$ обозначается его мощность, если x — вектор в $\mathbb{R}^d$, то через $|x|$ обозначается его длина.

Полуметрическое пространство — это пара (X,ρ), где X — множество, а $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ — функция такие, что для всех $x, y \in X$ выполняются следующие свойства: $\rho(x,y) = \rho(y,x)$, $\rho(x,y) \geq 0$ и $\rho(x,y) = 0$, если и только если $x = y$ (см. [5, определение 5.1]). При этом ρ называется *полуметрикой* на X.

Если (X,ρ) — полуметрическое пространство и $Y = \{y_0, y_1, \dots, y_k\}$ — его конечное подмножество, то положим по определению $\rho_{ij} = \rho(y_i, y_j)$ и

$$\operatorname{cmd}(Y) \overset{\text{опр}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \rho_{01}^2 & \dots & \rho_{0k}^2 \\ 1 & \rho_{10}^2 & 0 & \dots & \rho_{1k}^2 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & \rho_{k0}^2 & \rho_{k1}^2 & \dots & 0 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Определитель в (1) имеет размеры $(k+2)\times(k+2)$ и называется *определителем Кэли — Менгера* множества Y или точек $y_0, y_1, \dots, y_k$ (см., например, [5, § 40]).

Отображение $f : X \to \mathbb{R}^d$ называется *изометрическим вложением* полуметрического пространства (X,ρ) в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, если $|f(x) - f(y)| = \rho(x,y)$ для всех $x, y \in X$.

Теорема 1 (Менгер). *Пусть* (X,ρ) *— полуметрическое пространство,* $d \geq 1$ *— целое число. Изометрическое вложение* $f : X \to \mathbb{R}^d$ *такое, что* $\operatorname{aff} f(X) = \mathbb{R}^d$, *существует тогда и только тогда, когда выполняются следующие утверждения:*

(i) $|X| \geq d+1$,

(ii) $(-1)^{|Y|}\operatorname{cmd}(Y) \geq 0$ *для каждого* $Y \subset X$ *такого, что* $|Y| \leq d+1$,

(iii) $(-1)^{d+1}\operatorname{cmd}(Y_0) > 0$ *для некоторого* $Y_0 \subset X$ *такого, что* $|Y_0| = d+1$,

(iv) $\operatorname{cmd}(Y) = 0$ *для каждого* $Y \subset X$ *такого, что* $|Y| = d + 2$.

Мы сформулировали эту теорему, впервые доказанную Менгером в 1928 г., в удобной для наших целей форме. Ее доказательство читатель может найти в [5, гл. IV], а приложения и альтернативные формулировки — в [6].

Ниже нам потребуется также следующий хорошо известный факт. Если $X = \{x_0, x_1, \dots, x_k\} \subset \mathbb{R}^d$, $1 \le k \le d$, и $\rho_{ij} = |x_i - x_j|$ для всех $i, j = 0, 1, \dots, k$, то k-мерный объем $\operatorname{vol}_k(X)$ симплекса $X \subset \mathbb{R}^d$ связан с определителем Кэли — Менгера $X \subset (X, \rho)$ следующей формулой:

$$[\operatorname{vol}_k(X)]^2 = \frac{(-1)^{k+1}}{2^k k!} \operatorname{cmd}(X) \tag{2}$$

(см., например, [5, § 40]).

§ 3. Вспомогательный результат

Пусть $d \ge 1$ — целое число, K_{d+2} — полный граф на $d + 2$ вершинах $i = 0, 1, \dots, d + 1$ и $\mathbf{p} : K_{d+2} \to \mathbb{R}^d$ — конфигурация такая, что размерность аффинной оболочки $\operatorname{aff}(\Delta)$ множества $\Delta = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_d\}$ равна $d - 1$. Зададим метрику ρ на K_{d+2} формулой $\rho_{ij} = |\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j|$.

Цель этого параграфа в том, чтобы научиться различать следующие три случая, используя при этом только метрическое пространство (K_{d+2}, ρ):

(A) $\mathbf{p}_0$ и $\mathbf{p}_{d+1}$ лежат в одном и том же открытом полупространстве, ограниченном гиперплоскостью $\operatorname{aff}(\Delta)$,

(B) $\{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_{d+1}\} \cap \operatorname{aff}(\Delta) \ne \varnothing$,

(C) $\mathbf{p}_0$ и $\mathbf{p}_{d+1}$ лежат в разных открытых полупространствах, ограниченных $\operatorname{aff}(\Delta)$.

