В. А. Дмитровский, С. В. Ермаков, Е. И. Островский, Центральная предельная теорема для слабозависимых величин со значениями в банаховом пространстве,
Теория вероятн. и ее примен., 1983, том 28, выпуск 1, 83–97

https://www.mathnet.ru/tvp2156

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
Том XXVIII 1983 Выпуск 1

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СЛАБОЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН СО ЗНАЧЕНИЯМИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ДМИТРОВСКИЙ В. А., ЕРМАКОВ С. В., ОСТРОВСКИЙ Е. И.

Введение

Пусть T — метрический компакт относительно метрики ρ, $C(T, \rho)$ — пространство непрерывных функций на T, $\xi = \{\xi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность центрированных полей, принадлежащих $C(T, \rho)$ с вероятностью единица. Предполагается, что $D\xi_i(t) < \infty$ для любого $t \in T$. Будем говорить, что *последовательность* ξ *удовлетворяет центральной предельной теореме* (ц. п. т.), если последовательность нормированных сумм $S_n(t) = n^{-1/2}(\xi_1(t) + \ldots + \xi_n(t))$ слабо сходится при $n \to \infty$ к непрерывному с вероятностью единица гауссовскому полю. Ряд достаточных условий справедливости ц. п. т. в случае независимых полей $\xi_i(t)$ имеется в [1—3]. Для других банаховых пространств ц. п. т. приведена в [4—6], [16—18].

При доказательстве ц. п. т. необходимо установить сходимость конечномерных (т. е. цилиндрических) распределений, убедиться в слабой компактности семейства мер в $C(T, \rho)$, порожденных последовательностью $S_n(t)$, и проверить непрерывность предельного поля. Основным этапом является доказательство слабой компактности, поскольку условия на $\xi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, налагаемые при этом, будут гарантировать справедливость обоих оставшихся свойств.

Результаты работы были частично изложены на первом Всесоюзном совещании — семинаре «Гауссовские случайные процессы и поля. Свойства реализаций.»

§ 1. Обозначения и вспомогательные предложения

Введем некоторые используемые в тексте обозначения. Если η — одномерная случайная величина, то $\|\eta\|_p = (\mathbf{M}|\eta|^p)^{1/p}$, $p \geqslant 1$. Производящей функцией моментов величины η называется функция $\exp \Psi(\lambda) = \mathbf{M} \exp(\lambda\eta)$. Функция $\Psi(\lambda)$ конечна, если η удовлетворяет известному условию Крамера. Для симметрично распределенных величин выполняется равенство $\Psi(\lambda) = \ln \mathbf{M}\, \mathrm{ch}(\lambda\eta)$. Для произвольной функции $f(x)$, определенной на полуоси $x > 0$, преобразованием Юнга — Фенхеля (или Лежандра) называется функция

$$f^*(y) = \sup_{x>0}(xy - f(x)).$$

Свойства преобразования $f \to f^*$ приведены в [7, с. 183]. Копреобразованием Юнга — Фенхеля назовем функцию

$$f_*(y) = \inf_{x>0}(xy + f(x)).$$

Пусть (T, ρ) — метрическое пространство. Энтропией T в метрике ρ в смысле Колмогорова называется функция $H(\varepsilon, \rho)$, равная натуральному логарифму числа точек $N(\varepsilon, \rho)$ наименьшей ε-сети множества T в метрике ρ. Если T — компакт, то функция $H(\varepsilon, \rho)$ конечна для любого $\varepsilon > 0$: $H(\varepsilon, \rho) = \ln N(\varepsilon, \rho)$.

Будем писать $f_1(x) \ll f_2(x)$, если $f_1(x) \leqslant f_2(cx)$ для некоторого $C > 0$ и всех $x > 1$. Если $f_1(x) \ll f_2(x)$ и одновременно $f_2(x) \ll f_1(x)$, будем писать $f_1(x) \sim f_2(x)$. Отношение $f_1(x) \sim f_2(x)$ есть отношение эквивалентности, т. е. оно рефлексивно, симметрично, транзитивно. Например, $\exp\{C_1(x + C_2)^2\} \sim \exp x^2$. Условимся обозначать C положительные постоянные, не обязательно одни и те же в различных утверждениях. Мы будем предполагать, что последовательность ξ образует стационарный в узком смысле процесс относительно i с нулевым средним, удовлетворяющий либо условию сильного перемешивания (с. п.) с коэффициентом с. п. $\alpha(\tau)$, либо условию равномерно сильного перемешивания (р. с. п.) с коэффициентом р. с. п. $\varphi(\tau)$.

Лемма 1.1. *Пусть $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ — две σ-подалгебры основного вероятностного пространства, ξ и η — случайные величины, измеримые относительно $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$.*

Тогда

$$|M\xi\eta - M\xi M\eta| \leqslant C\alpha^{1-(1/p+1/q)} \|\xi\|_p \|\eta\|_q, \tag{1}$$
$$p, q > 1, \quad 1/p + 1/q \leqslant 1, \quad C \leqslant 16.$$

Замечание. Если φ — коэффициент р. с. п. между ξ и η, то имеет место оценка

$$|M\xi\eta - M\xi M\eta| \leqslant 2(\varphi)^{1/p} \|\xi\|_p \|\eta\|_q, \quad 1/p + 1/q = 1. \tag{2}$$

Лемма 1.1 доказана в [13], замечание к ней — в [8].

