ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2013, т. 282, с. 231–256

УДК 519.218.27

Эволюция ветвящихся процессов в случайной среде[1]

В. А. Ватутин[2,3], Е. Е. Дьяконова[2,4], С. Сагитов[5]

Поступило в декабре 2012 г.

Настоящий обзор посвящен критическим и докритическим ветвящимся процессам в случайной среде, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. Такие случайные процессы являются естественным обобщением ветвящихся процессов, функционирующих в неоднородной среде. Время в рассматриваемых моделях предполагается дискретным, а поколения частиц — непересекающимися. Представлены полученные в последнее время результаты, описывающие асимптотику вероятности невырождения указанных ветвящихся процессов, и приведены условные предельные теоремы о распределении числа частиц в процессе при условии его невырождения к данному моменту времени. Следует учесть, что многие другие интересные вероятностные аспекты эволюции ветвящихся процессов в случайной среде не вошли в данный обзор ввиду ограниченности его объема.

DOI: 10.1134/S0371968513030187

1. ВВЕДЕНИЕ

Ветвящиеся процессы в случайной среде (ВПСС) — сложные вероятностные объекты, исследование которых требует значительных усилий. Впервые эта модель была рассмотрена Смитом и Вилкинсоном в 1969 г. в основополагающей работе [43]. Затем Атрейя и Карлин в 1971 г. в статьях [13, 14] продолжили изучение ВПСС. С тех пор было опубликовано большое количество работ, посвященных этой тематике (см., например, соответствующую библиографию в [59], дающую представление о результатах, опубликованных до 1985 г., и более современные работы [1–12, 17–20, 23, 25–29, 32–35, 39, 40, 46–58]). ВПСС описывает эволюцию популяции частиц, в которой частицы одного и того же поколения производят потомство независимо друг от друга согласно одному и тому же случайному закону размножения. Нас будет интересовать модель ВПСС, в которой среда порождается последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин (НС-среда). Таким образом, последовательность законов размножения частиц является последовательностью независимых одинаково распределенных элементов. В предлагаемом обзоре мы остановимся на некоторых результатах, относящихся к докритическим и критическим ВПСС с дискретным временем. Основным материалом послужили результаты, полученные в рамках совместных российско-немецких проектов, опубликованные в работах Афанасьева, Боингхоффа, Ватутина, Дьяконовой, Вахтеля, Гайгера, Керстинга, Фляйшманна и др. (см. также более ранний обзор [17]).

Существуют два подхода к изучению ветвящихся процессов в случайной среде. При одном из них (английский термин — quenched approach, для которого мы будем использовать

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11-01-00139) и Шведского совета по научным исследованиям (проект 621-2010-5623).

[2]Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия.

[3]E-mail: vatutin@mi.ras.ru

[4]E-mail: elena@mi.ras.ru

[5]Mathematical Sciences, Chalmers University of Technology and University of Gothenburg, Gothenburg, Sweden. E-mail: serik@chalmers.se

сокращение K-*подход*) характеристики, связанные со свойствами ветвящегося процесса в случайной среде (например, такие, как вероятность вырождения процесса или закон распределения числа частиц в момент n), трактуются как случайные величины или меры, зависящие от реализаций среды (см., например, [13–15, 44, 49] и соответствующую библиографию в [59]). При другом (английский термин — annealed approach, который в дальнейшем будет называться A-*подход*) производится усреднение упомянутых характеристик относительно распределения, заданного на множестве всевозможных реализаций среды (см. [2, 3, 7, 18, 32, 38, 39, 46, 48] и библиографию в [59]). То есть при A-подходе выявляются усредненные характеристики, а K-подход позволяет провести более детальный анализ типичного поведения траекторий. Отметим, что, например, в биологических приложениях A-подход иногда может приводить к утверждениям, далеким от типичных: в действительности реализации последовательности состояний среды могут иметь уникальные особенности.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 приведена классификация ВПСС, делящая ВПСС на надкритические, критические и докритические. Обсуждаются основные условия, накладываемые на критические и докритические ВПСС. В разд. 3 приведены асимптотические результаты, полученные в рамках A-подхода. В разд. 4 перечислены результаты, установленные для случая многотипного ВПСС, т.е. для ситуации, когда частицы, принадлежащие одному и тому же поколению, могут иметь разные законы размножения. В разд. 5 собраны результаты, полученные для критического ВПСС в рамках K-подхода. Раздел 6 посвящен редуцированным критическим ВПСС.

В дальнейшем мы будем использовать для обозначения вероятности и математического ожидания символы $(\mathcal{P}, \mathcal{E})$ или $(\mathbb{P}, \mathbb{E})$ в зависимости от того, рассматриваем ли мы вероятность и математическое ожидание при фиксированной среде (K-подход) или же усредняем их (A-подход). Символы $(\mathbf{P}, \mathbf{E})$ будут использоваться для обозначения вспомогательной вероятностной меры и соответствующего ей математического ожидания, появляющихся при рассмотрении докритических процессов (ср., например, условия 5 и 7 ниже). Символом c обозначаются константы, не обязательно имеющие одно и то же значение в разных формулах (последнее также относится и к константам типа $c_1, c_2, \dots$).

2. КЛАССИФИКАЦИЯ ВПСС

Напомним, что ветвящийся процесс с дискретным временем в постоянной среде (процесс Гальтона–Ватсона) называется *докритическим*, *критическим* и *надкритическим*, если математическое ожидание m числа непосредственных потомков частицы в этом процессе удовлетворяет соотношениям $m < 1$, $m = 1$ и $m > 1$ соответственно. Для ВПСС параметр критичности, лежащий в основе классификации, имеет другой вид.

2.1. ВПСС и сопровождающее случайное блуждание. Ветвящийся процесс в *меняющейся среде* может быть описан с помощью последовательности *фиксированных* вероятностных производящих функций (ВПФ)

$$f_n(s) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i^{(n)} s^i,$$

где $q_i^{(n)}$ — вероятность того, что частица из поколения $n-1$ произведет (независимо от размножения других частиц) ровно i потомков, принадлежащих следующему поколению n. Неоднородная по времени марковская цепь $\{Z_n\}$, описывающая эволюцию числа частиц в этом процессе, может быть задана с помощью итераций производящих функций законов размножения:

$$\mathbb{E}\big[s^{Z_n}\big] = f_1(f_2(\dots(f_n(s))\dots)), \tag{2.1}$$

причем предполагается, что $Z_0 = 1$. Отсюда следует, что

$$\mathbb{E}[Z_n] = m_1 \dots m_n, \tag{2.2}$$

где $m_n = f_n'(1)$ — среднее число потомков частицы, принадлежащей поколению n.

Важным частым случаем является процесс с дробно-линейными ВПФ

$$f_n(s) = r_n + (1 - r_n)\frac{t_n s}{1 - (1 - t_n)s},$$

где $(r_n, t_n) \in [0, 1) \times (0, 1]$. Итерация дробно-линейных ВПФ также является дробно-линейной ВПФ:

$$f_1(f_2(\dots(f_n(s))\dots)) = r^{(n)} + (1 - r^{(n)})\frac{t^{(n)} s}{1 - (1 - t^{(n)})s},$$

где

$$\frac{1 - r^{(n)}}{t^{(n)}} = m_1 \dots m_n, \qquad \frac{1 - t^{(n)}}{t^{(n)}} = \frac{1 - t_n}{t_n} + \frac{1 - t_{n-1}}{t_{n-1}} m_n + \dots + \frac{1 - t_1}{t_1} m_2 \dots m_n.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{t^{(n)}} = 1 + \frac{1 - t_n}{1 - r_n} m_n + \frac{1 - t_{n-1}}{1 - r_{n-1}} m_{n-1} m_n + \dots + \frac{1 - t_1}{1 - r_1} m_1 \dots m_n.$$

Так как $\mathbb{P}(Z_n = 0) = r^{(n)}$, то

$$\frac{1}{\mathbb{P}(Z_n > 0)} = e^{-s_n} + \sum_{k=1}^{n} a_k e^{-s_{k-1}},$$

где $a_k = (1 - t_k)/(1 - r_k)$ и $s_k = \ln m_1 + \dots + \ln m_k$. Отсюда видно, что (при некоторых дополнительных условиях) вероятность невырождения $\mathbb{P}(Z_n > 0)$ во многом определяется величиной $\min(e^{s_1}, \dots, e^{s_n}) = e^{\min(s_1, \dots, s_n)}$.

Отметим также, что в дробно-линейном случае величина $(Z_n - 1 \mid Z_n > 0)$ имеет геометрическое распределение $\mathrm{Geom}(t^{(n)})$.

В свою очередь, ВПСС $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ задается с помощью последовательности *случайных* ВПФ $(F_1, F_2, \dots)$. Далее мы всегда будем считать, что

- ВПФ, определяющие среду, являются независимыми и одинаково распределенными (НС), а значит, $F_n \stackrel{\mathrm{d}}{=} F$ для всех n;
- ВПСС начинается с одной частицы, $Z_0 = 1$ (если не оговорено другое).

Для ВПСС соотношение (2.1) принимает вид

$$\mathbb{E}\big[s^{Z_n} \bigm| F_1 = f_1,\, F_2 = f_2,\, \dots\big] = f_1(f_2(\dots(f_n(s))\dots)).$$

Будем обозначать условные вероятность и математическое ожидание при фиксированной среде символами

$$\mathcal{P}(\,\cdot\,) := \mathbb{P}(\,\cdot \mid F_1, F_2, \dots), \qquad \mathcal{E}[\,\cdot\,] := \mathbb{E}[\,\cdot \mid F_1, F_2, \dots].$$

Введем независимые одинаково распределенные случайные величины

$$X_n \stackrel{\mathrm{d}}{=} X := \ln F'(1) = \ln \mathcal{E}[\xi],$$

где случайная величина ξ описывает число непосредственных потомков частицы в ВПСС.

С ВПСС тесно связано так называемое *сопровождающее случайное блуждание*

$$S_0 = 0, \qquad S_n = X_1 + \ldots + X_n, \qquad \text{где} \quad X_n = \ln F_n'(1),$$

ввиду соотношения (2.2), которое может быть записано в виде $\mathcal{E}[Z_n] = e^{S_n}$.

Это ключевое соотношение ведет к следующей расширенной классификации, предложенной в [10]: ВПСС называется (A) надкритическим, (B) докритическим, (C) невырожденным критическим и (C_0) вырожденным критическим, если соответственно

(A) $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ п.н.;

(B) $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ п.н.;

(C) $\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty$ и $\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty$ п.н.;

(C_0) $S_n = 0$ при всех n.

Приведенная классификация основана на том факте, что любое случайное блуждание с $S_0 = 0$ можно отнести к одному из этих четырех классов.

Для ВПСС с конечным значением параметра $\mathbb{E}[X]$ расширенная классификация совпадает со стандартной классификацией, согласно которой ВПСС называется надкритическим, докритическим или критическим, если $\mathbb{E}[X] > 0$, $\mathbb{E}[X] = 0$ или $\mathbb{E}[X] < 0$ соответственно (см., например, [15]). Расширенная классификация является более естественной и полной (см. результаты работ [10, 29, 49–52]). В частности, из соотношения

$$\mathcal{P}(Z_n > 0) = \min_{1\le k\le n} \mathcal{P}(Z_k > 0) \le \min_{1\le k\le n} \mathcal{E}[Z_k] = e^{\min(S_1,\ldots,S_n)}$$

следует, что докритические и критические ВПСС вырождаются с вероятностью единица. Более того, результаты работ [10, 29, 49–52] показывают, что асимптотические свойства невырожденных критических ВПСС в случае $\mathbb{E}[X] = 0$ имеют много общего со свойствами невырожденных критических ВПСС, для которых существование математического ожидания $\mathbb{E}[X]$ не обязательно.