Заметим, что $\operatorname{cmd}(K_{d+1})$ является квадратным многочленом по переменной $t = \rho^2_{0,d+1}$, коэффициенты которого являются многочленами по переменным ρ_{ij}, $\{i, j\} \ne \{0, d + 1\}$. Обозначим этот квадратный многочлен через $Ut^2 + Vt + W$. Легко видеть, что $U = -\operatorname{cmd}(\Delta)$. Тогда из (2) следует, что $U = (-1)^{d-1} 2^{d-1} (d-1)! [\operatorname{vol}_{d-1}(\Delta)]^2$. Следовательно, $U < 0$, если d четно, и $U > 0$, если d нечетно.

Лемма 1. *Используя введенные выше обозначения, можно утверждать, что*

- *случай* (A) *имеет место, если и только если*
$$(-1)^d \big(2U\rho^2_{0,d+1} + V\big) > 0, \tag{3}$$
- *случай* (B) *имеет место, если и только если*
$$2U\rho^2_{0,d+1} + V = 0, \tag{4}$$
- *случай* (C) *имеет место, если и только если*
$$(-1)^d \big(2U\rho^2_{0,d+1} + V\big) < 0. \tag{5}$$

Доказательство. Поскольку (K_{d+2}, ρ) изометрически вложено в $\mathbb{R}^d$, выполняется условие (iv) теоремы 1. Следовательно, $t_1 = \rho^2_{0,d+1}$ является корнем многочлена $Ut^2 + Vt + W$.

Предположим, что имеет место случай (A). Тогда многочлен $Ut^2 + Vt + W$ имеет еще один положительный корень t_2, соответствующий конфигурации, полученной из $\mathbf{p}$ заменой $\mathbf{p}_{d+1}$ его образом при отражении относительно гиперплоскости $\operatorname{aff}(\Delta)$. Отсюда вытекает, что $t_1 < t_2$. Следовательно, верно соотношение $2\rho^2_{0,d+1} = 2t_1 < t_1 + t_2 = -V/U$, т. е. выполняется (3). Рассуждая в обратном порядке, видим, что (3) влечет (A).

Предположим, что имеет место случай (B). Тогда t_1 является корнем кратности 2 многочлена Ut^2+Vt+W. Следовательно, верно соотношение $2\rho^2_{0,d+1} = 2t_1 = t_1 + t_2 = -V/U$, т. е. выполняется (4). Рассуждая в обратном порядке, видим, что (4) влечет (B).

Наконец, предположим, что имеет место случай (C). Тогда, как и ранее, многочлен Ut^2+Vt+W имеет еще один положительный корень t_2, соответствующий конфигурации, полученной из $\mathbf{p}$ заменой вектора $\mathbf{p}_{d+1}$ его образом при отражении относительно гиперплоскости $\operatorname{aff}(\Delta)$. Отсюда вытекает, что $t_2 < t_1$. Следовательно, верно соотношение $2\rho^2_{0,d+1} = 2t_1 > t_1 + t_2 = -V/U$, т. е. выполняется (5). Рассуждая в обратном порядке, видим, что (5) влечет (C). □

§ 4. Основной результат

В этом параграфе докажем, что положительное решение проблемы 1 эквивалентно существованию решения алгебраической системы, состоящей из равенств и неравенств. Начнем с описания этой системы.

Пусть в соответствии с обозначениями, принятыми в проблеме 1, заданы натуральное число $d \geq 1$, граф G и две функции $\lambda, \lambda' : E(G) \to (0, +\infty)$. С каждой парой вершин $i, j \in V(G)$, даже не соединенных ребром графа G, мы связываем две вещественные переменные z_{ij} и z'_{ij}. В конце нашего решения проблемы 1 увидим, что если искомые аффинно-эквивалентные конфигурации $\mathbf{p}, \mathbf{p}' : G \to \mathbb{R}^d$ существуют, то $z_{ij} = |\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j|^2$ и $z'_{ij} = |\mathbf{p}'_i - \mathbf{p}'_j|^2$ для всех $(i,j) \in V(G)$.