Лемма 1.2. *Пусть случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ одинаково распределены и измеримы относительно σ-алгебр $\mathcal{F}_i$, $i = 1, \ldots, n$, соответственно, $(i_1, \ldots, i_l)$ и $(j_1, \ldots, j_r)$ — несовпадающие наборы индексов из $1, \ldots, n$. Положим*

$$\alpha = \sup \alpha\Big(\bigcup_{k=1}^{l} \mathcal{F}_{i_k}, \bigcup_{s=1}^{r} \mathcal{F}_{j_s}\Big),$$

$$\varphi = \sup \varphi\Big(\bigcup_{k=1}^{l} \mathcal{F}_{i_k}, \bigcup_{s=1}^{r} \mathcal{F}_{j_s}\Big).$$

Тогда справедливы неравенства

$$\Big|M\prod_{i=1}^{n} \xi_i - \prod_{i=1}^{n} M\xi_i\Big| \leqslant 2n\varphi^{1/n} \|\xi\|_n^n, \tag{3}$$

$$\Big|M\prod_{i=1}^{n} \xi_i - \prod_{i=1}^{n} M\xi_i\Big| \leqslant Cn\alpha^{1-(n/p)} \|\xi\|_p^n, \quad p > n. \tag{4}$$

Доказательство. Оба неравенства доказываются по индукции. При $n = 2$ они верны в силу леммы 1.1 и замечания к ней. Сделаем теперь индуктивный переход в условиях р. с. п. В силу неравенства (2) имеем:

$$\left|\mathbf{M}\prod_{i=1}^{n+1}\xi_i-\prod_{i=1}^{n+1}\mathbf{M}\xi_i\right|\leqslant\left|\mathbf{M}\prod_{i=1}^{n+1}\xi_i-\mathbf{M}\xi_{n+1}\mathbf{M}\prod_{i=1}^{n}\xi_i\right|+$$
$$+\left|\mathbf{M}\xi_{n+1}\mathbf{M}\prod_{i=1}^{n}\xi_i-\mathbf{M}\xi_{n+1}\prod_{i=1}^{n}\mathbf{M}\xi_i\right|\leqslant$$
$$\leqslant 2\varphi^{1/p}\left\|\prod_{i=1}^{n}\xi_i\right\|_p\|\xi_{n+1}\|_q+2n\varphi^{1/n}\|\xi_{n+1}\|_1\prod_{i=1}^{n}\|\xi_i\|_n.$$

По неравенству Гельдера $\left\|\prod_{i=1}^{n}\xi_i\right\|_p\leqslant\|\xi\|_{np}^{n}$. Выбирая $q=n+1$, $p=1+$ $+(1/n)$, оценим первое слагаемое:

$$2\varphi^{1/p}\left\|\prod_{i=1}^{n}\xi_i\right\|_p\|\xi\|_q\leqslant 2\varphi^{1/(n+1)}\|\xi\|_{n+1}^{n+1}.$$

Второе слагаемое оценим, используя неравенство Минковского:

$$\|\xi\|_1\leqslant\|\xi\|_{n+1},\qquad \|\xi_i\|\leqslant\|\xi_i\|_{n+1},$$
$$2n\varphi^{1/n}\|\xi_{n+1}\|_1\prod_{i=1}^{n}\|\xi_i\|_n\leqslant 2n\varphi^{1/n}\|\xi\|_{n+1}^{n+1}.$$

В итоге имеем:

$$\left|\mathbf{M}\prod_{i=1}^{n+1}\xi_i-\prod_{i=1}^{n+1}\mathbf{M}\xi_i\right|\leqslant 2\varphi^{1/(n+1)}\|\xi\|_{n+1}^{n+1}+2n\varphi^{1/n}\|\xi\|_{n+1}^{n+1}\leqslant$$
$$\leqslant 2(n+1)\varphi^{1/(n+1)}\|\xi\|_{n+1}^{n+1}.$$

Выполним теперь аналогично индуктивный переход в формуле (1):

$$\left|\mathbf{M}\prod_{i=1}^{n+1}\xi_i-\prod_{i=1}^{n+1}\mathbf{M}\xi_i\right|\leqslant\left|\mathbf{M}\prod_{i=1}^{n+1}\xi_i-\mathbf{M}\prod_{i=1}^{n}\xi_i\mathbf{M}\xi_{n+1}\right|+$$
$$+\left|\mathbf{M}\prod_{i=1}^{n}\xi_i\mathbf{M}\xi_{n+1}-\prod_{i=1}^{n}\mathbf{M}\xi_i\mathbf{M}\xi_{n+1}\right|\leqslant C\alpha^{1-(1/p)-(1/q)}\left\|\prod_{i=1}^{n}\xi_i\right\|_p\|\xi_{n+1}\|_q+$$
$$+\|\xi_{n+1}\|_1 Cn\alpha^{1-(n/q)}\prod_{i=1}^{n}\|\xi_i\|_q\leqslant C\alpha^{1-(1/p)-(1/q)}\|\xi\|_q\|\xi\|_{np}^{n}+$$
$$+Cn\alpha^{1-(n/q)}\|\xi\|_q^{n+1}\leqslant C\alpha^{1-(n+1)/q}\|\xi\|_q^{n+1}+$$
$$+Cn\alpha^{1-(n+1)/q}\|\xi\|_q^{n+1}=C(n+1)\alpha^{1-(n+1)/q}\|\xi\|_q^{n+1}.$$

(Мы выбрали $q=np$.)

Лемма доказана.

Для оценки «хвостов» распределений случайных величин удобно пользоваться производящей функцией моментов. Пусть ξ — симметричная (для простоты) случайная величина,

$$\Psi(\lambda)=\ln\mathbf{M}\,\mathrm{ch}(\lambda\xi)=\ln\mathbf{M}\exp(\lambda\xi),\qquad\lambda>0,$$
$$\bar F(x)=\mathbf{P}(\xi\geqslant x).$$

Лемма 1.3. (Неравенство Чернова.) *Справедливо неравенство*

$$\bar F(x)\leqslant\exp\{-\Psi^*(x)\}.\tag{5}$$

Доказательство. По неравенству Чебышева

$$\bar F(x)=\mathbf{P}(\xi\geqslant x)\leqslant e^{-\lambda x}\mathbf{M}e^{\lambda\xi}=\exp\{-(\lambda x-\Psi(\lambda))\}.$$

Минимизируя правую часть по λ, получаем (5).

Лемма доказана.

Как уже отмечалось, нам потребуются условия непрерывности и слабой компактности семейства мер, порожденных непрерывными случайными полями в $C(T, \rho)$. Пусть $\xi_\alpha(t)$ $(t \in T,\ \alpha = 1, 2, \ldots)$ — случайные поля, ρ — псевдометрика на T. Введем обозначение

$$h(x) = \sup_\alpha \sup_{t \neq s} \mathbf{P}(|\xi_\alpha(t) - \xi_\alpha(s)| / \rho(t, s) > x)$$

и предположим, что для некоторого $t_0 \in T$ семейство мер, индуцированное на числовой прямой величинами $\xi_\alpha(t_0)$, слабо компактно. (Для определенности можно считать, что $\sup_\alpha \mathrm{D}\xi_\alpha(t_0) < \infty$.)