В дальнейшем нас будут интересовать в основном докритические и критические процессы, т.е. мы будем рассматривать классы (B) и (C), исключая при этом класс (C_0) вырожденных (с точки зрения указанной классификации) критических процессов. Поэтому мы будем называть представителей класса (C) просто *критическими* ВПСС, опуская слово "невырожденный". Отметим, что, исключая из последующего анализа класс (C_0), мы тем самым не рассматриваем критические процессы Гальтона–Ватсона в постоянной среде.

2.2. Условие Спицера–Дони: критический случай. Мы уточним теперь общее условие (C), предположив, что сопровождающее случайное блуждание удовлетворяет классическому *условию Спицера* с параметром ρ:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S_k > 0) \to \rho \in (0,1) \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Согласно работе [22] условие Спицера эквивалентно следующему *условию Дони* с параметром ρ:

$$\mathbb{P}(S_n > 0) \to \rho \in (0,1) \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Поэтому мы будем называть это условие *условием Спицера–Дони* и записывать его в виде

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S_k > 0) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n > 0) \in (0,1). \tag{2.3}$$

Хорошо известно, что любое случайное блуждание, удовлетворяющее условию (2.3), является осциллирующим (см., например, [30, гл. XII, § 7]). Заметим, что случайные блуждания, для которых выполняется приводимое ниже условие 1, а также невырожденные симметричные случайные блуждания удовлетворяют условию (2.3). В этих случаях $\rho = 1/2$.

Условие 1. Распределение случайной величины X имеет нулевое среднее и положительную дисперсию $0 < \sigma^2 < \infty$. Оно является нерешетчатым.

Отметим, что случай решетчатых распределений также поддается анализу. Однако в этом случае формулировки соответствующих результатов выглядят довольно громоздко, и мы не будем их приводить.

Другим примером случайных блужданий, удовлетворяющих условию Спицера–Дони, служат случайные блуждания, распределение приращений которых принадлежит без центрировки области притяжения некоторого устойчивого закона (см. ниже условие 2). В дальнейшем мы часто будем использовать именно такую мягкую версию соотношения (2.3) для того, чтобы несколько ослабить требования, накладываемые на случайную среду.

Условие 2. Распределение случайной величины X является нерешетчатым и принадлежит без центрировки области притяжения устойчивого распределения с показателем $\alpha \in (0, 2]$ и параметром нецентральности ψ такими, что

- $|\psi| < 1$, если $0 < \alpha < 1$;
- $|\psi| \le 1$, если $1 < \alpha < 2$;
- $\psi = 0$, если $\alpha = 1$ или $\alpha = 2$.

Напомним, что требование об отсутствии центрировки становится излишним при $\alpha \in (0, 1)$ и что характеристическая функция устойчивого распределения, удовлетворяющего условию 2, имеет вид (см., например, [16, Theorem 8.3.2])

$$\chi_{\alpha,\psi}(t) = \exp\biggl(-c|t|^\alpha\biggl(1 - i\psi\frac{t}{|t|}\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\biggr)\biggr), \qquad t \in \mathbb{R},$$

где $c > 0$. Отметим также, что устойчивые распределения имеют конечные абсолютные моменты всех порядков $r < \alpha$. Известно (см., например, [16, Sect. 8.9.2]), что если выполнено условие 2, то выполнено и условие (2.3) с параметром

$$\rho = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\alpha}\operatorname{arctg}\Bigl(\psi\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\Bigr) \in (0, 1). \tag{2.4}$$

Введем обозначения

$$L_n := \min(S_1, \dots, S_n), \qquad M_n := \max(S_1, \dots, S_n).$$

Пусть

$$\tau(n) := \min\bigl\{i \in [0, n]\colon\ S_i = \min(0, L_n)\bigr\}$$

— самая левая точка интервала $[0, n]$, в которой сопровождающее случайное блуждание достигает своего минимального значения на этом интервале. Известно (см. [42, гл. IV, § 20]), что при выполнении условия Спицера–Дони

$$n^{-1}\tau(n) \xrightarrow{\mathrm{d}} \tau, \qquad n \to \infty, \tag{2.5}$$

где τ — случайная величина, имеющая бета-распределение с параметрами $(1 - \rho, \rho)$, а символ $\xrightarrow{\mathrm{d}}$ обозначает сходимость по распределению.

Положим

$$D := \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}\mathbb{P}(S_k = 0),$$

и пусть

$$\gamma_0 := 0, \qquad \gamma_{j+1} := \min(n > \gamma_j\colon\ S_n < S_{\gamma_j}),$$
$$\Gamma_0 := 0, \qquad \Gamma_{j+1} := \min(n > \Gamma_j\colon\ S_n > S_{\Gamma_j}), \qquad j \geq 0,$$

— строгие убывающие и соответственно строгие возрастающие лестничные моменты сопровождающего случайного блуждания. Нам понадобятся следующие две функции восстановления:

$$U(x) = \begin{cases} 1_{\{0<x\}} + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_{\Gamma_j} < x), & x > 0, \\ e^{-D}, & x = 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \tag{2.6}$$

и

$$V(x) = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_{\gamma_j} \geq -x), & x > 0, \\ 1, & x = 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Как известно (см. [51, лемма 1]), при выполнении условия (2.3)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[U(-X)\cdot 1_{\{X<0\}}\big] &= e^{-D}, \\ \mathbb{E}\big[U(x-X)\cdot 1_{\{X<x\}}\big] &= U(x), \qquad x > 0, \\ \mathbb{E}[V(x+X)] &= V(x), \qquad x \geq 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

2.3. Детальная классификация в докритическом случае. Согласно условию (B) сопровождающее случайное блуждание докритического ВПСС имеет отрицательный снос и уходит в минус бесконечность при росте n. Как оказалось (см. [1, 20, 34]), поведение докритического ВПСС существенным образом зависит от того, с какой скоростью блуждание уходит в минус бесконечность. Эта скорость определяется параметром β (если он существует), задаваемым соотношением

$$\mathbb{E}\big[Xe^{\beta X}\big] = 0. \tag{2.9}$$

Докритический ВПСС называется

- *слабо докритическим*, если соотношение (2.9) выполняется при некотором $0 < \beta < 1$, что влечет за собой $\mathbb{E}[Xe^X] > 0$;
- *промежуточно докритическим*, если соотношение (2.9) выполняется при $\beta = 1$, т.е. $\mathbb{E}[Xe^X] = 0$;
- *строго докритическим*, если $\mathbb{E}[Xe^X] < 0$.

Заметим, что $\mathbb{E}[e^{\beta S_n}] = \gamma^n$, где

$$\gamma = \mathbb{E}\big[e^{\beta X}\big]. \tag{2.10}$$

Введем вспомогательную меру $\mathbf{P}$ и соответствующее ей математическое ожидание $\mathbf{E}$ следующим образом: по определению мера $\mathbf{P}$ такова, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и любой измеримой ограниченной функции $\varphi\colon \Delta^n \times \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{R}$

$$\mathbf{E}[\varphi(F_1, \dots, F_n, Z_0, \dots, Z_n)] := \gamma^{-n}\mathbb{E}\big[\varphi(F_1, \dots, F_n, Z_0, \dots, Z_n)e^{\beta S_n}\big].$$

Отметим, что после такого преобразования $\mathbf{E}[X] = 0$, т.е. сопровождающее случайное блуждание S относительно меры $\mathbf{P}$ является осциллирующим. Поэтому делать такое преобразование для критических процессов (в которых $\mathbb{E}[X] = 0$ и, следовательно, $\beta = 0$) нет необходимости, так как в этой ситуации меры $\mathbf{P}$ и $\mathbb{P}$ совпадают.

Условие 3. Относительно меры $\mathbf{P}$ распределение случайной величины X является нерешетчатым, имеет нулевое среднее и принадлежит без центрировки области притяжения устойчивого закона с параметром $\alpha \in (1, 2]$.

Если выполнено условие 3, то существует такая возрастающая последовательность положительных чисел

$$a_n = n^{1/\alpha} l_n, \tag{2.11}$$

где l_n — медленно меняющаяся на бесконечности функция, что нормированное сопровождающее случайное блуждание $a_n^{-1} S_{nt}$ слабо сходится относительно меры $\mathbf{P}$ к строго устойчивому процессу Леви L_t порядка α. Здесь и далее в аналогичных ситуациях индекс nt в выражении S_{nt} понимается как целая часть произведения nt.

3. A-ПОДХОД

Различные реализации сопровождающего случайного блуждания соответствуют различным вариантам развития истории среды. Исследование вероятности невырождения ВПСС в рамках A-подхода дает картину, полученную в результате усреднения случайной величины $\mathcal{P}(Z_n > 0)$ по всем возможным траекториям сопровождающего случайного блуждания.

3.1. Асимптотическое поведение вероятности невырождения. Первый результат, описывающий асимптотическое поведение вероятности невырождения критического ВПСС, был получен Козловым в 1976 г. в основополагающей работе [38], где он показал, что для ВПСС, удовлетворяющего условию 1, при некоторых дополнительных технических ограничениях справедливы неравенства

$$c_1 n^{-1/2} \le \mathbb{P}(Z_n > 0) \le c_2 n^{-1/2},$$

где $0 < c_1 \le c_2 < \infty$. В этой же работе Козлов установил, что в ситуации, когда все производящие функции законов размножения частиц дробно-линейны,

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim cn^{-1/2}, \qquad c > 0, \quad n \to \infty. \tag{3.1}$$

Лишь в 2000 г. Гайгеру и Керстингу [33] удалось отказаться от требования, чтобы производящие функции были дробно-линейными, и доказать справедливость асимптотики (3.1) для ВПСС, удовлетворяющего лишь условию 1. В указанной статье Гайгер и Керстинг установили этот результат при помощи разработанного ими в [33] метода доказательства условных предельных теорем для ВПСС, основанного на замене мер. Этот метод и метод расщепления траекторий сопровождающего случайного блуждания в точках их глобальных минимумов на интервале $[0, n]$, предложенный Ватутиным и Дьяконовой (см. [50, 51]), стали мощными инструментами в доказательстве ряда условных предельных теорем не только для критических, но также и для докритических ВПСС.

3.1.1. *Критический случай.* Ключевая идея, используемая для нахождения асимптотики вероятности невырождения критического ВПСС в рамках A-подхода, состоит в доказательстве эквивалентности

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim \theta\, \mathbb{P}\big(\min(S_1, \dots, S_n) \geq 0\big), \qquad n \to \infty, \tag{3.2}$$

где $\theta > 0$. Этот факт обосновывается при помощи метода расщепления траекторий сопровождающего случайного блуждания в точках их глобальных минимумов на интервале $[0, n]$. Метод расщепления для изучения ВПСС в рамках A-подхода был впервые использован Дьяконовой, Гайгером и Ватутиным в работе [29]. Дальнейшее развитие метод расщепления получил в работе Афанасьева, Гайгера, Ватутина и Керстинга [10].

Напомним, что $X = \ln \mathcal{E}[\xi]$. Пусть

$$Q_i := \mathcal{P}(\xi = i), \qquad i = 0, 1, 2, \dots . \tag{3.3}$$

Очевидно, что

$$F(s) = \mathcal{E}[s^\xi] = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i s^i.$$

В работе [10] требования, накладываемые на среду, сформулированы в терминах урезанных вторых моментов числа ξ непосредственных потомков одной частицы:

$$\zeta(a) := \frac{\mathcal{E}\big[\xi^2 \cdot 1_{\{\xi \geq a\}}\big]}{(\mathcal{E}[\xi])^2}. \tag{3.4}$$

Условие 4. Существуют положительные числа ε и a такие, что

$$\mathbb{E}\big[(\ln^+ \zeta(a))^{1/\rho+\epsilon}\big] < \infty \qquad \text{и} \qquad \mathbb{E}\big[V(X)(\ln^+ \zeta(a))^{1+\epsilon}\big] < \infty,$$

где $\ln^+ x := \ln(\max\{x, 1\})$.