Для каждого $I = \{i_0, i_1, \dots, i_k\} \subset V(G)$ положим по определению $Z_I = \{z_{ij} : i, j \in I\}$, $Z'_I = \{z'_{ij} : i, j \in I\}$,

$$\operatorname{acmd}(Z_I) \overset{\text{опр}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & z_{i_0 i_1} & \dots & z_{i_0 i_k} \\ 1 & z_{i_1 i_0} & 0 & \dots & z_{i_1 i_k} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & z_{i_k i_0} & z_{i_k i_1} & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

$$\operatorname{acmd}(Z'_I) \overset{\text{опр}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & z'_{i_0 i_1} & \dots & z'_{i_0 i_k} \\ 1 & z'_{i_1 i_0} & 0 & \dots & z'_{i_1 i_k} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & z'_{i_k i_0} & z'_{i_k i_1} & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Мы называем $\operatorname{acmd}(Z_I)$ и $\operatorname{acmd}(Z'_I)$ *абстрактными определителями Кэли — Менгера* множеств Z_I и Z'_I соответственно.

Предположим, что $I = \{i_0, \dots, i_{d+1}\} \subset V(G)$. Заметим, что для каждого $0 \leq r \leq d$ абстрактный определитель Кэли — Менгера $\operatorname{acmd}(Z_I)$ является квадратным многочленом относительно переменной $z_{i_r, i_{d+1}}$, коэффициенты которого являются многочленами относительно переменных z_{i_m, i_n}, $\{i_m, i_n\} \neq \{i_r, i_{d+1}\}$. Обозначим этот многочлен через $U_{I,r}(z_{i_r,i_{d+1}})^2 + V_{I,r} z_{i_r,i_{d+1}} + W_{I,r}$. Аналогично $\operatorname{acmd}(Z'_I)$ является квадратным многочленом относительно $z'_{i_r,i_{d+1}}$, коэффициенты которого являются многочленами относительно $z'_{i_m i_n}$, $\{i_m, i_n\} \neq \{i_r, i_{d+1}\}$. Обозначим этот многочлен через $U'_{I,r}(z'_{i_r,i_{d+1}})^2 + V'_{I,r} z'_{i_r,i_{d+1}} + W'_{I,r}$.

Теперь можно явно записать систему алгебраических равенств и неравенств (6)–(12), задействованных в нашем решении проблемы 1:

$$z_{ij} \geq 0 \text{ и } z'_{ij} \geq 0 \quad \text{для всех } i, j \in V(G); \tag{6}$$

$$z_{ij}=(\lambda_{ij})^2 \text{ и } z'_{ij}=(\lambda'_{ij})^2 \quad \text{для всех } (i,j)\in E(G); \tag{7}$$

$$(-1)^{|I|}\operatorname{acmd}(Z_I)\geq 0 \text{ и } (-1)^{|I|}\operatorname{acmd}(Z'_I)\geq 0$$
$$\text{для каждого } I\subset V(G) \text{ такого, что } |I|\leq d+1; \tag{8}$$

$$\text{существует } I_*=\{i_0,\dots,i_d\}\subset V(G) \text{ такой, что } \operatorname{acmd}(Z_{I_*})\neq 0; \tag{9}$$

$$\operatorname{acmd}(Z_I)=\operatorname{acmd}(Z'_I)=0 \text{ для каждого } I\subset V(G),\ |I|=d+2; \tag{10}$$

$$\text{существует } \alpha>0 \text{ такое, что } \operatorname{acmd}(Z'_I)=\alpha\operatorname{acmd}(Z_I)$$
$$\text{для каждого } I\subset V(G),\ |I|=d+1; \tag{11}$$

$$\text{для каждого } i_{d+1}\in V(G)\setminus I_* \text{ и каждого } 1\leq r\leq d \text{ либо}$$
$$[V_{I_*\cup\{i_{d+1}\},r}+2U_{I_*\cup\{i_{d+1}\},r}(z_{i_r,i_{d+1}})^2][V'_{I_*\cup\{i_{d+1}\},r}+2U'_{I_*\cup\{i_{d+1}\},r}(z'_{i_r,i_{d+1}})^2]>0,$$
$$\text{либо } [V_{I_*\cup\{i_{d+1}\},r}+2U_{I_*\cup\{i_{d+1}\},r}(z_{i_r,i_{d+1}})^2]^2$$
$$+[V'_{I_*\cup\{i_{d+1}\},r}+2U'_{I_*\cup\{i_{d+1}\},r}(z'_{i_r,i_{d+1}})^2]^2=0. \tag{12}$$

В (12), $I_*\subset V(G)$ является множеством, существование которого декларировано в (9).