Теорема 1.1. *Пусть поля $\xi_\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots$, сепарабельны относительно ρ. Если для некоторого $C > 0$ сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} N^2(\rho, 2^{-n}) h_*(C2^{-n}N^{-2}(\rho, 2^{-n})), \tag{6}$$

то все поля $\xi_\alpha(t)$ непрерывны с вероятностью единица и порожденное ими семейство мер в $C(T, \rho)$ слабо компактно.

Доказательство. Докажем непрерывность (компактность доказывается аналогично). По определениям нижней грани и копреобразования $h \to h_*$ существует такая последовательность $\{x_n\}$, $x_n > 0$, что

$$Cx_n 2^{-n}N^{-2}(\rho, 2^{-n}) + h(x_n) < h_*(C2^{-n}N^{-2}(\rho, 2^{-n})) + 2^{-n}N^{-2}(\rho, 2^{-n}).$$

Из условия теоремы следует сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n C 2^{-n} + N^2(\rho, 2^{-n}) h(x_n)).$$

Поскольку $Cx_n 2^{-n}$ и $N^2(\rho, 2^{-n}) h(x_n)$ неотрицательны, сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} N^2(\rho, 2^{-n}) h(x_n).$$

Введем обозначение $b_n = 2^{-n+2} x_n$; имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} N^2(\rho, 2^{-n}) h(b_n 2^{n-2}) < \infty.$$

По лемме 1 работы [3] поля $\xi_\alpha(t)$ непрерывны с вероятностью единица в псевдометрике ρ. В той же работе на с. 220 доказывается и факт, из которого при помощи наших рассуждений выводится слабая компактность семейства мер, порожденных полями $\xi_\alpha(t)$.

Теорема доказана. ▮

Определим метрику $\rho_p(t, s)$ формулой

$$\rho_p^p(t, s) = \sup_\alpha \mathrm{M} |\xi_\alpha(t) - \xi_\alpha(s)|^p.$$

Следствие 1. *Условие компактности величин $\xi_\alpha(t_0)$ и сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-np/(p+1)} N^{2/(p+1)}(\rho_p, 2^{-n}) \tag{7}$$

гарантируют непрерывность полей $\xi_\alpha(t)$ и их слабую компактность в пространстве $C(T, \rho_p)$.

Действительно, по неравенству Чебышева

$$\mathbf{P}\left(\frac{|\xi_\alpha(t)-\xi_\alpha(s)|}{\rho_p(t,s)}>x\right)\leqslant\frac{\sup\limits_\alpha \mathbf{M}\,|\xi_\alpha(t)-\xi_\alpha(s)|^p}{\rho_p^p(t,s)\,x^p}\leqslant\frac{1}{x^p}.$$

Поэтому

$$h_*(x)=\inf_{y\geqslant 0}(xy+y^{-p})\sim x^{p/(p+1)},$$

что в силу (6) влечет (7).

Следствие 2. *Предположим, что для некоторой псевдометрики* $\rho(t, s)$ *выполнено неравенство*

$$\sup_\alpha \mathbf{M}\,\mathrm{ch}\left\{\lambda\frac{\xi_\alpha(t)-\xi_\alpha(s)}{\rho(t,s)}\right\}\leqslant\exp\{|\lambda|^p\}. \tag{8}$$

Условие слабой компактности величин $\xi_\alpha(t_0)$ *и сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}H^{1/q'}(2^{-n},\rho), \tag{9}$$

где

$$1/q'=\max(1/2,\ 1/p),\quad 1/q+1/p=1,$$

гарантируют слабую компактность $\xi_\alpha(t)$ *в пространстве* $C(T,\rho)$.

Доказательство. Из ограниченности $\mathbf{M}\,\mathrm{ch}(\lambda\eta)$ при $\lambda>1$ вытекает неравенство $\mathbf{M}\,\mathrm{ch}(\lambda\eta)\leqslant C\exp\lambda^2$ при $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, поэтому из неравенства (8) следует соотношение

$$\mathbf{M}\,\mathrm{ch}\left\{\lambda\frac{\xi_\alpha(t)-\xi_\alpha(s)}{\rho(t,s)}\right\}\leqslant\exp(\lambda^2 I_{\lambda\leqslant 1}+|\lambda|^p I_{\lambda>1}),$$

из которого с помощью (5) выводим оценку

$$\mathbf{P}\left(\frac{\xi_\alpha(t)-\xi_\alpha(s)}{\rho(t,s)}>x\right)\leqslant\exp\{-x^{q'}\}.$$

Поскольку

$$h_*(x)=\inf_y(xy+\exp\{-y^{q'}\})\leqslant Cx\,|\ln^{1/q'}\frac{1}{x}|, \tag{10}$$

доказываемое утверждение следует из теоремы 1.1 (см. также [19], где, впрочем, не используется копреобразование $h_*(x)$).

§ 2. Оценки распределений сумм случайных величин

Пусть ξ_i — центрированные одномерные случайные величины, $S_n = n^{-1/2}(\xi_1+\ldots+\xi_n)$. Цель настоящего параграфа — вывод оценок распределения S_n, равномерных по n. Будет предполагаться, что случайные величины ξ_i одинаково распределены и симметричны. *Степенными* назовем оценки, включающие степенные моменты S_n. Неравенства для производящей функции моментов $\exp\Psi_n(\lambda)=\mathbf{M}\exp(\lambda S_n)$, содержащие функцию $\Psi(\lambda)=\ln\mathbf{M}\exp(\lambda\xi)$, именуются в дальнейшем *экспоненциальными.*

Некоторые из выводимых ниже оценок широко представлены в литературе в разрозненном виде; см., например, [14]; мы их воспроизводим здесь без доказательств для единообразия и удобства читателя. Следующий результат почти очевиден. Положим

$$\overline{\Psi}(\lambda)=\sup_n\Psi(\lambda/\sqrt{n})n.$$

Лемма 2.1. *Справедливо неравенство*

$$\sup_n \mathbf{P}\,(|\,S_n\,| > x) \leqslant \exp\,(-\overline{\Psi}^*\,(x)). \tag{11}$$

Действительно,

$$\exp \Psi_n(\lambda) = \mathbf{M} \exp\left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \exp n\Psi\,(\lambda/\sqrt{n}) \leqslant \exp \overline{\Psi}\,(\lambda).$$