Приведем ряд примеров ВПСС, для которых условие 4 выполнено.

1. Пусть распределение численности потомства имеет ограниченный носитель, т.е. для некоторого положительного a^*

$$\mathbb{P}(\xi \leq a^*) = 1. \tag{3.5}$$

Тогда $\zeta(a) = 0$ $\mathbb{P}$-п.н. для всех $a > a^*$. Очевидно, что в этой ситуации условие 4 выполнено. В частности, условие (3.5) справедливо в случае бинарного деления частиц, т.е. в случае, когда

$$\mathcal{P}(\xi = 2) = 1 - \mathcal{P}(\xi = 0) = \frac{e^X}{2}.$$

2. Из соотношения (2.8) вытекает что $\mathbb{E}[V(X)] = V(0) = 1$. Следовательно, условие 4 будет выполнено, если для некоторого числа $a \in \mathbb{N}_0$ случайная величина $\zeta(a)$ п.н. ограничена сверху.

Из оценки $\zeta(2) \leq 2\eta$, где

$$\eta := \frac{F''(1)}{(F'(1))^2} = \frac{\mathcal{E}[\xi(\xi-1)]}{(\mathcal{E}[\xi])^2}, \tag{3.6}$$

следует, что величина $\zeta(2)$ ограничена сверху, если величина η ограничена. Последнее требование выполняется, например, если распределение (3.3) является распределением Пуассона со случайным средним (в этом случае $\eta = 1$ п.н.) или геометрическим распределением со случайным средним ($\eta = 2$ п.н.).

3. Для функции восстановления $V(x)$ справедливо соотношение $V(x) = O(x)$ при $x \to \infty$. Кроме того, $V(x) = 0$ при $x < 0$. Отсюда и из неравенства Гёльдера следует, что условие 4 выполняется, если

$$\mathbb{E}[(X^+)^p] < \infty \qquad \text{и} \qquad \mathbb{E}[(\ln^+ \zeta(a))^q] < \infty$$

для некоторых чисел $p > 1$ и $q > \max(\rho^{-1}, p(p-1)^{-1})$.

Отметим, что если условие 2 выполнено, то в силу (2.4) справедливо неравенство $\rho \le \alpha^{-1}$. Нам также понадобится следующая несколько более слабая модификация условия 4.

Условие 5. Существуют положительные числа ε и a такие, что

$$\mathbb{E}[(\ln^+ \zeta(a))^{\alpha+\epsilon}] < \infty.$$

В [10] установлено, что если выполнены соотношение (2.3) и условие 4 или если выполнены условие 2 с $|\psi| < 1$ и условие 5, то существует положительное число θ такое, что при $n \to \infty$

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim \theta\, \mathbb{P}\big(\min(S_1, \dots, S_n) \ge 0\big) \sim \theta n^{-(1-\rho)} l_n, \tag{3.7}$$

где $l_1, l_2, \dots$ — последовательность, медленно меняющаяся на бесконечности (в [10] приведены явные выражения для величины θ и последовательности l_n). Более того, в [10] показано, что в рамках A-подхода основной вклад в вероятность невырождения дают те траектории сопровождающего случайного блуждания, которые проходят через свой глобальный минимум на отрезке $[0, n]$ в момент времени, не слишком отдаленный от нуля.

Соотношение (3.7) описывает асимптотическое поведение хвоста распределения момента вырождения $T = \min\{k\colon Z_k = 0\}$ критического ВПСС, поскольку

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) = \mathbb{P}(T > n).$$

Ватутин и Дьяконова [48] впервые исследовали асимптотические свойства вероятности вырождения критического ВПСС точно в момент времени n. Ими было установлено, что для ВПСС с дробно-линейными производящими функциями, подчиняющихся условию 1, ограничению (2.3) и некоторым дополнительным техническим условиям, справедливо асимптотическое представление

$$\mathbb{P}(T = n) \sim c n^{-3/2}, \qquad n \to \infty, \tag{3.8}$$

где $c \in (0, \infty)$. Позднее Боингхофф, Дьяконова, Керстинг и Ватутин [19] доказали, что соотношение (3.8) справедливо для ВПСС при несколько более слабых условиях: если выполняются соотношение (2.3), условие 1 и условие 5 с $\alpha = 2$, а также следующее

Условие 6. Существует число $\chi \in (0, 1/2)$ такое, что

$$\mathbb{P}\big(\chi \le Q_0 \le 1 - \chi,\ \eta \ge \chi\big) = 1.$$

Ватутин и Вахтель [58] для случая геометрических производящих функций

$$F_n(s) = \frac{e^{-X_n}}{1 + e^{-X_n} - s}, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

установили, что если выполнено условие 2 с $\alpha < 2$ и $|\psi| < 1$, то выполняется аналог соотношения (3.2):

$$\mathbb{P}(T = n) \sim \Theta\, \mathbb{P}(T^- = n) \qquad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{3.9}$$

где $\Theta > 0$ и

$$T^- = \min\{k \ge 1\colon S_k < 0\}.$$

3.1.2. *Докритический случай. Слабо докритический случай.* К настоящему моменту времени наиболее сильный результат для слабо докритического ВПСС установлен Афанасьевым, Боингхоффом, Керстингом и Ватутиным [8]. Ими было доказано, что если выполнены условие 3 и, кроме того, условие 7 (см. ниже), то существуют числа $0 < \kappa, \kappa' < \infty$ такие, что

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim \kappa\, \mathbb{P}\big(\min(S_1, \dots, S_n) \geq 0\big) \sim \kappa' \frac{\gamma^n}{n a_n},$$

где γ и a_n те же, что и в соотношениях (2.10) и (2.11) соответственно. Отметим, что этот результат аналогичен соотношению (3.7), установленному для критического случая. Однако для промежуточно и строго докритических ВПСС подобная эквивалентность уже не имеет места (см., например, [34]).

Условие 7. Существуют положительные числа ε и a такие, что

$$\mathbf{E}[(\ln^+ \zeta(a))^{\alpha+\varepsilon}] < \infty.$$

Промежуточно докритический случай. Афанасьев, Боингхофф, Керстинг и Ватутин [9] доказали, что если $\beta = 1$ и выполнены условия 3 и 7, то существуют число $0 < \theta < \infty$ и медленно меняющаяся на бесконечности последовательность l_n такие, что

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim \theta \gamma^n\, \mathbb{P}\big(S_n < \min(S_1, \dots, S_{n-1})\big) \sim \frac{\gamma^n l_n}{n^{1-1/\alpha}}, \qquad n \to \infty.$$

Отметим, что при несколько других условиях это асимптотическое представление для вероятности невырождения было впервые получено Ватутиным [47].

Строго докритический случай. Гюиварч и Лиу [35] доказали, что если строго докритический ВПСС удовлетворяет условию

$$\mathbb{E}[\xi \ln^+ \xi] < \infty, \tag{3.10}$$

то найдется число $c \in (0, 1]$ такое, что

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c(\mathbb{E}[\xi])^n, \qquad n \to \infty. \tag{3.11}$$

Впервые эту асимптотику получили ДеСуза и Хембли [23] при чрезмерно сильных моментных условиях (стоит отметить, что в [23] аналогичное утверждение было доказано для случая эргодической среды). В ситуации, когда производящие функции численности потомства дробно-линейны, соотношение (3.11) было несколько раньше установлено Афанасьевым [4].

Условие (3.10) служит аналогом классического так называемого $x \log x$-условия, возникающего при исследовании докритических и надкритических ветвящихся процессов в постоянной среде (см., например, [15]). Отметим, что если справедливо (3.5), то соотношение (3.10) также справедливо.

3.2. Условные предельные теоремы. Представленные в этом пункте результаты описывают вероятностные свойства ВПСС, не выродившегося к далекому моменту времени.

3.2.1. *Критический случай.* Афанасьев, Гайгер, Керстинг и Ватутин [10] доказали условную предельную теорему, описывающую поведение числа частиц в ВПСС при условии его невырождения, которая является наиболее сильным результатом к настоящему моменту времени. Согласно этой теореме критический ВПСС при условии его невырождения ведет себя как надкритический процесс. Напомним, что надкритический ветвящийся процесс (как в случайной, так и в постоянной среде) растет экспоненциально быстро, т.е. $Z_n e^{-S_n} \to W$ п.н., где W — невырожденная случайная величина (см. [15, 41]).

Для целых чисел $0 \le r \le n$ определим нормированный процесс $X_t^{r,n}$, $t \in [0,1]$, с помощью соотношения

$$X_t^{r,n} = Z_{r+(n-r)t}\, e^{-S_{r+(n-r)t}}, \qquad t \in [0,1]. \tag{3.12}$$

В статье [10] доказано, что если выполнены соотношение (2.3) и условие 4 (или условие 2 с $|\psi| < 1$ и условие 5), то

$$\mathcal{L}\big(X_t^{r_n,n},\ t \in [0,1] \bigm| Z_n > 0\big) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{L}(W_t,\ t \in [0,1]), \qquad n \to \infty, \tag{3.13}$$

где символ $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ обозначает слабую сходимость в пространстве $D[0,1]$ функций, имеющих пределы слева и непрерывных справа на отрезке $[0,1]$, оснащенном топологией Скорохода. Здесь $r_1, r_2, \dots$ — последовательность натуральных чисел $r_n \le n$ таких, что $r_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

В [10] показано, что предельный случайный процесс $\{W_t,\ t \in [0,1]\}$ имеет почти наверное постоянные траектории, т.е. $\mathbb{P}(W_t = W \text{ при всех } t \in [0,1]) = 1$, где W — положительная случайная величина. Таким образом, рост ВПСС определяется поведением сопровождающего случайного блуждания, а именно последовательностью $(e^{S_n})_{n\ge 0}$. Отметим, что ранее Афанасьев установил в [7] для случая $r_n = 0$ сходимость (3.13) для $t \in (0,1)$ при более сильном условии 1.

Кроме того, в [10] доказано, что если выполнены условие 2 с $|\psi| < 1$ и условие 5, то существует медленно меняющаяся на бесконечности последовательность $l_1, l_2, \dots$ такая, что

$$\mathcal{L}\big(n^{-1/\alpha} l_n \ln Z_{nt},\ t \in [0,1] \bigm| Z_n > 0\big) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{L}\big(L_t^+,\ t \in [0,1]\big), \qquad n \to \infty, \tag{3.14}$$

где L_t^+, $t \in [0,1]$, — извилина строго устойчивого процесса Леви порядка α (распределение извилины по определению совпадает с условным распределением строго устойчивого процесса Леви порядка α при условии, что он принимает только положительные значения на интервале времени $(0,1]$; см. [21, 24]). Сходимость (3.14) была ранее установлена Козловым [39] в случае, когда второй момент приращений сопровождающего случайного блуждания конечен.