Основной результат настоящей статьи состоит в следующем.

Теорема 2. *Пусть $d\geq 1$ — натуральное число, G — граф, а $\lambda,\lambda':E(G)\to(0,+\infty)$ — две функции, сопоставляющие действительные числа λ_{ij} и λ'_{ij} каждому ребру (i,j) графа G. Тогда следующие два утверждения эквивалентны:*

(α) *существуют шарнирно-стержневые каркасы $G(\mathbf{p})$ и $G(\mathbf{p}')$ в $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющие условиям* (a)–(d) *проблемы* 1*;*

(β) *система алгебраических равенств и неравенств* (6)–(12) *имеет вещественное решение.*

Доказательство. Сначала докажем импликацию $(\alpha)\Rightarrow(\beta)$. Пусть каркасы $G(\mathbf{p})$ и $G(\mathbf{p}')$ лежат в $\mathbb{R}^d$ и удовлетворяют условиям (a)–(d) проблемы 1. Для всех вершин $i,j\in V(G)$ положим $z_{ij}=|\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_j|^2$ и $z'_{ij}=|\mathbf{p}'_i-\mathbf{p}'_j|^2$. Для каждого ребра $(i,j)\in E(G)$ положим $\lambda_{ij}=|\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_j|$ и $\lambda'_{ij}=|\mathbf{p}'_i-\mathbf{p}'_j|$. При таком выборе значений z_{ij}, z'_{ij} и λ_{ij}, λ'_{ij}, соотношения (6), (7), очевидно, выполняются. Более того,

- функции $z:G\times G\to\mathbb{R}$ и $z':G\times G\to\mathbb{R}$, определяемые формулами $z(i,j)=z_{ij}$ и $z'(i,j)=z'_{ij}$, являются метриками на G;
- конфигурации $\mathbf{p}:G\to\mathbb{R}^d$ и $\mathbf{p}':G\to\mathbb{R}^d$ являются изометрическими вложениями метрических пространств (G,z) и (G,z') в $\mathbb{R}^d$;
- $\operatorname{aff}(\mathbf{p}(G))=\operatorname{aff}(\mathbf{p}'(G))=\mathbb{R}^d$;
- для каждого $I=\{i_0,i_1,\dots,i_k\}\subset V(G)$ выполнены равенства

$$\operatorname{acmd}(Z_I)=\operatorname{cmd}(\{\mathbf{p}_{i_0},\dots,\mathbf{p}_{i_k}\}) \quad \text{и} \quad \operatorname{acmd}(Z'_I)=\operatorname{cmd}(\{\mathbf{p}'_{i_0},\dots,\mathbf{p}'_{i_k}\}). \tag{13}$$

Теперь мы видим, что из утверждения (ii) теоремы 1 и соотношений (2) и (13) вытекают неравенства (8); утверждение (iii) теоремы 1 и соотношение (13) влекут неравенства (9); утверждение (iv) теоремы 1 и соотношение (13) влекут равенства (10); равенства (11) выполняются при $\alpha=(\det A)^2>0$ ввиду (13); наконец, лемма 1 влечет соотношения (12). Тем самым импликация $(\alpha)\Rightarrow(\beta)$ доказана.

Далее докажем импликацию $(\beta)\Rightarrow(\alpha)$.