Остается воспользоваться оценкой (5). Пусть, например, ξ удовлетворяет неравенству

$$\mathbf{M}\,\mathrm{ch}\,(\lambda\xi) \leqslant \exp \lambda^p, \quad p > 1, \quad \lambda > 1.$$

Положим $p' = \max\,(p, 2)$; имеем: $\Psi\,(\lambda) \leqslant \lambda^{p'}$. Поскольку $\Psi\,(\lambda) \leqslant \lambda^2$ при $\lambda \in [0, 1]$, при всех $\lambda > 0$ имеем оценку $\Psi\,(\lambda) \leqslant \lambda^{p'}$. Точно так же оценивается $\overline{\Psi}\,(\lambda)$:

$$n\Psi\,(n^{-1/2}\lambda) \leqslant n\,(\lambda/\sqrt{n})^{p'} = n^{1-(p'/2)}\lambda^{p'} \leqslant \lambda^{p'}.$$

Поэтому

$$\sup_n \ln \mathbf{P}\,(|\,S_n\,| > x) \leqslant -\sup_{\lambda>0}\,(x\lambda - \lambda^{p'}) \sim$$
$$\sim -x^{q'}, \quad 1/q' + 1/p' = 1.$$

Лемма доказана.

Теорема 2.1. *Справедливо неравенство*

$$\sup_n \Psi_n\,(\lambda) \leqslant \exp \Psi\,(\lambda). \tag{12}$$

Доказательство. Учитывая симметрию величин ξ_i и оценку $n^{-k/2} \leqslant n^{-1}$, $k \geqslant 2$, имеем:

$$\exp \Psi_n(\lambda) = \mathbf{M} \exp(\lambda S_n/\sqrt{n}) = [\mathbf{M} \exp(\lambda\xi/\sqrt{n})]^n =$$
$$= \left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k \mathbf{M}\xi^k}{k!\, n^{k/2}}\right]^n \leqslant \left[1 + \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k \mathbf{M}\xi^k}{k!}\right]^n <$$
$$< \exp \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \mathbf{M}\xi^k}{k!} = \exp \mathbf{M} \exp \lambda\xi = \exp \exp \Psi(\lambda).$$

Теорема доказана.

Следствие. *Имеет место оценка*

$$\sup_n \mathbf{P}\,(|\,S_n\,| > x) \leqslant \exp\,(-f^*\,(x)),$$

где $f\,(x) = \exp \Psi\,(x)$.

Предположим теперь, что одномерные симметричные величины ξ_i, $i = 1, 2, \ldots$, образуют стационарную в узком смысле последовательность. Обозначим через $\alpha\,(i)$ коэффициент сильного перемешивания (с. п.): $\alpha\,(i) = \alpha\,(\mathcal{F}^{0}_{-\infty}, \mathcal{F}^{\infty}_{i})$, где $\mathcal{F}^{b}_{a} = \sigma\,(\xi_k,\ a \leqslant k \leqslant b)$. Если $\lim_{i\to\infty} \alpha\,(i) = 0$, то говорят, что ξ_i удовлетворяют условию с. п.

Теорема 2.2. *Пусть* ξ_i, $i = 1, 2, \ldots$, *имеют коэффициент с. п.* $\alpha\,(i)$, *удовлетворяющий для некоторого* $p > 0$ *и целого* l, $2l < p$, *условию*

$$\sup_{n\geqslant 1} n^{1-l} \sum_{i=1}^{n} i^{2l-2} \alpha^{1-(2l/p)}\,(i) < \infty. \tag{13}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\sup_{n\geqslant 1} \|\,S_n\,\|_{2l} \leqslant C\,(l, p)\,\|\,\xi\,\|_p. \tag{14}$$

Доказательство теоремы 2.2 проводится аналогично доказательству в монографии [1, с. 239] для случая $p = 4$. ∎

Для симметричных центрированных величин ξ_i, удовлетворяющих условию равномерно сильного перемешивания (р. с. п.), с коэффициентом р. с. п. $\varphi(i)$ (определения см. в [8, с. 388]), можно вывести следующие оценки.

Теорема 2.3. *Пусть* а) $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi(k)=0$, б) $\sup\limits_n \mathbf{D}S_n=\sigma^2<\infty$.

Тогда существует такая константа $C(2l)$, *что верно неравенство*:

$$\mathbf{M}S_n^{2l}\leqslant C(2l)\,\mathbf{M}\xi^{2l}. \tag{15}$$

Замечание. Если $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varphi^{1/2}(k)<\infty$, то условия а и б выполняются автоматически.

Доказательство. Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\mathbf{M}S_n^{2l}=0$ или $\mathbf{M}\xi^{2l}=\infty$, то формула (15) очевидна. Поэтому будем предполагать, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\mathbf{M}S_n^{2l}>0$ и $\mathbf{M}\xi^{2l}<$ $<\infty$. Введем обозначения

$$\eta_n=\sum_{j=1}^{n}\xi_j,\quad \hat\eta_n=\sum_{j=n+k+1}^{2n+k}\xi_j,\quad a_n^{(2l)}=\mathbf{M}S_n^{2l}.$$

Пользуясь индукцией по l и методами монографии [8, с. 432], можно получить неравенство

$$\mathbf{M}\,|\,\eta_n+\hat\eta_n\,|^{2l}\leqslant 2\,(1+d)\,a_n^{(2l)}+D(l)\,\mathbf{M}\xi^{2l}n^l,$$

где

$$d=(1+\varphi^{1/(2l)}(k))^{2l},\quad D(l)=\sum_{s=1}^{l-1}C_{2l}^{2s}C(2s)\,C(2l-2s),$$

из которого вытекает рекуррентное неравенство для $a_n^{(2l)}$:

$$a_{2n}^{(2l)}\leqslant 2\,(1+d)\left(1+\frac{2k}{\sqrt{n}}\right)^{2l}a_n^{(2l)}+D(l)\left(1+\frac{2k}{\sqrt{n}}\right)^{2l}\mathbf{M}\xi^{2l}n^l. \tag{16}$$

Действительно, представив $a_{2n}^{(2l)}$ в виде

$$a_{2n}^{(2l)}=\Big\|\,\eta_n+\sum_{j=n+1}^{n+k}\xi_j+\hat\eta_n-\sum_{j=2n+1}^{2n+k}\xi_j\Big\|_{2l}^{2l}$$

и воспользовавшись неравенством Минковского, приходим к (16). Для продолжения доказательства нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 2.2. *Пусть неотрицательная последовательность* b_n *удовлетворяет неравенству* $b_{2n}<Cb_n+D$, *где* $C<1$.

