Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

A. I. Generalov, Relations for relative Grothendieck groups of rings of finite representation type, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 1995, Volume 227, 61–65

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
http://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.81
January 16, 2025, 08:21:44

А. И. Генералов

СООТНОШЕНИЯ В ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ГРУППАХ ГРОТЕНДИКА КОЛЕЦ КОНЕЧНОГО ТИПА ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Пусть R – кольцо конечного типа представлений, т.е. R – артиново слева и справа кольцо, над которым существует лишь конечное число попарно неизоморфных конечно порожденных неразложимых (левых и правых) R-модулей. Через $\mathrm{mod}R$ обозначим категорию конечно порожденных правых R-модулей, $\mathrm{ind}\,R$ будет обозначать полное множество попарно неизоморных неразложимых модулей в $\mathrm{mod}R$, а через $p.\mathrm{ind}\,R$ обозначаем подмножество в $\mathrm{ind}\,R$, состоящее из проективных модулей. В дальнейшем будут рассматриваться только конечно порожденные правые R-модули.

Короткая точная последовательность в $\mathrm{mod}R$

$$E : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0 \tag{1}$$

называется AR-последовательностью, если она не расщепляется, $A, C \in \mathrm{ind}\,R$, а также выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

а) для любого гомоморфизма $h : X \longrightarrow C$ в $\mathrm{mod}\,R$, не являющегося расщепляющимся эпиморфизмом, существует гомоморфизм $h' : X \longrightarrow B$ такой, что $gh' = h$;

б) для любого гомоморфизма $h : A \longrightarrow X$ в $\mathrm{mod}\,R$, не являющегося расщепляющимся мономорфизмом, существует гомоморфизм $h' : B \longrightarrow X$ такой, что $h'f = f$ (см. [1]).

Хорошо известно [2, 3], что в $\mathrm{mod}R$, где R – кольцо конечного типа представлений, для любого неразложимого неинъективного модуля A (соответственно неразложимого непроективного модуля C) существует единственная с точностью до изоморфизма AR-последовательность вида (1), начинающаяся в A (соответственно оканчивающаяся в C). AR-последовательность, оканчивающуюся в модуле C, будем обозначать через E_C.

Пусть F – аддитивный подфунктор функтора

$$\mathrm{Ext}\,^1_R : (\mathrm{mod}R)^{0p} \times \mathrm{mod}R \longrightarrow \mathcal{A}b.$$

Короткая точная последовательность E вида (1) называется F-точной [4], если E представляет элемент в $F(C, A)$. Пусть G – свободная абелева группа на множестве классов изоморфизма $[M]$ модулей $M \in \operatorname{mod} R$, $H(F)$ – подгруппа в G, порожденная всеми элементами вида $r(E) = [A] - [B] + [C]$, соответствующими F-точным последовательностям E вида (1). Группа $K_0(R,F) = G/H(G)$ называется относительной группой Гротендика категории $\operatorname{mod} R$ (относительно функтора F). Имеется каноническая короткая точная последовательность

$$0 \longrightarrow E(R,F) \longrightarrow K_0(R,0) \xrightarrow{\Phi} K_0(R,F0 \longrightarrow 0.$$

Поскольку группа $K_0(R,0)$, соответствующая нулевому подфунктору в $\operatorname{Ext} \frac{1}{R}$, является свободной абелевой группой на множестве классов изоморфизма неразложимых модулей, то группу $E(R,F)$ естественно назвать группой соотношений в группе $K_0(R,F)$.

Заметим, что определение группы $K_0(R,F)$ обощает определение относительных групп Гротендика, соответствующих собственным классам коротких точных последовательностей (см. [5]), так как таким собственным классам отвечают подфункторы F и $\operatorname{Ext} \frac{1}{R}$, для которых справедливы аналоги длинных точных когомологических последовательностей [6].

Теорема 1. *Пусть R – кольцо конечного типа представлений. Тогда группа $E(R,F)$ свободно порождена множеством $\{r(E)\}$, где E пробегает множество всех F-точных AR-последовательностей.*

Эта теорема обобщает соответствующие результаты работ [5, 7, 8].

Модуль $M \in \operatorname{mod} R$ называется F-проективным (соответственно F-инъективным), если для любой F-точной последовательности E вида (1) точна индуцированная последовательность

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M,A) \xrightarrow{f_*} \operatorname{Hom}_R(M,B) \xrightarrow{g_*} \operatorname{Hom}_R(M,C) \longrightarrow 0 \qquad (2)$$

(соответственно точна последовательность)

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(C,M) \xrightarrow{g_*} \operatorname{Hom}_R(B,M) \xrightarrow{f_*} \operatorname{Hom}_R(A,M) \longrightarrow 0).$$

Предложение 2. а) *Неразложимый непроективный модуль M является F-проективным тогда и только тогда, когда AR-последовательность, оканчивающаяся в M, не F-точна.*

б) *Неразложимый неинъективный модуль M является F-инъективным тогда и только тогда, когда AR-последовательность, начинающаяся в M, не F-точна.*