Афанасьев [5] показал, что для критического ВПСС, удовлетворяющего условию 1 и некоторым дополнительным техническим условиям, имеет место сходимость

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \ln(Z_{nt}+1),\ t \in [0,\infty) \bigm| Z_n > 0\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{L}\big(\mathbb{W}_t^+,\ t \in [0,\infty)\big), \qquad n \to \infty,$$

где $\mathbb{W}_t^+$, $t \in [0,\infty)$, — броуновская извилина W_t^+ при $t \le 1$, продолжением которой является броуновское движение W_t, $t \ge 1$, с начальным условием $W_1 = W_1^+$, "остановленное" в момент

$$\tau_0 = \inf\{t \ge 1 \colon W_t = 0\}.$$

Рассматривая критические ВПСС, удовлетворяющие условиям 1, 6 и условию 5 с $\alpha = 2$ и имеющие дробно-линейные производящие функции законов размножения частиц, Боингхофф, Дьяконова, Керстинг и Ватутин [19] доказали, что

$$\mathcal{L}(Z_n \mid T = n+1) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{L}(Y), \qquad n \to \infty, \tag{3.15}$$

где Y — целочисленная собственная случайная величина, принимающая положительные конечные значения с вероятностью 1. Более того, в [19] показано, что для любого $\delta \in (0, 1/2)$

$$\mathcal{L}\big(Z_{nt}\, e^{-S_{nt}},\ t \in [\delta, 1-\delta] \bigm| T = n+1\big) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{L}\big(W_t,\ t \in [\delta, 1-\delta]\big), \qquad n \to \infty.$$

Здесь предельный процесс имеет п.н. постоянные траектории: $\mathbb{P}(W_t = W \text{ для всех } t \in [0,1]) = 1$ для некоторой положительной случайной величины W, а символ $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ обозначает слабую сходимость в пространстве $D[\delta, 1-\delta]$ функций, имеющих пределы слева и непрерывных справа на отрезке $[\delta, 1-\delta]$, оснащенном топологией Скорохода.

Ватутин и Вахтель [58] обнаружили следующий факт внезапного вырождения критического ВПСС, распределение приращений сопровождающего блуждания которого принадлежит области притяжения устойчивого закона с показателем $\alpha < 2$: при условии, что процесс выродился в момент $T = n+1$, случайная величина $\ln Z_{nt}$ растет, нестрого говоря, как $n^{1/\alpha}$ до момента времени n, а затем процесс внезапно вырождается, т.е. величина $\ln Z_n$ имеет порядок $n^{1/\alpha}$, в то время как $Z_{n+1} = 0$. Это явление можно интерпретировать как эволюцию процесса в благоприятной среде вплоть до момента n и внезапное вырождение популяции в момент $T = n+1$ под воздействием "катастрофической" среды. Такое поведение ВПСС существенно отличается от ситуации, когда второй момент приращений сопровождающего случайного блуждания (см. (3.15)) конечен. В последнем случае вырождение процесса в момент времени $T = n+1$ происходит ввиду малого размера популяции в предыдущем поколении, а не под давлением неблагоприятной среды.

Прежде чем формулировать результаты работы [58], напомним, что если выполнено условие 2, то, как показал Даррет в [24], существует неотрицательная случайная величина Λ такая, что для величин a_n, определяемых соотношением (2.11),

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(S_n \le x a_n \bigm| S_1 > 0, \dots, S_n > 0\big) = \mathbb{P}(\Lambda \le x) \qquad \text{для всех} \quad x \ge 0.$$

В работе [58] доказано, что если выполнено условие 2 с $\alpha < 2$ и $|\psi| < 1$, а также выполнено условие 5, то для любого $x > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}(Z_{n-1} > e^{x a_n};\, T = n)}{\mathbb{P}(T^- = n)} = \Theta \frac{\mathbb{E}[\Lambda^{-\alpha};\, \Lambda > x]}{\mathbb{E}[\Lambda^{-\alpha}]},$$

где (ср. (3.9))

$$\Theta := \liminf_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}(T = n)}{\mathbb{P}(T^- = n)}.$$

Если к тому же производящие функции числа непосредственных потомков частиц являются геометрическими с вероятностью единица, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_{n-1} > e^{x a_n} \mid T = n) = \frac{\mathbb{E}[\Lambda^{-\alpha} \mid \Lambda > x]}{\mathbb{E}[\Lambda^{-\alpha}]}.$$

3.2.2. *Докритический случай. Слабо докритический случай.* Афанасьев, Боингхофф, Керстинг и Ватутин [8] доказали для слабо докритических ВПСС, удовлетворяющих условиям 3 и 7, что условные распределения $\mathcal{L}(Z_n \mid Z_n > 0)$, $n \ge 1$, слабо сходятся к вероятностному распределению, сосредоточенному на множестве натуральных чисел. Более того, в [8] было показано, что последовательность $\mathbb{E}[Z_n^\vartheta \mid Z_n > 0]$ ограничена для любого числа $\vartheta < \beta$, откуда, в свою очередь, следует сходимость моментов к соответствующим моментам предельного распределения. Кроме того, в указанной работе было доказано, что для процесса $X_t^{r,n}$, определенного соотношением (3.12), имеет место слабая сходимость

$$\mathcal{L}\big(X_t^{r_n,n},\ t \in [0,1] \bigm| Z_n > 0\big) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{L}\big(W_t,\ t \in [0,1]\big), \qquad n \to \infty,$$

в пространстве $D[0,1]$, оснащенном топологией Скорохода. Здесь $r_1, r_2, \dots$ — натуральные числа такие, что $r_n < n/2$ и $r_n \to \infty$, а $W_t = W$ п.н. для всех $t \in [0,1]$ и $\mathbb{P}(0 < W < \infty) = 1$. Аналоги этого результата были установлены ранее при более сильных ограничениях в [4, 34].

Таким образом, если $Z_n > 0$ в слабо докритическом случае, то размер популяции Z_k невелик для k, близких к 0 и к n. В то же время для $1 \ll k \ll n$ величина Z_k пропорциональна среднему значению $\mathcal{E}[Z_k] = e^{S_k}$ с точностью до случайного множителя $W > 0$, что имеет прямую аналогию с поведением надкритических ВПСС.

Промежуточно докритический случай. Афанасьев, Боингхофф, Керстинг и Ватутин [9] доказали, что для промежуточно докритического ВПСС, удовлетворяющего условиям 3 и 7, условные распределения случайных величин Z_n (при условии $\{Z_n > 0\}$) сходятся к невырожденному распределению при $n \to \infty$. Впервые этот результат был получен Ватутиным [47] при несколько иных предположениях.

Обозначим через $\widehat{L}_t$ строго устойчивый процесс L_t, имеющий характеристический показатель α и достигающий своего минимума в момент времени 1. Пусть $e_1, e_2, \ldots$ — интервалы времени между последовательными локальными минимумами процесса $\widehat{L}_t$, а величина $j(t) = i$ для $t \in e_i$. Заметим, что $j(t_1) \le j(t_2) \le \ldots \le j(t_n)$. В [9] доказано, что если выполнены условия 3 и 7, то для $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < 1$ при $n \to \infty$ имеет место сходимость

$$\mathcal{L}\biggl(\frac{Z_{nt_1}}{\exp(S_{nt_1} - \min_{k \le nt_1} S_k)}, \ldots, \frac{Z_{nt_k}}{\exp(S_{nt_k} - \min_{k \le nt_k} S_k)} \;\Big|\; Z_n > 0\biggr) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{L}\bigl(V_{j(t_1)}, \ldots, V_{j(t_k)}\bigr),$$

где $V_1, V_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные вероятностные копии строго положительной случайной величины V. Таким образом, если между моментами времени t_i и t_k у процесса $\widehat{L}_t$ нет локального минимума, то $j(t_i) = j(t_k)$, т.е. $V_{j(t_i)} = V_{j(t_k)}$ с вероятностью 1. Для случая дробно-линейных производящих функций числа непосредственных потомков частиц эта сходимость была установлена Афанасьевым [6].

Пусть, как и ранее, $\tau(nt)$ обозначает момент времени, в который сопровождающее случайное блуждание впервые достигает своего минимального значения на отрезке $[0, [nt]]$. В [9] было установлено, что размер популяции в моменты $\tau(nt_i)$ сходится при $n \to \infty$ к дискретному предельному распределению, а именно

$$\mathcal{L}\bigl(\bigl(Z_{\tau(nt_1)}, \ldots, Z_{\tau(nt_k)}\bigr) \mid Z_n > 0\bigr) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{L}\bigl(Y_{j(t_1)}, \ldots, Y_{j(t_k)}\bigr),$$

где $Y_1, Y_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные вероятностные копии строго положительной целочисленной случайной величины Y.

Строго докритический случай. Гайгер, Керстинг и Ватутин [34], доказали, что для строго докритического ВПСС, удовлетворяющего условию (3.10), справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = z \mid Z_n > 0) = r_z, \qquad z \in \mathbb{N},$$

где

$$\sum_{z=1}^{\infty} r_z = 1 \qquad \text{и} \qquad m_r := \sum_{z=1}^{\infty} z r_z < \infty.$$

Афанасьев, Гайгер, Керстинг и Ватутин [11] ввели следующее условие для строго докритических ВПСС.

Условие 8. Справедливо неравенство (см. (3.6))

$$\mathbb{E}[e^X \ln^+ \eta] < \infty.$$

Так как в строго докритическом случае $\mathbb{E}[e^X] < \infty$, то условие 8 выполняется, в частности, тогда, когда случайные распределения численности потомства (3.3) имеют равномерно ограниченный носитель. Это условие выполнено, например, если распределения (3.3) являются

пуассоновскими распределениями со случайным средним (в этой ситуации $\eta = 1$ п.н.) или если производящие функции числа потомков геометрические (здесь $\eta = 2$ п.н.).

В [11] доказано, что для любых значений $k, m \in \mathbb{N}_0$ и для

$$0 =: i_{n,0} < i_{n,1} < i_{n,2} < \ldots < i_{n,k} < i_{n,k+1} := n$$

при $\min_{0\le l\le k}(i_{n,l+1} - i_{n,l}) \to \infty$ и $n \to \infty$ имеет место сходимость

$$\mathcal{L}\big((Z_j)_{0\le j\le m}, (Z_{i_{n,1}+j})_{0\le j\le m}, \ldots, (Z_{i_{n,k}+j})_{0\le j\le m}, (Z_{n-j})_{0\le j\le m} \mid Z_n > 0\big) \xrightarrow{\mathrm{d}} \\ \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{L}_{\delta_1}\big((Y_j)_{0\le j\le m}\big) \otimes \mathcal{L}_{\widehat{r}}\big((Y_j)_{0\le j\le m}\big)^{\otimes k} \otimes \mathcal{L}_r\big((\widetilde{Y}_j)_{0\le j\le m}\big).$$

Здесь $\mathcal{L}_\nu((Y_j)_{j\ge 0})$ обозначает распределение марковской цепи $(Y_j)_{j\ge 0}$, имеющей начальное распределение ν и переходные вероятности

$$\widehat{P}_{yz} = \frac{z\,\mathbb{P}(\xi_1 + \ldots + \xi_y = z)}{y\mathbb{E}[\xi]}, \qquad y, z \in \mathbb{N},$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_y$ — независимые вероятностные копии числа ξ непосредственных потомков частицы. Стационарное распределение цепи $(Y_j)_{j\ge 0}$ имеет вид

$$\widehat{r}_z = \frac{z r_z}{m_r}, \qquad z \in \mathbb{N}.$$

Процесс $(\widetilde{Y}_j)_{j\ge 0}$ определяется как обращенная во времени цепь Маркова $(Y_j)_{j\ge 0}$, т.е. $(\widetilde{Y}_j)_{j\ge 0}$ является цепью Маркова с переходными вероятностями

$$\widetilde{P}_{yz} = \frac{\widehat{r}_z \widehat{P}_{zy}}{\widehat{r}_y}.$$

4. МНОГОТИПНЫЕ ВПСС

Впервые модель многотипного ВПСС рассмотрели Атрейя и Карлин [13]. Затем исследование этой модели было продолжено Вейснером [60], Капланом [36], Танни [45] (см. также соответствующую библиографию в [59]). Для описания ВПСС $\mathbf{Z}_n = (Z_{n,1}, \ldots, Z_{n,p})$ с p типами частиц и дискретным временем $n = 0, 1, \ldots$ нам потребуется ряд стандартных векторных обозначений:

- $\mathbf{e}_j$ есть p-мерный вектор-строка, j-я компонента которого равняется 1, а все остальные — нулю;
- $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ ($\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$) есть p-мерный вектор-строка, все компоненты которого одинаковы и равны 0 (соответственно 1);
- для $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_p)$ положим

$$\|\mathbf{x}\| = \sum_{i=1}^p |x_i|, \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^p x_i y_i, \qquad \mathbf{x}^{\mathbf{y}} = \prod_{i=1}^p x_i^{y_i}.$$

В ветвящемся процессе с p типами частиц частица типа i производит в момент гибели z_1 частиц типа 1, z_2 частиц типа 2, …, z_p частиц типа p с вероятностью $Q_{\mathbf{z}}^{(i)}$, $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_p)$. В ВПСС с p типами частиц вероятностные законы распределения $\{Q_{\mathbf{z}}^{(i)},\ i = 1, \ldots, p,\ \mathbf{z} \in \mathbb{N}_0\}$ являются случайными элементами, которым соответствуют ВПФ

$$F^{(i)}(s_1, \ldots, s_p) = \sum_{z_1=0}^\infty \ldots \sum_{z_p=0}^\infty Q_{\mathbf{z}}^{(i)} \mathbf{s}^{\mathbf{z}}, \qquad i = 1, \ldots, p. \tag{4.1}$$

Таким образом, случайный закон размножения частиц из поколения $n \geq 1$ описывается набором $\bigl(F_n^{(1)}, \dots, F_n^{(p)}\bigr)$ случайных ВПФ. Пусть $\mathbf{M}_n$ — матрица средних, соответствующая набору $\bigl(F_n^{(1)}, \dots, F_n^{(p)}\bigr)$, т.е. $\mathbf{M}_n$ — случайная матрица размера $p \times p$, элементом (i, j) которой является частная производная $\partial F_n^{(i)}(\mathbf{1})/\partial s_j$ в точке $\mathbf{1}$. Ясно, что матрицы $\mathbf{M}_n$, $n \geq 1$, независимы и одинаково распределены, причем их распределение совпадает с распределением случайной матрицы

$$\mathbf{M} = (M_{ij})_{i,j=1}^{p}, \qquad M_{ij} = \frac{\partial F^{(i)}(\mathbf{1})}{\partial s_j}. \tag{4.2}$$

Предполагается, что все элементы M_{ij} положительны, т.е. частица любого типа может иметь непосредственных потомков всех типов в следующем поколении. Обозначим через R и R_n перроновы корни (т.е. максимальные по абсолютному значению собственные числа) матриц $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}_n$ соответственно. Пусть положительные векторы $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_p)$ и $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_p)$ таковы, что

$$\|\mathbf{V}\| = \|\mathbf{U}\| = 1, \qquad \mathbf{V}\mathbf{M} = R\mathbf{V}, \qquad \mathbf{M}\mathbf{U}' = R\mathbf{U}',$$

т.е. $\mathbf{V}$ и $\mathbf{U}'$ являются соответственно левым и правым собственными векторами случайной матрицы $\mathbf{M}$, соответствующими ее перронову корню R. В этом разделе мы будем всегда предполагать, что выполняется одно из следующих условий.

Условие 9. Существует неслучайный вектор $\mathbf{v}$ с положительными координатами такой, что $\|\mathbf{v}\| = 1$ и

$$\mathbb{P}(\mathbf{V} = \mathbf{v}) = 1.$$

Условие 10. Существует неслучайный вектор $\mathbf{u}$ с положительными координатами такой, что $\|\mathbf{u}\| = 1$ и

$$\mathbb{P}(\mathbf{U} = \mathbf{u}) = 1.$$

Важным следствием этих условий является соотношение

$$\mathbf{v}\mathbf{M}_1 \dots \mathbf{M}_n = R_1 \dots R_n \mathbf{v}$$

или соответственно соотношение

$$\mathbf{M}_1 \dots \mathbf{M}_n \mathbf{u}' = R_1 \dots R_n \mathbf{u}'.$$

Эти равенства дают возможность (см. [27]) ввести для многотипного ВПСС сопровождающее случайное блуждание $S_n := X_1 + \ldots + X_n$, где $X := \ln R$, $X_n := \ln R_n$, $n \geq 1$. Далее при рассмотрении многотипного ВПСС, удовлетворяющего условию 9 или 10, нам будет удобно обращаться к условиям, наложенным ранее на сопровождающее случайное блуждание ВПСС с одним типом частиц, трактуя их как условия, накладываемые на сопровождающее случайное блуждание S_n многотипного ВПСС. В частности, приведенная выше классификация ВПСС с одним типом частиц, основанная на сопровождающем случайном блуждании, естественным образом распространяется на многотипный случай. Например, если выполнено условие 9, то для критического и докритического случаев при $n \to \infty$

$$\sum_{i=1}^{p} v_i \mathcal{P}\bigl(\mathbf{Z}_n \neq \mathbf{0} \;\big|\; \mathbf{Z}_0 = \mathbf{e}_i\bigr) \leq \min_{1 \leq k \leq n} |\mathbf{v}\mathbf{M}_1 \dots \mathbf{M}_k| = \min_{1 \leq k \leq n} R_1 \dots R_k = \exp\Bigl\{\min_{1 \leq k \leq n} S_k\Bigr\} \to 0$$

п.н., откуда следует, что

$$\mathcal{P}\bigl(\mathbf{Z}_n \neq \mathbf{0} \;\big|\; \mathbf{Z}_0 = \mathbf{e}_i\bigr) \to 0$$

п.н. для любого $i = 1, \dots, p$. Это же соотношение следует и из условия 10.

4.1. Вероятность невырождения многотипных ВПСС. Отметим, что приводимые далее результаты для многотипных ВПСС обобщают известные ранее результаты, полученные для ВПСС с одним типом частиц в рамках А-подхода, причем зачастую условия, накладываемые в многотипном случае, оказываются даже в случае $p = 1$ существенно более слабыми, чем известные ранее условия, накладываемые на ВПСС с одним типом частиц.

4.1.1. *Критический многотипный случай.* Дьяконова [27] исследовала многотипный критический ВПСС, удовлетворяющий соотношению (2.3) и условиям 9 и 4, где теперь случайная величина $\zeta(a)$ определяется соотношением

$$\zeta(a) := R^{-2} \sum_{\mathbf{z}\in\mathbb{N}_a^p} \sum_{i=1}^{p} v_i \sum_{j,k=1}^{p} Q_{\mathbf{z}}^{(i)} z_j z_k \tag{4.3}$$

(здесь $\mathbb{N}_a^p$ — множество всех векторов $\mathbf{z}$ с неотрицательными целочисленными компонентами таких, что по крайней мере одна из их компонент не меньше числа a, а R — перронов корень случайной матрицы $\mathbf{M}$, соответствующей случайному распределению $Q_{\mathbf{z}}^{(i)}$; см. (4.1) и (4.2)). В [27] предполагалось, что выполненно следующее условие (см. [37]).

Условие 11. Существует число $0 < d < 1$ такое, что

$$d \le \frac{M_{i_1,j_1}}{M_{i_2,j_2}} \le d^{-1}, \qquad 1 \le i_1, i_2, j_1, j_2 \le p.$$

При выполнении указанных условий в работе [27] доказано (ср. (3.7)), что

$$\mathbb{P}\big(\mathbf{Z}_n \ne \mathbf{0} \;\big|\; \mathbf{Z}_0 = \mathbf{e}_i\big) \sim c_i n^{-(1-\rho)} l_n, \qquad i = 1, \dots, p, \tag{4.4}$$

где c_i — положительные константы, ρ — константа из условия Спицера, которому удовлетворяет случайное блуждание $S_n = \ln R_1 + \ldots + \ln R_n$, сопровождающее многотипный процесс, а l_n — последовательность, медленно меняющаяся при $n \to \infty$. Ранее асимптотика (4.4) была получена в [25] для случая дробно-линейных производящих функций числа непосредственных потомков частиц при выполнении условий 1 и 10.

В [27] доказано также следующее утверждение, описывающее поведение вероятностей невырождения процесса в рамках К-подхода: при $n \to \infty$

$$\frac{\mathcal{P}(\mathbf{Z}_n \ne \mathbf{0} \mid \mathbf{Z}_0 = \mathbf{e}_i)}{\sum_{j=1}^{p} v_j \mathcal{P}(\mathbf{Z}_n \ne \mathbf{0} \mid \mathbf{Z}_0 = \mathbf{e}_j)} \to U_i^* \qquad \text{п.н.}, \qquad i = 1, \dots, p, \tag{4.5}$$

где $\mathbf{U}^* = (U_1^*, \dots, U_p^*)$ — случайный вектор такой, что

$$(\mathbf{v}, \mathbf{U}^*) = 1, \qquad d \le U_i^* \le \frac{1}{\min(v_1, \dots, v_p)}, \quad i = 1, \dots, p.$$

Более того, в [27] показано, что соотношения (4.4) и (4.5) остаются справедливыми при ряде других условий, сходных с появлявшимися ранее условиями 2 и 5 в случае ВПСС с одним типом частиц.

Пусть $(\xi_{i1}, \dots, \xi_{ip})$ — случайный вектор, j-я компонента ξ_{ij} которого представляет собой число потомков типа j частицы типа i.

Ватутин и Дьяконова [56] изучали многотипный критический ВПСС, предполагая, что его сопровождающее случайное блуждание удовлетворяет условию Спицера–Дони, матрицы средних имеют общий положительный правый собственный вектор (см. условие 10) и выполнены следующие условия, в которых

$$\Delta_{ij}(\beta) = \mathcal{E}|\xi_{ij} - \mathcal{E}[\xi_{ij}]|^\beta, \qquad \Delta_\beta = \max_{i,j} \Delta_{ij}(\beta), \qquad \zeta_\beta := e^{-\beta X} \Delta_\beta.$$

Условие 12. ВПФ $F^{(i)}(\mathbf{s}) = \mathcal{E}\big[s_1^{\xi_{i1}} \dots s_p^{\xi_{ip}}\big]$, где ξ_{ij} — случайное число потомков типа j частицы типа i, не могут иметь линейного вида

$$F^{(i)}(\mathbf{s}) = Q^{(i)}_{\mathbf{0}} + Q^{(i)}_{\mathbf{e}_1} s_1 + \ldots + Q^{(i)}_{\mathbf{e}_p} s_p.$$

Условие 13. Существует числа $\beta \in (1,2]$ и $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\mathbb{P}(\Delta_\beta < \infty) = 1 \tag{4.6}$$

и

$$\mathbb{E}\big[(\ln^+ \zeta_\beta)^{1/\rho+\varepsilon}\big] < \infty, \qquad \mathbb{E}\big[V(X)(\ln^+ \zeta_\beta)^{1+\varepsilon}\big] < \infty.$$

В работе [56] доказано асимптотическое представление (4.4) при выполнении соотношения (2.3) и условий 10, 12, 13. Результаты статьи [56] обобщают и расширяют не только упомянутые выше результаты из [27], но также и соответствующие результаты из [10] для ВПСС с одним типом частиц. В частности, асимптотическое соотношение (4.4) может иметь место для критических ВПСС с одним типом частиц, если, например,

$$\mathbb{P}\big(\mathcal{E}\big[\xi^2 \cdot 1_{\{\xi \ge a\}}\big] = \infty\big) = 1$$

для некоторого числа $a \ge 0$, т.е. в предположениях, более слабых, нежели требуемые в [10] при доказательстве утверждения (3.7).