Тогда

$$b_{2^r}<b_1+\frac{D}{1-C}.$$

Доказательство. Положим $b_n=\beta_n+D/(1-C)$. Тогда $\beta_1=$ $=b_1-D/(1-C)<b_1$ и $\beta_{2n}\leqslant C\beta_n<\beta_n$. Следовательно, $\beta_2\leqslant C\beta_1<$ $<\beta_1$, $\beta_4\leqslant C\beta_2<\beta_1$, ..., $\beta_{2^r}<\beta_1<b_1$.

Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы. Положим $a_n^{(2l)}=b_n^{(2l)}n^l$. Неравенство (16) примет тогда вид

$$b_{2n}^{(2l)}\leqslant 2^{1-l}(1+d)\left(1+\frac{2k}{\sqrt{n}}\right)^{2l}b_n^{(2l)}+D(l)\,2^{-l}\left(1+\frac{2k}{\sqrt{n}}\right)^{2l}\mathbf{M}\xi^{2l}.$$

Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} d = 1$ по условию р. с. п., можно выбрать такое k_0, при котором $1 + d < 2{,}1$, и тогда

$$\lim_{n\to\infty} 2^{1-l}(1+d)\left(1+\frac{2k}{\sqrt{n}}\right)^{2l} = 2^{1-l}2{,}1 < 1, \quad l = 3, 4, \ldots$$

Следовательно, существует такое n_0, что при $n \geqslant n_0$

$$2^{1-l}(1+d)\left(1+\frac{2k_0}{\sqrt{n}}\right)^{2l} < C < 1.$$

Согласно лемме 2.2 получаем:

$$b_{2^r}^{(2l)} < \mathbf{M}\xi^{2l} + \frac{\widetilde{D}(l)\,\mathbf{M}\xi^{2l}}{1-C},$$

где

$$\widetilde{D}(l) = D(l)\,2^{-l}\left(1+\frac{2k_0}{\sqrt{n_0}}\right)^{2l},$$

или

$$b_{2^r}^{(2l)} < \frac{2\widetilde{D}(l)}{1-C}\,\mathbf{M}\xi^{2l}.$$

Поэтому

$$a_{2^r}^{(2l)} < \frac{2\widetilde{D}(l)}{1-C}\,\mathbf{M}\xi^{2l}2^{lr}.$$

Рассуждая так же, как в [8, с. 432], получим:

$$a_n^{(2l)} < C(2l)\,\mathbf{M}\xi^{2l}n^l,$$

где

$$C(2l) = \frac{2\left(1+2k_0/\sqrt{n_0}\right)^{2l}}{1-C}\,\frac{(\sqrt{2}+1)^{2l}}{2^l}\sum_{s=1}^{l-1} C_{2l}^{2s}C(2s)\,C(2l-2s),$$

что доказывает неравенство (15) для $n > n_0$. При $n < n_0$

$$a_{2n}^{(2l)} = \Big\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i \Big\|_{2l}^{2l} \leqslant (n\,\|\xi\|_{2l})^{2l} \leqslant n_0^{2l}\mathbf{M}\xi^{2l}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.4. *Пусть существует выпуклая функция* $h(\lambda)$, $\lambda > 1$, *удовлетворяющая условиям*

1) *существует такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что для всякого* $\delta < 1$

$$h(\delta\lambda) \leqslant (1-\varepsilon_0)\delta^2 h(\lambda);$$

2) *существует набор таких констант* α, β, γ, *что* $1 > \alpha > \frac{1}{2} + \beta > 0$, $\gamma > 0$ *и в области* $\lambda > 1$

$$\lim_{n\to\infty} 2n^{1-\alpha}\varphi^{n^{\alpha-1}}(n^{\beta}\lambda^{\gamma})\exp h(\lambda p n^{(1-\alpha)/2}) = 0;$$

3) *справедливо соотношение*

$$h(\lambda) \leqslant \Psi(\lambda^{1+\gamma}).$$

Тогда

$$\sup_{n\geqslant 1} \ln \mathbf{M}\exp(\lambda S_n) \leqslant h(\lambda).$$

Следствие. *В предположениях теоремы* 2.4

$$\sup_n \mathbf{P}(|S_n| > x) \leqslant \exp(-h^*(x)).$$

Доказательство теоремы. Введем обозначение: $h_n(\lambda) = \ln \mathbf{M} \exp(\lambda S_n)$. Положим

$$m = [n^\alpha], \quad k = [n^\beta \lambda^\gamma] + 2, \quad N = \left[\frac{n}{m+k}\right] \sim n^{1-\alpha}.$$

Представим сумму S_n в виде

$$S_n = (X_1 + Y_1 + \ldots + X_N + Y_N)/\sqrt{n},$$

где

$$X_1 = \xi_1 + \ldots + \xi_m, \quad Y_1 = \xi_{m+1} + \ldots + \xi_{m+k},$$
$$X_l = T^{lm+(l-1)k} X_1, \quad Y_l = T^{l(m+k)} Y_1,$$

T — оператор сдвига, степенной индекс которого совпадает с индексом последнего слагаемого в суммах X_l и Y_l соответственно. По неравенству Гельдера с учетом неравенства (4) имеем:

$$\exp\{h_n(\lambda)\} = \mathbf{M} \exp(\lambda S_n/\sqrt{n}) =$$
$$= \mathbf{M} \exp\{\lambda (X_1 + \ldots + X_N)/\sqrt{n}\} \exp\{\lambda (Y_1 + \ldots + Y_N)/\sqrt{n}\} \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{M}^{1/p} \exp\left\{\lambda p \sum_{i=1}^{N} X_i/\sqrt{n}\right\} \mathbf{M}^{1/q} \exp\left\{\lambda q \sum_{i=1}^{N} Y_i/\sqrt{n}\right\} = A^{1/p} B^{1/q},$$