Пусть G является графом, и пусть соответствующая система алгебраических равенств и неравенств (6)–(12) имеет решение z_{ij}, z'_{ij}, α. Очевидно, что $z = \{z_{ij}\}$ и $z' = \{z'_{ij}\}$ являются полуметриками на полном графе $K_{|G|}$. Условия (8)–(10) означают, что полуметрическое пространство $(K_{|G|}, z)$ удовлетворяет условиям (i)–(iv) теоремы 1. Следовательно, существует изометрическое вложение $\mathbf{p} : K_{|G|} \to \mathbb{R}^d$, $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}(i)$, $i \in V(K_{|G|})$, этого пространства такое, что $\operatorname{aff}(\mathbf{p}(K_{|G|})) = \mathbb{R}^d$. Пусть $I_* = \{i_0, \dots, i_d\} \subset V(G) = V(K_{|G|})$ — множество, существование которого декларировано в (9). Используя (13), заключаем, что $\operatorname{aff}(\{\mathbf{p}_{i_0}, \dots, \mathbf{p}_{i_d}\}) = \mathbb{R}^d$, т. е. что симплекс с вершинами $\mathbf{p}_{i_0}, \dots, \mathbf{p}_{i_d}$ невырожденный или, что то же самое, $\operatorname{acmd}(Z_{I_*}) \neq 0$. Тогда из (11) следует $\operatorname{acmd}(Z'_{I_*}) \neq 0$. Вместе с (8), (10) и (11) это означает, что полуметрическое пространство $(K_{|G|}, z')$ удовлетворяет условиям (i)–(iv) теоремы 1. Поэтому существует его изометрическое вложение $\mathbf{p}' : K_{|G|} \to \mathbb{R}^d$, $\mathbf{p}'_i = \mathbf{p}'(i)$, $i \in V(K_{|G|}) = V(G)$.

Обозначим через $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ аффинное преобразование такое, что $A(\mathbf{p}_{i_r}) = \mathbf{p}'_{i_r}$ для каждого $i_r \in I_*$, т. е. аффинное преобразование, отображающее невырожденный симплекс с вершинами $\mathbf{p}_{i_0}, \dots, \mathbf{p}_{i_d}$ в невырожденный симплекс с вершинами $\mathbf{p}'_{i_0}, \dots, \mathbf{p}'_{i_d}$. Осталось доказать, что это же отображение A переводит $\mathbf{p}_j$ в $\mathbf{p}'_j$ для каждого $j \in V(G)$.

Пусть $j \notin I_* = \{i_0, \dots, i_d\} \subset V(G)$ и $r = 0, 1, \dots, d$. Обозначим через π_r аффинную оболочку множества $\{\mathbf{p}_{i_0}, \dots, \mathbf{p}_{i_d}\} \setminus \{\mathbf{p}_{i_r}\}$, через π'_r — аффинную оболочку множества $\{\mathbf{p}'_{i_0}, \dots, \mathbf{p}'_{i_d}\} \setminus \{\mathbf{p}'_{i_r}\}$ и через $\operatorname{vol}_{d-1}(S)$ и $\operatorname{vol}_d(S)$ — $(d-1)$-мерный и d-мерный объемы множества $S \subset \mathbb{R}^d$ соответственно.

Если $\mathbf{p}_j$ и $\mathbf{p}_{i_r}$ лежат в одном и том же открытом полупространстве, определяемом гиперплоскостью π_r, то обозначим через $\widetilde{\pi}'_r$ гиперплоскость, параллельную π'_r и лежащую в том полупространстве, определяемом π'_r, которое содержит $\mathbf{p}_{i_r}$, на расстоянии

$$h'_r \overset{\text{опр}}{=} d\frac{\operatorname{vol}_d(\operatorname{conv}(\{\mathbf{p}'_j, \mathbf{p}'_{i_0}, \dots, \mathbf{p}'_{i_d}\} \setminus \{\mathbf{p}'_{i_r}\}))}{\operatorname{vol}_{d-1}(\operatorname{conv}(\{\mathbf{p}'_{i_0}, \dots, \mathbf{p}'_{i_d}\} \setminus \{\mathbf{p}'_{i_r}\})}$$

от π'_r. Здесь $\operatorname{conv}(T)$ обозначает выпуклую оболочку множества $T \subset \mathbb{R}^d$. Если $\mathbf{p}_j \in \pi_r$, положим по определению $\widetilde{\pi}'_r = \pi'_r$. Если $\mathbf{p}_j$ и $\mathbf{p}_{i_r}$ лежат в разных полупространствах, определяемом π_r, то обозначим через $\widetilde{\pi}'_r$ гиперплоскость, параллельную π'_r, лежащую в том полупространстве, определяемом π'_r, которое не содержит $\mathbf{p}_{i_r}$, и которая находится на расстоянии h'_r от π'_r.