Сохраним в многотипном случае прежнее обозначение T для момента вырождения процесса $\mathbf{Z}_n$. Дьяконова [26] доказала, что если производящие функции числа потомков многотипного ВПСС дробно-линейны и выполнены условия 1, 9–11 и некоторые дополнительные технические требования, то существует константа $0 < c < \infty$ такая, что (ср. (3.8)) для любого $i = 1, \ldots, p$

$$\mathbb{P}(T = n \mid \mathbf{Z}_0 = \mathbf{e}_i) \sim c u_i n^{-3/2}, \qquad n \to \infty,$$

где вектор $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_p)$ тот же, что и в условии 10.

4.1.2. *Докритический ВПСС с несколькими типами частиц.* Дьяконова [28] изучала асимптотическое поведение вероятности невырождения многотипного докритического ВПСС. Она показала, что если выполнены условия 9 и 11 и $\mathbb{E}[X] < 0$, то при $n \to \infty$ в (4.5) имеет место сходимость $\mathbb{P}$-п.н. Более того, в [28] установлено, что в строго докритическом случае при $n \to \infty$ (ср. (3.11))

$$\mathbb{P}(\mathbf{Z}_n \ne \mathbf{0} \mid \mathbf{Z}_0 = \mathbf{e}_i) \sim c_i (\mathbb{E}[R])^n, \qquad c_i > 0, \quad i = 1, \ldots, p,$$

если выполнены условия 9, 11 и 8 с величиной $\eta = \zeta(0)$, определяемой соотношением (4.3).

4.2. Функциональная предельная теорема в критическом случае. Для целых $0 \le r \le n$ положим

$$W_{r,n}(t) := e^{-S_{r+(n-r)t}}\big(\mathbf{Z}_{r+(n-r)t}, \mathbf{u}\big), \qquad t \in [0,1],$$

и пусть $r_1, r_2, \ldots$ — последовательность натуральных чисел такая, что $r_n \le n$ и $r_n \to \infty$.

Ватутин и Дьяконова рассмотрели в [56] многотипный ВПСС, удовлетворяющий соотношению (2.3), условиям 10, 12 и условию 13 с параметром $\beta = 2$, и показали, что при $n \to \infty$

$$\mathcal{L}\big(W_{r_n,n}(t),\ t \in [0,1] \ \big|\ \mathbf{Z}_n \ne \mathbf{0};\ \mathbf{Z}_0 = \mathbf{z}\big) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{L}\big(W_{\mathbf{z}}(t),\ t \in [0,1]\big), \tag{4.7}$$

где предельный процесс является случайным процессом с п.н. постоянными траекториями, т.е. $\mathbb{P}(W_{\mathbf{z}}(t) = W_{\mathbf{z}}$ при всех $t \in [0,1]) = 1$, причем $\mathbb{P}(0 < W_{\mathbf{z}} < \infty) = 1$. Сходимость (4.7) является обобщением утверждения (3.13) в двух направлениях. Во-первых, она доказана для процессов с несколькими типами частиц, и, во-вторых, даже для процессов с одним типом частиц условия, при которых установлена сходимость (4.7) в [56], слабее условий, накладываемых на характеристики ветвящегося процесса в [10].

5. К-ПОДХОД ДЛЯ КРИТИЧЕСКОГО ВПСС

Ватутин и Дьяконова [51] для критического ВПСС, удовлетворяющего условию Спицера–Дони (2.3), доказали ряд теорем в рамках К-подхода, которые обобщают результаты работ [49, 50, 52].

5.1. Свойства вероятности невырождения при К-подходе. Следующее ограничение, накладываемое на функцию восстановления (2.6), сходно с условием 4, вводимым для функции восстановления (2.7).

Условие 14. Существуют числа $\varepsilon > 0$ и $a \in \mathbb{N}_0$ такие, что

$$\mathbb{E}\big[(\ln^+ \zeta(a))^{1/(1-\rho)+\varepsilon}\big] < \infty \qquad \text{и} \qquad \mathbb{E}\big[U(-X)(\ln^+ \zeta(a))^{1+\varepsilon}\big] < \infty,$$

где величина $\zeta(a)$ та же, что и в (3.4).

Ватутин и Дьяконова [51] доказали, что при справедливости предположения (2.3) и условий 4 и 14

$$e^{-S_{\tau(n)}}\mathcal{P}(Z_n > 0) \xrightarrow{\mathrm{d}} \zeta, \qquad n \to \infty, \tag{5.1}$$

где случайная величина $\zeta \in (0, 1]$ с вероятностью 1. Соотношение (5.1) показывает, что асимптотическое поведение вероятности невырождения существенным образом зависит от минимального значения сопровождающего случайного блуждания на отрезке $[0, n]$.

5.2. Сходимость одномерных распределений. Положим

$$\widehat{Y}_n := \frac{Z_n}{\mathcal{E}[Z_n \mid Z_n > 0]} \qquad \text{и} \qquad \mathcal{M}^{(n)}(dx) := \mathcal{P}\big(\widehat{Y}_n \in dx \;\big|\; Z_n > 0\big).$$

Из теоремы 1 и леммы 7 работы [51] следует, что если выполнены предположение (2.3) и условия 4 и 14, то существует случайная мера $\mathcal{M}$ (являющаяся собственной и невырожденной с вероятностью 1) такая, что при $n \to \infty$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}\mathcal{M}^{(n)}(dx) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Phi(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda x}\mathcal{M}(dx), \tag{5.2}$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}x\mathcal{M}^{(n)}(dx) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Psi(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda x}x\mathcal{M}(dx) = -\frac{d}{d\lambda}\Phi(\lambda). \tag{5.3}$$

Если производящие функции численности потомства являются дробно-линейными с вероятностью единица, то $\Phi(\lambda) = (1 + \lambda)^{-1}$, а $\Psi(\lambda) = (1 + \lambda)^{-2}$. Таким образом, в дробно-линейном случае имеет место аналог предельной теоремы, установленной Ягломом для классических критических процессов Гальтона–Ватсона.

В случае, когда распределение случайной величины X является абсолютно непрерывным, соотношения (5.1) и (5.2) были ранее доказаны в [52].

5.3. Сходимость конечномерных распределений. Для целого числа $b \geq 2$ и наборов $\bar{t} = (t_0, t_1, \ldots, t_b)$, $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_b)$, где $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_b = 1$ и $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, b$, положим

$$\Phi^{(n)}(\bar{t}, \bar{\lambda}) := \mathcal{E}\left[\exp\left\{-\sum_{i=1}^{b}\lambda_i\widehat{Y}_{nt_i}\right\} \;\middle|\; Z_n > 0\right].$$

Для натурального числа $d \le b$ и вектора $\bar r = (r_0, r_1, r_2, \dots, r_d)$ с целочисленными компонентами $0 = r_0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_d = b$ введем событие

$$\mathcal{U}(\bar t; \bar r, n) := \bigl\{\tau(nt_1) = \ldots = \tau(nt_{r_1}) < \tau(nt_{r_1+1}) = \ldots = \tau(nt_{r_2}) < \ldots < \tau(nt_{r_{d-1}+1}) = \ldots = \tau(nt_{r_d})\bigr\}.$$

В [51] доказано, что если случайная величина X удовлетворяет условиям 2, 4 и 14, то при $n \to \infty$

$$\bigl\{\Phi^{(n)}(\bar t, \bar\lambda) \bigm| \mathcal{U}(\bar t; \bar r, n)\bigr\} \xrightarrow{\mathrm{d}} \prod_{i=1}^{d-1} \Psi_i\biggl(\sum_{j=r_{i-1}+1}^{r_i} \lambda_j\biggr) \Phi_d\biggl(\sum_{j=r_{d-1}+1}^{b} \lambda_j\biggr),$$

где $\Psi_i(\lambda)$, $i = 1, \dots, d-1$, и $\Phi_d(\lambda)$ — независимые случайные функции, распределенные так же, как и функции $\Psi(\lambda)$ из (5.3) и соответственно $\Phi(\lambda)$ из (5.2).

Этот результат показывает, нестрого говоря, что если ВПСС не выродился к далекому моменту n, то его траектория $(Z_0, \dots, Z_n)$ разбивается моментами строгих локальных минимумов сопровождающего случайного блуждания на независимые участки. При этом размер популяции в момент времени j пропорционален величине $e^{S_j - S_{\tau(j)}}$, в то время как максимальное значение популяции на интервале $[0, n]$ пропорционально величине $e^{\max_{0\le j\le n}(S_j - S_{\tau(j)})}$ (со случайным положительным множителем, не превосходящим 1).

Пусть L_t — устойчивый процесс Леви порядка α. Для фиксированных чисел $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_b = 1$ положим $\omega_p := \inf_{t_0 \le u \le t_p} L_u$, $0 \le p \le b$. Пусть D — число различных элементов в наборе $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_b$, а $\overline{R}$ — случайный D-мерный вектор с компонентами

$$R_0 = 0, \qquad R_{i+1} = \max\bigl\{k \ge R_i + 1\colon\ \omega_{R_i+1} = \omega_k\bigr\},$$

т.е. $R_D = b$. В [51] доказано, что если случайная величина X удовлетворяет условиям 2, 4 и 14, то при $n \to \infty$

$$\Phi^{(n)}(\bar t, \bar\lambda) \xrightarrow{\mathrm{d}} \prod_{i=1}^{D-1} \Psi_i\biggl(\sum_{j=R_{i-1}+1}^{R_i} \lambda_j\biggr) \Phi_D\biggl(\sum_{j=R_{D-1}+1}^{b} \lambda_j\biggr),$$

где функции $(\Psi_1(\lambda), \Phi_1(\lambda), \Psi_2(\lambda), \Phi_2(\lambda), \dots)$ те же, что и ранее, причем они не зависят от процесса Леви L_t, определяющего вектор $\overline{R}$.

Таким образом, соотношения (5.1) и (5.2) показывают, что если $t \in (0, 1]$ *фиксировано*, то условное распределение случайной величины $Z_{nt}\, e^{S_{\tau(nt)} - S_{nt}}$ при условии $Z_n > 0$ сходится в некотором смысле к собственному предельному распределению, не имеющему атома в нуле. Этому утверждению можно дать следующую нестрогую интерпретацию: если процесс не выродился к моменту времени n, то размер Z_{nt} популяции в момент времени nt пропорционален $e^{S_{nt} - S_{\tau(nt)}}$. Таким образом, в отличие от условных предельных теорем для классических критических или надкритических ветвящихся процессов, в которых функция, нормирующая размер популяции, растет линейно или экспоненциально с течением времени, случайная функция, нормирующая размер популяции в критических ветвящихся процессах в случайной среде, подвержена существенным колебаниям.

Это означает, что популяция критического ветвящегося процесса в случайной среде проходит в моменты, близкие к моментам последовательных минимумов сопровождающего случайного блуждания, через бутылочные горлышки.

Ватутин и Дьяконова в работах [49–53] детально исследовали это явление в рамках K-подхода. Они показали, что условное распределение числа частиц в процессе в моменты времени, близкие к $\tau(nt)$, $t \in (0, 1]$, при условии невырождения процесса к моменту n сходится к дискретному распределению. Таким образом, в отличие от *неслучайных* моментов вида nt, в которые размер популяции является большим (и даже экспоненциально большим, см. [51]),

количество индивидуумов в популяции в (случайные) моменты последовательных глобальных минимумов сопровождающего случайного блуждания оказывается разительно малым, но потом опять начинает расти с экспоненциальной скоростью. Это дает объяснение (разумеется, в рамках рассматриваемой нами модели) следующему известному факту в биологии популяций: многие популяции в течение своего развития проходят через "благоприятные периоды" (быстрый рост размера популяции) и "неблагоприятные периоды" (стремительное вырождение, когда выживают лишь несколько представителей популяции, которые впоследствии порождают новую быстро растущую популяцию). Отметим также аналогию между этим сценарием эволюции популяций и поведением промежуточно докритических ВПСС, которое было охарактеризовано в рамках A-подхода в п. 3.2.2.