Доказательство. а) Необходимость указанного условия очевидна. Обратно, предположим, что AR-последовательность E_M не F-точна, и пусть дана F-точная последовательность E вида (1). Рассмотрим произвольный гомоморфизм $\lambda : M \to C$ и построим следующую коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{tikzcd}
E_1 = \lambda^*(E) : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, "h"] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"] & 0 \\
E : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd} \tag{3}$$

Так как F – подфунктор в $\operatorname{Ext}\frac{1}{R}$, то верхняя строка E_1 этой диаграммы F-точна. Предположим, что она не расщепляется, и рассмотрим AR-подпоследовательность

$$E_M : 0 \longrightarrow N \xrightarrow{\sigma} L \xrightarrow{\tau} M \longrightarrow 0.$$

Тогда существует гомоморфизм h' такой, что $\tau h' = h$, и можно построить следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
E_1 : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h''"'] & X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "h'"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
E_M : 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\sigma"] & L \arrow[r, "\tau"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Из нее получаем, что $E_M = (h'')_*(E_1)$, и следовательно, последовательность E_M – F-точна, что противоречит предположению. Таким образом, в диаграмме (3) последовательность E_1 расщепляется, и тогда существует гомоморфизм $\lambda' : M \to B$ такой, что $g\lambda' = \lambda$.

б) Доказательство дуально а).

Аналогично [8] (см. также [5]) на группе $K = K_0(R, 0)$ вводится билинейная форма

$$\langle - - \rangle : K \times K \to \mathbb{Z}$$

такая, что для M, $N \in \operatorname{ind} R$

$$\langle M\ N \rangle = l_{\operatorname{End} M} \operatorname{Hom}_R(M, N),$$

где $l_S X$ обозначает композиционную длину S-модуля X. Заметим, что над кольцом конечного типа представлений $\operatorname{Hom}_R(M, N)$ является правым $\operatorname{End} M$-модулем конечной длины для любых M, $N \in \operatorname{mod} R$ [5].

Рассмотрим также гомоморфизм $V : K \to K$ такой, что:

$$V[M] = r(E_M), \quad \text{если} \quad M \in R \setminus p.\mathrm{ind}\, R;$$
$$V[M] = [M] - [\mathrm{Rad}\, M], \quad \text{если} \quad M \in p.\mathrm{ind}\, R$$

Лемма 3. *Пусть* $\mathrm{ind}\, R = \{M_1, \dots, M_n\}$.

а) *Множество* $\{V[M_i] \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ *линейно независимо над* $\mathbb{Z}$.

б) *Для любого* $x \in K$ $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle M_i, x\rangle V[M_i]$.

Доказательство см. в [5, 8].

Доказательство теоремы 1. Ввиду предложения 2 для всех неразложимых непроективных модулей M, не являющихся F-проективными, имеем $V[M] \in \mathrm{Ker}\, \Phi = E(R, F)$. Далее, пусть $x = r(E) \in \mathrm{Ker}\, \Phi$, где E – F-точная последовательность вида (1). По лемме 3 $x = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i V[M_i]$, где $a_i = \langle M_i, x\rangle$. Для модуля $M_i \in \mathrm{ind}\, R$, являющегося F-проективным, из короткой точной последовательности (2) следует, что

$$a_i = \langle M_i, x\rangle = \langle M_i, A\rangle - \langle M_i, B\rangle + \langle M_i, C\rangle = 0.$$

По линейности получаем, что для любых $x \in \mathrm{Ker}\, \Phi$ если $x = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i V[M_i]$, то $a_i = 0$ для любого F-проективного модуля M_i. Таким образом множество

$$\{V[M] \mid M \in \mathrm{ind}\, R, M \quad \text{не} \quad F - \text{проективен}\}$$

порождает группу $E(R, F)$, а ввиду предложения 2 это множество совпадает с множеством $\{r(E)\}$, где E пробегает F-точные AR-последовательности, причем линейная независимость этого множества вытекает из леммы 3 а).

Литература

1. M. Auslander and I. Reiten *Represenration theory of artin algebras, III.* — Comm. Algebra **3**, **No. 3** (1975), 239–294.
2. M. Auslander *Represenration theory of artin algebras, II.* — Comm. Algebra **1**, **No. 4** (1974), 269–310.
3. K. Yamagata *On artinian rings of finite representation type.* — J. Algebra **50**, **No. 2** (1978), 276–283.
4. S. A. Sikko and S. O. Smalo *Extensions of homological finite subcategories.* — Arch. Math. **60**, **No. 6** (1993), 517–526.

5. А. И. Генералов *Теорема Батлера–Ауслундера и* Hom*-матрица над кольцами конечного типа представлений. В кн: Алгебраические системы.* Волгоград (1989).
6. А. П. Мишина, Л. А. Скорняков *Абелевы Группы и Модули.* М., Наука (1969).
7. M. C. R. Butler *Grothendieck groups and almost split sequences.* — Lect Notes Math. **882** (1981), 357–368.
8. M. Auslander *Relations for Grothendieck groups of artin algebras.* — Proc. Amer. Math. Soc. **91, No. 3** (1984), 336–340.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 11 января 1995 г.