где

$$A = \mathbf{M} \prod_{i=1}^{N} \exp(\lambda p X_i/\sqrt{n}) \leqslant \exp\{N h_m(\lambda p \sqrt{m}/\sqrt{n})\} +$$
$$+ 2N \varphi^{1/N}(k) \exp\{h_m(\lambda p N \sqrt{m}/\sqrt{n})\} = A_1 + A_2,$$
$$B \leqslant \exp\{\Psi(\lambda q N k/\sqrt{n})\}, \quad 1/p + 1/q = 1.$$

По условию $A_2 \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому

$$h_n(\lambda) \leqslant N p^{-1} h_m\left(\frac{\lambda p \sqrt{m}}{\sqrt{n}}\right) + 1{,}01 q^{-1} \Psi\left(\frac{\lambda q N k}{\sqrt{n}}\right). \tag{17}$$

Сделаем теперь предположение индукции $h_m(\lambda) \leqslant h(\lambda)$, выполненное в силу условия 3 при $m = 1$, а следовательно, и при любом фиксированном m_0. В силу условия 1

$$N p^{-1} h_m\left(\frac{\lambda p \sqrt{m}}{\sqrt{n}}\right) \leqslant N p^{-1} h\left(\frac{\lambda p \sqrt{m}}{\sqrt{n}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant N p^{-1} (1 - \varepsilon_0) h(\lambda) \frac{p^2 m}{n} \leqslant p (1 - \varepsilon_0) h(\lambda).$$

Выберем теперь $p > 1$ так, чтобы $p(1 - \varepsilon_0) < 1 - (\varepsilon_0/2)$. Тогда правая часть (17) оценивается сверху величиной

$$N p^{-1} h_m\left(\frac{\lambda p \sqrt{m}}{\sqrt{n}}\right) + 1{,}01 q^{-1} \Psi\left(\frac{\lambda q k N}{\sqrt{n}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant (1 - (\varepsilon_0/2)) h(\lambda) + 1{,}01 q^{-1} \Psi\left(\frac{\lambda q n^{1-\alpha} n^\beta \lambda^\gamma}{\sqrt{n}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant (1 - (\varepsilon_0/2)) h(\lambda) + 1{,}01 q^{-1} \Psi(\lambda) < h(\lambda).$$

Следовательно, при $n = [m^{1/\alpha}] - 1$ получаем $h_n(\lambda) \leqslant h(\lambda)$. Таким образом, $h_n(\lambda) \leqslant h(\lambda)$ при всех n.

Теорема доказана.

Аналогичным образом доказывается следующий результат, опирающийся на неравенство (3) вместо (4).

Теорема 2.5. *Пусть существует выпуклая вниз функция $h(\lambda)$, $\lambda > 1$, удовлетворяющая условиям:*

1) *существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta < 1$*
$$h(\delta\lambda) \leqslant (1 - \varepsilon_0)\delta^2 h(\lambda);$$

2) *существует набор таких положительных констант α, β, γ, δ, $1 > \alpha > {}^1/_2 + \beta > 0$, $\gamma > 0$, $\delta > 0$, что равномерно в области $\lambda > 1$*
$$\lim_{n\to\infty} n^{1-\alpha}\alpha(n^\beta\lambda^\gamma)\exp h(\lambda p n^{(1-\alpha)/2+\delta}) = 0;$$

3) *справедливо соотношение*
$$h(\lambda) \leqslant \Psi(\lambda^{1+\gamma}).$$

Тогда
$$\sup_{n\geqslant 1} \ln \mathbf{M} \exp(\lambda S_n) \leqslant h(\lambda).$$

Следствие. *В предположениях теоремы*
$$\sup_n \mathbf{P}(|S_n| > x) \leqslant \exp(-h^*(x)).$$

Если взять в качестве примера $\alpha(k) \leqslant \exp(-k^q)$, $\Psi(\lambda) \leqslant \lambda^r$, то $h(\lambda) \leqslant \lambda^{\bar{s}}$, где $\bar{s}$ — любое положительное число, большее двух и большее s, $1/s + 1/q = 1/r$. Как видно, этот результат «на ε» хуже предыдущего, но зато ослаблен тип перемешивания. Скорость стремления $\alpha(k)$ и $\varphi(k)$ к нулю при $n \to \infty$ в условиях теорем 2.4 и 2.5 довольно велика, и авторы не убеждены в окончательности этих результатов.

§ 3. Центральная предельная теорема

Предположим сначала, что $\xi_i(t)$ $(i = 1, 2 \ldots)$ — независимые одинаково распределенные случайные поля, определенные на множестве T. Будем предполагать на протяжении всего параграфа, что $\mathbf{M}\xi_i^2(t) < \infty$ для любого $t \in T$. Положим
$$\rho_p = \| \xi_i(t) - \xi_i(s) \|_p, \quad p \geqslant 1.$$

Теорема 3.1. *Если сходится ряд*
$$\sum_{n=1}^{\infty} N^{2/(p+1)}(\rho_p, 2^{-n})\, 2^{-pn/(p+1)},$$
то поля $\xi_i(t)$, $i=1, 2, \ldots$, удовлетворяют ц.п.т. в пространстве $C(T, \rho_p)$.

Доказательство опустим, поскольку оно вытекает из теоремы 1.1.

Введем обозначения
$$\overline{\Psi}(x) = \sup_n n\Psi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right), \quad h(x) = \exp(-\overline{\Psi}^*(x)). \tag{18}$$

Теорема 3.2. *Пусть существует псевдометрика $\rho(t, s)$, удовлетворяющая условию: для любого $\lambda > 0$*
$$\sup_{\rho(t,s)\neq 0} \mathbf{M}\,\mathrm{ch}\left\{\lambda \frac{\xi_i(t) - \xi_i(s)}{\rho(t, s)}\right\} \leqslant \exp \Psi(\lambda).$$

Тогда поля $\xi_i(t)$ удовлетворяют ц.п.т. в $C(T, \rho)$, если для некоторого $C > 0$ сходится ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} N^2(\rho, 2^{-n})\, h_*(C 2^{-n} N^{-2}(\rho, 2^{-n})).$$

Доказательство. Определим для фиксированных $t, s \in T$ величины η_i равенством

$$\eta_i = \frac{\xi_i(t) - \xi_i(s)}{\rho(t, s)}.$$

По теореме 2.1

$$\sup_n \mathbf{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} \eta_i/\sqrt{n}\right| > x\right) \leqslant h(x).$$

Тогда равномерно по $(t, s) \in (T \times T)$

$$\sup_n \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n(t) - S_n(s)}{\rho(t, s)}\right| > x\right) \leqslant h(x),$$

и слабая компактность $S_n(t)$ следует из теоремы 1.1. Сходимость конечномерных распределений очевидна.