5.4. Дискретные предельные распределения. Опишем поведение популяции вблизи точки глобального минимума сопровождающего случайного блуждания. В [53] доказано, что если выполнены предположение (2.3) и условия 4 и 14, то для любых $m \in \mathbb{Z}$ и $t \in (0,1)$

$$\mathcal{E}\big[s^{Z_{\tau(n)+m}} \mid Z_n > 0\big] \xrightarrow{\mathrm{d}} \varphi_m(s), \qquad \mathcal{L}\big(\mathcal{E}\big[s^{Z_{\tau(nt)+m}} \mid Z_n > 0\big] \mid \tau(n) > nt\big) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{L}(\varphi_m^*(s))$$

(в указанной работе для производящих функций $\varphi_m(s)$ и $\varphi_m^*(s)$ приведены явные выражения). Отметим, что предельная производящая функция в последнем соотношении не зависит от конкретного выбора значения $t \in (0,1)$.

Приведем еще два результата из работы [53]. Первый из них характеризует условное (при условии невырождения процесса) предельное совместное распределение числа частиц в популяции в два последовательно расположенных момента времени, находящихся вблизи точки глобального минимума сопровождающего случайного блуждания, в то время как второй результат описывает условное совместное распределение тех же величин, находящихся вблизи момента $\tau(nt)$ при условии $\tau(n) > nt$. А именно, в [53] доказано, что если выполнены предположение (2.3) и условия 4 и 14, то для любых $m \in \mathbb{Z}$ и $t \in (0,1)$, $s_1, s_2 \in [0,1)$ при $n \to \infty$

$$\mathcal{E}\Big[s_1^{Z_{\tau(n)+m}} s_2^{Z_{\tau(n)+m+1}} \mid Z_n > 0\Big] \xrightarrow{\mathrm{d}} \varphi_m(s_1, s_2),$$

$$\mathcal{L}\Big(\mathcal{E}\Big[s_1^{Z_{\tau(nt)+m}} s_2^{Z_{\tau(nt)+m+1}} \mid Z_n > 0\Big] \mid \tau(n) > nt\Big) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{L}(\varphi_m^*(s_1, s_2))$$

(для $\varphi_m(s_1, s_2)$ и $\varphi_m^*(s_1, s_2)$ имеются явные выражения).

5.5. Распределение процесса при условии его вырождения в данный момент времени. Ватутин и Куприанову исследовали в [57] в рамках K-подхода условное предельное распределение критического ВПСС при условии его вырождения в далекий момент времени. Пусть

$$\tau(l,n) := \min\Big\{k \in [l,n] \colon S_k = \min_{l \le p \le n} S_p\Big\}$$

— самая левая точка на интервале $[l,n]$, в которой достигается минимальное значение сопровождающего случайного блуждания на этом интервале. В [57] доказана условная предельная теорема при условии $\{T = n\}$, описывающая асимптотическое поведение при $n \to \infty$ числа частиц в процессе в моменты времени, близкие к моментам $\tau(nt)$. Оказалось, что если распределение случайной величины X принадлежит области притяжения устойчивого закона с параметром $\alpha \in (0,2]$, то при K-подходе процесс вырождается постепенно (хотя в рамках A-подхода наблюдается явление внезапного вырождения; см. [58]).

Пусть

$$A_{m,n} := \frac{\mathcal{P}(Z_n > 0 \mid Z_0 = 1)}{\mathcal{P}(Z_n > 0 \mid Z_m = 1)}\, \mathcal{P}(Z_n = 0 \mid Z_m = 1) b_m,$$

где $b_m := \sum_{j=0}^{m-1} \eta_{j+1} e^{-S_j}/2$, а случайные величины η_j те же, что и в (3.6). В [57] установлено, что если производящие функции численности потомства дробно-линейны и выполнены предположение (2.3) и условия 4 и 14, то для любых $m \in \mathbb{Z}$, $t \in (0,1)$, $s \in (0,1]$, $\lambda \in (0,\infty)$ при $n \to \infty$

$$\mathcal{L}\big(\mathcal{E}\big[s^{Z_{\tau(nt)+m}} \bigm| T = n\big] \bigm| \tau(n) \geq nt\big) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{L}\biggl(s\biggl(\frac{1-\Theta_m}{1-\Theta_m s}\biggr)^2\biggr), \tag{5.4}$$

$$\mathcal{L}\big(\mathcal{E}\big[s^{Z_{\tau(nt,n)+m}} \bigm| T = n\big] \bigm| \tau(n) < nt\big) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{L}\biggl(s\biggl(\frac{1-\theta_m}{1-\theta_m s}\biggr)^2\biggr), \tag{5.5}$$

где $\Theta_m \in (0,1)$, $\theta_m \in (0,1)$ с вероятностью 1, и, более того,

$$\mathcal{E}\biggl[\exp\biggl\{-\lambda\frac{Z_{nt}}{A_{nt,n}}\biggr\} \biggm| T = n\biggr] \xrightarrow{\mathrm{d}} \frac{1}{(1+\lambda)^2}. \tag{5.6}$$

В той же работе доказано, что условное распределение случайной величины $A_{nt,n}e^{S_{\tau(nt)}-S_{nt}}$ при условии $\tau(n) \geq nt$ слабо сходится при $n \to \infty$ к случайной величине, являющейся положительной и конечной с вероятностью единица. Таким образом, если $\tau(n) \geq nt$, то для таких моментов времени nt нормирующая величина в (5.6) существенным образом зависит от поведения сопровождающего случайного блуждания *до* момента nt. С другой стороны, условное распределение случайной величины $A_{nt,n}e^{S_{\tau(nt,n)}-S_{nt}}$ при условии $\tau(n) < nt$ слабо сходится при $n \to \infty$ к случайной величине, являющейся положительной и конечной с вероятностью единица. Следовательно, при $\tau(n) < nt$ нормирующая величина в (5.6) определяется поведением сопровождающего случайного блуждания *после* момента nt.

Можно привести следующую нестрогую интерпретацию этих результатов. Если процесс вырождается в далекий момент времени $T = n$, то моменту окончательного вырождения процесса предшествует ряд "плохих" периодов в эволюции, характеризующихся малым размером популяции. Согласно (5.4) и (5.5) эти периоды располагаются вблизи *случайных* точек $\tau(nt) \cdot 1_{\{\tau(n)\geq nt\}}$ и $\tau(nt,n) \cdot 1_{\{\tau(n)<nt\}}$. С другой стороны, в *неслучайные* моменты времени nt, $t \in (0,1)$, размер популяции достаточно велик ввиду соотношения (5.6). Следовательно, величина $\ln Z_{nt}$ растет как $S_{nt} - S_{\tau(nt)}$, если $\tau(n) > nt$, и как $S_{nt} - S_{\tau(nt,n)}$, если $\tau(n) < nt$. Таким образом, вырождение процесса $\{Z_{tT},\, 0 \leq t \leq 1\}$ происходит постепенно, путем его прохождения через последовательность бутылочных горлышек и благоприятных периодов.

6. РЕДУЦИРОВАННЫЕ ВПСС

При изучении свойств процесса $\{Z_n,\, n \geq 0\}$ большой интерес представляет структура его генеалогического дерева, которую можно описать при помощи редуцированного процесса $\{Z_{k,m},\, 0 \leq k \leq m < \infty\}$, где $Z_{k,m}$ — число частиц, существовавших в процессе $\{Z_n,\, n \geq 0\}$ в момент времени k и имеющих ненулевое потомство в момент времени m.

6.1. A-подход. Первые результаты для критического редуцированного ВПСС в случайной среде с дробно-линейными производящими функциями получили Боровков и Ватутин [18], а докритический редуцированный ВПСС был впервые изучен Фляйшманном и Ватутиным [32]. Ватутин [46] доказал, что для редуцированного критического ВПСС, удовлетворяющего условию 1 и некоторым дополнительным техническим условиям,

$$\mathcal{L}\biggl(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\ln Z_{nt,n},\ t \in [0,1] \biggm| Z_n > 0\biggr) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{L}\Bigl(\inf_{t\leq u\leq 1} W_u^+,\ t \in [0,1]\Bigr), \tag{6.1}$$

где W_t^+, $t \in [0,\infty)$, — броуновская извилина, а символ $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ обозначает слабую сходимость в пространстве $D[0,1]$, снабженном топологией Скорохода. Ранее эта сходимость была установлена в [18] (при более сильных ограничениях) для случайной среды с дробно-линейными производящими функциями.

Пусть $B_n = \max\{m < n\colon Z_{m,n} = 1\}$. Величина $d_n = n - B_n$ называется *расстоянием до ближайшего общего предка* (БОПР$_n$) всех частиц, существующих в процессе в момент времени n. Классические результаты Зубкова [61], установленные им для обычных процессов Гальтона–Ватсона, рассматриваемых при условии их невырождения, показывают, что в критическом случае случайная величина d_n равномерно распределена на отрезке $[0,n]$, в то время как в докритическом случае величина d_n асимптотически ограничена. Оказывается, что для ветвящихся процессов в случайной среде величина d_n имеет совершенно другие вероятностные свойства.

Сходимость (6.1) показывает, нестрого говоря, что в рамках A-подхода случайная величина $Z_{nt,n}$ растет как $\exp\{\sqrt{n}\inf_{t\le u\le 1} W_u^+\}$. Напомним, что $\mathbf{P}\big(\inf_{t\le u\le 1} W_u^+ > 0\big) = 1$ для любого $t \in (0,1]$. Таким образом, в рамках A-подхода процесс $Z_{nt,n}$, рассматриваемый при условии невырождения первоначального процесса к данному моменту времени n, имеет на ранней стадии своего развития порядок $o(n)$. Более того, Боровков и Ватутин [18] установили, что если производящие функции дробно-линейны, то с положительной вероятностью первоначальная частица является ближайшим общим предком всех частиц, существующих в процессе в момент времени n.

Изучая докритические ВПСС с геометрическими производящими функциями численности потомства, Фляйшманн и Ватутин [32] доказали, что для промежуточно и строго докритических процессов БОПР$_n$ располагается неподалеку от момента наблюдения n, в то время как в слабо докритическом случае он может находиться как в окрестности точки n, так и вблизи начала эволюции.

6.2. Критические редуцированные ВПСС в рамках K-подхода. В этом пункте представлены результаты, полученные Ватутиным и Дьяконовой в работах [54, 55], посвященных исследованию критических редуцированных ВПСС в рамках K-подхода. В дальнейшем, если не оговорено противное, предполагается, что выполнены требование (2.3) и условия 4 и 14.

6.2.1. *Расстояние до* БОПР$_n$ *и некоторые другие свойства редуцированных процессов.* Ватутин и Дьяконова [54] доказали, что в критическом случае БОПР$_n$ находится "не слишком далеко" от момента глобального минимума $\tau(n)$ сопровождающего случайного блуждания на отрезке $[0,n]$, т.е. для любого $m \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{P}\big(B_n = \tau(n) + m\big) \xrightarrow{\mathrm{d}} r_m, \qquad \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_m = 1,$$

причем с вероятностью единица

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}\big(|B_n - \tau(n)| \le m\big) = 1.$$

В силу соотношения (2.5) этот факт указывает на существенную разницу между критическим ВПСС и обычным критическим процессом Гальтона–Ватсона, в котором, как уже упоминалось, БОПР$_n$ равномерно распределен на отрезке $[0,n]$.