Используя (2) и (10)–(12), непосредственно убеждаемся, что $\mathbf{p}'_j \in \widetilde{\pi}'_r$ и $A(\mathbf{p}_j) \in \widetilde{\pi}'_r$. Следовательно, $\mathbf{p}'_j \in \bigcap\limits_{r=0}^{d} \widetilde{\pi}'_r$ и $A(\mathbf{p}_j) \in \bigcap\limits_{r=0}^{d} \widetilde{\pi}'_r$. Поскольку гиперплоскость $\widetilde{\pi}'_r$ параллельна π'_r, а π'_r является аффинной оболочкой гиперграни невырожденного симплекса в $\mathbb{R}^d$, то пересечение $\bigcap\limits_{r=0}^{d} \widetilde{\pi}'_r$ содержит не более одной точки. Значит, $A(\mathbf{p}_j) = \mathbf{p}'_j$ для всех $j \in V(G)$. Это и означает, что построенные выше изометрические вложения $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ являются аффинно эквивалентными. Тем самым импликация $(\beta) \Rightarrow (\alpha)$ доказана. $\square$

§ 5. Заключительные замечания

Теорема 2 позволяет решить не только проблему 1, но и ряд связанных с ней задач. Например, чтобы решить проблему 1 без условия (d), мы должны применить теорему 2 к каждому $\mathbb{R}^m$, $1 \leq m < d$. Другой пример: дан каркас $G(\mathbf{p})$ и мы хотим узнать, существует ли другая геометрическая реализация того же графа G, которая имеет заданные длины ребер λ'_{ij} и при этом аффинно эквивалентна $G(\mathbf{p})$. В этом случае согласно теореме 2 мы должны решить систему (6)–(12), рассматривая z_{ij} как заданные действительные числа, порожденные $G(\mathbf{p})$.

Согласно теореме 2 положительное решение проблемы 1 равносильно существованию решения системы полиномиальных равенств и неравенств (6)–(12) в множестве действительных чисел. Из теоремы Тарского — Зайденберга [7, следствие 3.3.18] следует, что переменные z_{ij} и z'_{ij}, $(i, j) \notin E(G)$, можно исключить из (6)–(12), так что разрешимость этой системы эквивалентна справедливости некоторой бескванторной булевой формулы, атомарные формулы которой являются алгебраическими уравнениями и неравенствами, содержащими только длины стержней λ_{ij} и λ'_{ij}, $(i, j) \in E(G)$. По этой причине мы говорим, что теоретически проблема 1 всегда разрешима. Однако вычислительная сложность известных в настоящее время алгоритмов исключения переменных настолько высока, что их невозможно использовать на практике. По этой причине мы говорим, что не можем предложить никакого практического алгоритма решения проблемы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Connelly R., Guest S. D.* Frameworks, tensegrities, and symmetry. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2022.
2. *Alexandrov V.* How to decide whether two convex octahedra are affinely equivalent using their natural developments only // J. Geom. Graph. 2022. V. 26, N 1. P. 29–38.
3. *Александров В. А.* Распознавание аффинно-эквивалентных многогранников по их натуральным разверткам // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 2. С. 252–275.
4. *Александров А. Д.* Выпуклые многогранники. Новосибирск: Наука, 2007. (Избранные труды; Т. 2).
5. *Blumenthal L. M.* Theory and applications of distance geometry. 2nd ed. New York: Chelsea, 1970.
6. *Havel T., Li H.* From molecular distance geometry to conformal geometric algebra // M. Sitharam (ed.) et al. Handbook of geometric constraint systems principles. Boca Raton: CRC Press, 2019. P. 107–137.
7. *Marker D.* Model theory: an introduction. New York: Springer, 2002. (Grad. Texts Math. V. 217).

Поступила в редакцию 27 июня 2023 г.
После доработки 18 сентября 2023 г.
Принята к публикации 25 сентября 2023 г.

Александров Виктор Алексеевич (ORCID 0000-0002-6622-8214)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет, физический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
alex@math.nsc.ru