Теорема доказана.

Теорема 3.3. *В условиях предыдущей теоремы ц. п. т. для полей $\xi_i(t)$ имеет место, если положить в* (18)$\overline{\Psi}(x) = \exp \Psi(x)$.

Доказательство аналогично предыдущему с заменой ссылки на (12) ссылкой на неравенство (13).

Теорема 3.4. *Пусть поля $\xi_i(t)$ удовлетворяют условию р. с. п. с коэффициентом $\varphi(i)$, причем $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi^{1/2}(i) < \infty$.*

Тогда в пространстве $C(T, \rho_p)$ для последовательности $\xi_i(t)$ выполнена ц. п. т., если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} N^{2/(p+1)}(\rho_p, 2^{-n})\, 2^{-pn/(p+1)}.$$

Доказательство. По теореме 2.3 существует константа $C = C(p)$, удовлетворяющая неравенству

$$\sup_n \| S_n(t) - S_n(s) \|_p \leqslant C \| \xi_i(t) - \xi_i(s) \|_p = c\rho_p(t, s).$$

Компактность семейства $S_n(t)$ вытекает теперь из (7), а сходимость конечномерных распределений — из теоремы 18.5.3 монографии [8, с. 440].

Теорема 3.5. *Пусть существует псевдометрика $\rho(t, s)$ на T, удовлетворяющая условию: при $\lambda > 1$ и некотором $r \geqslant 1$*

$$\mathbf{M}\,\mathrm{ch}\left\{\lambda \frac{\xi(t) - \xi(s)}{\rho(t, s)}\right\} \leqslant \exp \lambda^r$$

и $\varphi(k) \leqslant \exp(-k^q)$, $q > r$. Пусть s' находится из уравнения $1/s' + 1/q = 1/r$. Положим $s = s'$, если $s' > 2$, и $s = 2 + \varepsilon$ в противном случае, где ε — сколь угодно малое положительное число; $1/p' = \max(1/2, 1/p)$, $1/p + 1/s = 1$.

Если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} H^{1/p'}(2^{-n}, \rho),$$

то ц. п. т. для $\xi_i(t)$ в $C(T, \rho)$ имеет место.

Доказательство. По теореме 2.4 и следствию из него

$$\mathbf{M}\,\mathrm{ch}\left\{\lambda \frac{S_n(t) - S_n(s)}{\rho(t, s)}\right\} \leqslant \exp|\lambda|^{s'}.$$

Слабая компактность семейства мер, порожденного семейством $S_n(t)$, вытекает из теоремы 1.1 и формул (9), (10). Сходимость же конечномерных распределений следует из существования всех моментов $\xi_i(t)$ и сходимости ряда $\sum_k \varphi^{1/2}(k) < \infty$.

Теорема доказана.

Предположим теперь, что $\xi_i(t)$ обладает с. п. с коэффициентом $\alpha(i)$.

Теорема 3.6. *Пусть существуют такие натуральное число $l \geqslant 1$ и положительное число $p > 2l$, что*

$$\sup_{n\geqslant 1} n^{1-l} \sum_{i=1}^{n} i^{2l-2}\alpha^{1-(2l/p)}(i) < \infty$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} N^{2/(2l+1)}(\rho, 2^{-n})\, 2^{-2ln/(2l+1)} < \infty.$$

Тогда ц. п. т. для $\xi_i(t)$ имеет место в пространстве $C(T, \rho_{2l})$.

Доказательство. Как следует из (13), (14), для некоторого $C < \infty$

$$\| S_n(t) - S_n(s) \|_{2l} \leqslant C \| \xi_i(t) - \xi_i(s) \|_p = c\rho_p(t, s).$$

Наш результат вытекает теперь из (7).

§ 4. Обобщения и некоторые применения

Рассмотрим теперь случай произвольного сепарабельного банахова пространства B, т. е. $\xi_i \in B \pmod{P}$. Когда мы говорим о центральной предельной теореме в пространстве B, то имеем в виду, что последовательность нормированных частных сумм $S_n = n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ слабо сходится в пространстве B при $n \to \infty$ к некоторой гауссовской величине S, также сосредоточенной в B с вероятностью единица.

На наш взгляд, в пространствах с нормой интегрального типа, например L_p, l_p, ц. п. т. должна изучаться методами, отличными от изложенных выше. См., например, [4], [6], и т. д. Универсальность же пространства непрерывных функций $C(T)$ может принести пользу в случаях пространств $C^m[D]$, W^n и др.

Покажем, как, исходя из наших результатов, можно сформулировать ц. п. т. в случае произвольного сепарабельного B. Предположим, что существует сепарабельное банахово пространство L, сопряженное к которому L^* линейно вложено в B: $L^* \subset B$. Последнее означает, что L^* есть линейное подпространство B, необязательно замкнутое, но с топологией более сильной, чем топология B. Пусть все случайные величины ξ_i с вероятностью единица сосредоточены в L^* и, таким образом, для любого $\varphi \in L$ имеет смысл выражение $\xi_i(\varphi) = (\varphi, \xi_i)$. Фиксируем некоторое тотальное подмножество T единичной сферы пространства L, являющееся метризуемым компактом в топологии $\tau(L, L^*)$. Тогда, если последовательность $\xi_i(t)$, $t \in T$, удовлетворяет ц. п. т. в пространстве $C(T, \tau)$, то исходная последовательность ξ_i удовлетворяет ц. п. т. в пространстве B.

Заметим, что сформулированные условия не представляются искусственными. Как показано в [20], справедливо и в некотором смысле обратное утверждение: если последовательность ξ_i удовлетворяет ц. п. т. в сепарабельном банаховом пространстве B, то пространство L с указанными выше свойствами всегда существует.

Если $\xi_\lambda(t)$ образует стационарный в узком смысле по $\lambda \in \mathbf{R}^1$ процесс, то, положив $\eta_n = \int\limits_n^{n+1} \xi_\lambda(t)\,d\lambda$, мы сведем ц. п. т. для $\xi_\lambda(t)$ к ц. п. т. для η_n, добавив, разумеется, условие измеримости $\xi_\lambda(t)$ по переменной λ. Этот прием указан еще в [15].

Мы не останавливаемся на других типах перемешивания, например, β-перемешивании, ρ-перемешивании и др. Заметим, что коэффициент ρ-перемешивания может быть оценен через коэффициенты α, φ и что рассуждения в целом аналогичны.

Укажем возможные применения ц. п. т. в банаховом пространстве. Пусть интеграл $J(t) = \int\limits_G f(t, x)\,\mu(dx)$ от функции $f(t, x)$, принадлежащей при почти всех x банаховому пространству B, по некоторой вероятностной мере μ вычисляется методом Монте-Карло по формуле

$$J(t) \approx J_n(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} f(t, \eta_i),$$

где величины η_i независимы, и $\mathbf{P}(\eta_i \in \Gamma) = \mu(\Gamma)$. Желая оценить погрешность метода, т. е. величину

$$\Delta = n^{1/2} \| J_n(t) - J(t) \|$$

необходимо убедиться в приближенной гауссовости поля

$$S_n = n^{1/2} (J_n(t) - J(t)),$$

т. е. в справедливости ц. п. т. в пространстве B.

В некоторых работах, посвященных методу статистических испытаний, рассматриваются модели, в которых (псевдо-) случайные числа образуют стационарный процесс и, вообще говоря, зависимы. Как вытекает из наших результатов, имеются некоторые основания применять ц. п. т. и в этой ситуации.

Укажем также некоторые приложения к статистике. Пусть η_t — стационарный в узком смысле, вообще говоря, негауссовский процесс, $\mathbf{M}\,\eta_t \equiv 0$, $\mathbf{M}\,\eta_t\eta_s = r(t-s)$. Рассмотрим статистику

$$\hat{r}_T(t) = T^{-1} \int\limits_0^T \eta_{s+t}\eta_s\,ds$$

и поле

$$\tau_T(t) = T^{1/2} (\hat{r}_T(t) - r(t)).$$

При $T \to \infty$, в случае справедливости ц. п. т. в некотором банаховом пространстве, поле $\tau_T(t)$ приближенно гауссово. Это соображение позволяет строить доверительные интервалы для корреляционной функции $r(t)$ и спектральной плотности $f(\lambda)$ процесса η_t. Подробнее об этих и других применениях см. [10—12].

В заключение авторы выражают признательность Ю. К. Беляеву и всем участникам его семинара за внимание к работе и плодотворные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 351 с.
2. *Strassen V., Dudley R. M.* The central limit theorem and ε-entropy.— Lect. Notes Math., 1969, B. 89, S. 224—231.
3. *Jain N. C., Markus M. B.* The central limit theorem for $C(S)$-valued random variables.— J. Funct. Anal., 1975, v. 19, № 3, p. 216—231.
4. *Вахания Н. Н.* Вероятностные распределения в линейных пространствах. Тбилиси: Мецниереба, 1971, 156 с.
5. *Hoffmann-Jorgensen J., Pisier G.* The strong law of large numbers and the central limit theorem in Banach spaces.— Ann. Probab., 1976, v. 4, p. 587—599.
6. *Паулаускас В. И.* О скорости сходимости в центральной предельной теореме в некоторых банаховых пространствах.— Теория вероятн. и ее примен., 1976, т. XXI, в. 4, с. 775—791.
7. *Йоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1965, 480 с.
8. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.
9. *Дмитровский В. А., Островский Е. И.* Оценка прогрешности метода зависимых испытаний.— Ж. выч. матем. и матем физ., 1978, т. 18, № 5, с. 1312—1316.
10. *Иванов А. В., Леоненко Н. Н.* О сходимости распределений функционалов от оценки корреляционной функции.— Лит. матем. сб., 1978, т. 16, № 4, с. 35—44.
11. *Gine E.* On the central limit theorem for sample continuous processes.— Ann. Probab., 1974, v. 2, № 4, p. 629—641.
12. *Бакина О. П., Островский Е. И.* Инвариантные статистики и доверительные интервалы для корреляционной функции гауссовского процесса в различных метриках.— В сб.: Материалы Всесоюзного симпозиума по статистике случайных процессов. Киев.: ИМ АН УССР и КГУ, 1975, с. 148—149.
13. *Давыдов Ю. А.* О сходимости распределений, порожденных стационарными случайными процессами.— Теория вероятн. и ее примен., 1968, т. XIII, в. 4, с. 730—737.
14. *Боровков А. А.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1972, 288 с.
15. *Колмогоров А. Н.* Об аналитических методах в теории вероятностей.— Успехи матем. наук, 1938, т. 17, в. 5, с. 5—41.
16. *Pisier G.* Le theoreme la limite centrale et la loi du logarithme itere dans les espaces de Banach.— Seminaire Maurey — Schwartz, 1975—1976, exp. 3—4 et Annexe 1.
17. *Pisier G., Zinn J.* On the limit theorems for random variables with values in the spaces L_p $(2 \leqslant p < \infty)$.—Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1978, B. 41, S. 269—304.
18. *Chobangan S. A., Tarieladze V. I.* Gaussian characterization of certain Banach spaces.— J. Multivar. Anal., 1977, v. 7, № 1, p. 187—203.
19. *Pisier G.* Conditions d'entropie assurant la continuite de certains processus et applications a l'analyse Harmonique.— Seminaire d'Analyse founctionelle, 1979—1980, exp. 13—14 et Annexe 1.
20. *Островский Е. И.* О носителях вероятностных мер в сепарабельных банаховых пространствах.— Докл. АН СССР, 1980, т. 255, № 6, с. 1319—1320.

Поступила в редакцию
2.VII.1979

CENTRAL LIMIT THEOREM FOR THE BANACH-VALUED WEAKLY DEPENDENT RANDOM VARIABLES

DMITROVSKIĬ V. A., ERMAKOV S. V., OSTROVSKIĬ E. I. (OBNINSK)

(*Summary*)

Let B be a separable Banach space, ξ_i — a stationary sequence of B-valued random variables with zero mean. In this paper we investigate some conditions on the character and rate of mixing under which the sequence ξ_i satisfies the central limit theorem, i. e. the sequence

$$S_n = n^{-1/2}(\xi_1 + \ldots + \xi_n),\ n \to \infty,$$

converges weakly to some Gaussian B-valued variable.