В [54] также установлено, что в рамках K-подхода условные конечномерные распределения процесса $\{Z_{\tau(n)+m,n},\, m \in \mathbb{Z}\}$ при условии $Z_n > 0$ слабо сходятся к конечномерным распределениям процесса Гальтона–Ватсона, эволюционирующего в неоднородной случайной среде. Предельный процесс начинается в $-\infty$ с одной частицы, которая с вероятностью r_m умирает

в момент времени $m \in (-\infty, +\infty)$, производя при этом потомство в соответствии с ВПФ $a_m(s)$, которая определяется с помощью предельного соотношения

$$\mathcal{E}\big[s^{Z_{\tau(n)+m+1,n}} \bigm| Z_{\tau(n)+m,n} = 1\big] \xrightarrow{\mathrm{d}} a_m(s), \qquad s \in [0,1),$$

при $n \to \infty$. Новорожденные частицы имеют единичную продолжительность жизни и, погибая, производят потомство независимо друг от друга согласно ВПФ $a_{m+1}(s)$, и т.д. Заметим, что это описание подчеркивает существенное отличие приведенных выше результатов от соответствующих предельных результатов, установленных для обычных редуцированных критических процессов Гальтона–Ватсона в работе [31].

Кроме того, в [54] были изучены свойства редуцированного процесса в моменты времени, расположенные существенно правее момента глобального минимума $\tau(n)$. Пусть

$$\beta_n(k) := \frac{1}{\mathcal{E}[Z_{k,n} \mid Z_n > 0]}, \qquad 0 \le k \le n.$$

В рассматриваемой работе было показано, что если $\tau(n) + m \le n$, то при $n \to \infty$ и $m \to \infty$

$$\mathcal{E}\big[e^{-\lambda Z_{\tau(n)+m,n}\beta_n(\tau(n)+m)} \bigm| Z_n > 0\big] \xrightarrow{\mathrm{d}} \Phi(\lambda),$$

где $\Phi(\lambda)$ — то же преобразование Лапласа, что и в (5.2). Более того, если $0 \le m_1 < m_2 < \ldots$ $\ldots < m_p \le n - \tau(n)$, то при $m_1 \to \infty$ и $n \to \infty$

$$\mathcal{E}\left[\prod_{i=1}^{p} e^{-\lambda_i Z_{\tau(n)+m_i,n}\beta_n(\tau(n)+m_i)} \,\middle|\, Z_n > 0\right] \xrightarrow{\mathrm{d}} \Phi\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\right).$$

6.2.2. *Редуцированные процессы в неслучайные моменты времени.* Наряду с анализом свойств редуцированного процесса в случайные моменты времени, в статье [54] были исследованы свойства процесса $Z_{nt,n}$ для *неслучайных* моментов $nt \in (0,n)$. В частности, было показано, что

$$\mathcal{E}\big[e^{-\lambda Z_{nt,n}\beta_n(nt)} \bigm| Z_n > 0\big] \xrightarrow{\mathrm{d}} \Phi(\lambda)\cdot 1_{\{\tau \le t\}} + e^{-\lambda}\cdot 1_{\{\tau > t\}}, \qquad n \to \infty,$$

где, напомним, случайная величина τ имеет бета-распределение с параметрами $(1-\rho,\rho)$ (см. соотношение (2.5)) и не зависит от $\Phi(\lambda)$. Более того, установлено, что для любых наборов $\lambda_1 \ge 0, \ldots, \lambda_k \ge 0$ и $0 < t_1 < \ldots < t_k \le 1$ при $n \to \infty$

$$\mathcal{E}\left[\exp\left\{-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i Z_{nt_i,n}\beta_n(nt_i)\right\} \,\middle|\, Z_n > 0\right] \xrightarrow{\mathrm{d}} \Phi\left(\sum_{i=i_\tau}^{k}\lambda_i\right)e^{-\sum_{i=1}^{i_\tau-1}\lambda_i},$$

где $i_\tau = \min\{i\colon \tau < t_i\}$.

Предельный процесс $\{Y_t,\, 0 \le t \le 1\}$ с указанными выше конечномерными преобразованиями Лапласа имеет следующий вид: $Y_t = 1$ до момента времени τ, а после него $Y_t \equiv Y$, где случайная величина Y имеет преобразование Лапласа $\Phi(\lambda)$, причем величины τ и Y независимы. Отметим, что если вероятностные производящие функции законов размножения являются геометрическими, то величина Y имеет экспоненциальное распределение с параметром 1.

В [54] также установлено, что если выполнены условия 2, 4 и 14, то нормирующая величина $\beta_n(nt)$ обладает следующим свойством: для любого $t \in (0,1)$

$$\mathcal{L}\big(e^{S_{\tau(nt,n)}-S_{\tau(n)}}\beta_n(nt) \bigm| \tau(n) < nt\big) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{L}(\zeta^*), \qquad n \to \infty,$$

где ζ^* — собственная случайная величина. Отсюда видно, что если $\tau(n) < nt$, то величина $Z_{nt,n}$ пропорциональна величине $e^{S_{\tau(nt,n)}-S_{\tau(n)}}$ с точностью до случайного множителя, отделенного от нуля и бесконечности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Афанасьев В.И.* Предельные теоремы для условного случайного блуждания и некоторые применения: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1980.
2. *Афанасьев В.И.* Предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде // Дискрет. математика. 1993. Т. 5, № 1. С. 45–58.
3. *Афанасьев В.И.* Новая предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде // Дискрет. математика. 1997. Т. 9, № 3. С. 52–67.
4. *Афанасьев В.И.* Предельные теоремы для умеренно докритического ветвящегося процесса в случайной среде // Дискрет. математика. 1998. Т. 10, № 1. С. 141–157.
5. *Афанасьев В.И.* О максимуме критического ветвящегося процесса в случайной среде // Дискрет. математика. 1999. Т. 11, № 2. С. 86–102.
6. *Афанасьев В.И.* Предельные теоремы для промежуточно докритического и строго докритического ветвящихся процессов в случайной среде // Дискрет. математика. 2001. Т. 13, № 1. С. 132–157.
7. *Афанасьев В.И.* Функциональная предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде // Дискрет. математика. 2001. Т. 13, № 4. С. 73–91.
8. *Afanasyev V.I., Böinghoff C., Kersting G., Vatutin V.A.* Limit theorems for weakly subcritical branching processes in random environment // J. Theor. Probab. 2012. V. 25. P. 703–732.
9. *Afanasyev V.I., Böinghoff C., Kersting G., Vatutin V.A.* Conditional limit theorems for intermediately subcritical branching processes in random environment // Ann. Inst. Henri Poincaré. Probab. Stat. To appear; arXiv: 1108.2127 [math.PR].
10. *Afanasyev V.I., Geiger J., Kersting G., Vatutin V.A.* Criticality for branching processes in random environment // Ann. Probab. 2005. V. 33. P. 645–673.
11. *Afanasyev V.I., Geiger J., Kersting G., Vatutin V.A.* Functional limit theorems for strongly subcritical branching processes in random environment // Stoch. Processes Appl. 2005. V. 115. P. 1658–1676.
12. *Альбеверио С., Козлов М.В.* О возвратности и транзиентности зависящих от состояния ветвящихся процессов в случайной среде // Теория вероятн. и ее примен. 2003. Т. 48, № 4. С. 641–660.
13. *Athreya K.B., Karlin S.* On branching processes with random environments. I: Extinction probabilities // Ann. Math. Stat. 1971. V. 42. P. 1499–1520.
14. *Athreya K.B., Karlin S.* Branching processes with random environments. II: Limit theorems // Ann. Math. Stat. 1971. V. 42. P. 1843–1858.
15. *Athreya K.B., Ney P.E.* Branching processes. Berlin: Springer, 1972.
16. *Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L.* Regular variation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987.
17. *Birkner M., Geiger J., Kersting G.* Branching processes in random environment—A view on critical and subcritical cases // Interacting stochastic systems / Ed. by J.-D. Deuschel, A. Greven. Berlin: Springer, 2005. P. 269–291.
18. *Borovkov K.A., Vatutin V.A.* Reduced critical branching processes in random environment // Stoch. Processes Appl. 1997. V. 71. P. 225–240.
19. *Böinghoff C., Dyakonova E.E., Kersting G., Vatutin V.A.* Branching processes in random environment which extinct at a given moment // Markov Processes Relat. Fields. 2010. V. 16. P. 329–350.
20. *Dekking F.M.* On the survival probability of a branching process in a finite state i.i.d. environment // Stoch. Processes Appl. 1988. V. 27. P. 151–157.
21. *Doney R.A.* Conditional limit theorems for asymptotically stable random walks // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verwandte Geb. 1985. Bd. 70. S. 351–360.
22. *Doney R.A.* Spitzer's condition and ladder variables in random walks // Probab. Theory Relat. Fields. 1995. V. 101. P. 577–580.
23. *D'Souza J.C., Hambly B.M.* On the survival probability of a branching process in a random environment // Adv. Appl. Probab. 1997. V. 29. P. 38–55.
24. *Durrett R.* Conditioned limit theorems for some null recurrent Markov processes // Ann. Probab. 1978. V. 6. P. 798–828.
25. *Дьяконова Е.Е.* Об асимптотике вероятности невырождения многомерного ветвящегося процесса в случайной среде // Дискрет. математика. 1999. Т. 11, № 1. С. 113–128.
26. *Dyakonova E.E.* On multitype branching processes in a random environment // J. Math. Sci. 2002. V. 111, N 3. P. 3537–3540.
27. *Дьяконова Е.Е.* Критические многотипные ветвящееся процессы в случайной среде // Дискрет. математика. 2007. Т. 19, № 4. С. 23–41.

28. *Dyakonova E.* On subcritical multi-type branching process in random environment // Algorithms, trees, combinatorics and probabilities: Proc. Fifth Colloquium on Mathematics and Computer Science. Nancy: DMTCS, 2008. P. 401–408.
29. *Dyakonova E.E., Geiger J., Vatutin V.A.* On the survival probability and a functional limit theorem for branching processes in random environment // Markov Processes Relat. Fields. 2004. V. 10. P. 289–306.
30. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984. Т. 2.
31. *Fleischmann K., Siegmund-Schultze R.* The structure of reduced critical Galton–Watson processes // Math. Nachr. 1977. Bd. 79. S. 233–241.
32. *Fleischmann K., Vatutin V.A.* Reduced subcritical Galton–Watson processes in a random environment // Adv. Appl. Probab. 1999. V. 31. P. 88–111.
33. *Geiger J., Kersting G.* The survival probability of a critical branching process in random environment // Теория вероятн. и ее примен. 2000. Т. 45, № 3. С. 607–615.
34. *Geiger J., Kersting G., Vatutin V.A.* Limit theorems for subcritical branching processes in random environment // Ann. Inst. Henri Poincaré. Probab. Stat. 2003. V. 39. P. 593–620.
35. *Guivarc'h Y., Liu Q.* Propriétés asymptotiques des processus de branchement en environnement aléatoire // C. r. Acad. sci. Paris. Ser. 1: Math. 2001. V. 332. P. 339–344.
36. *Kaplan N.* Some results about multidimensional branching processes with random environments // Ann. Probab. 1974. V. 2. P. 441–455.
37. *Kesten H., Spitzer F.* Convergence in distribution of products of random matrices // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verwandte Geb. 1984. Bd. 67. S. 363–386.
38. *Козлов М.В.* Об асимптотике вероятности невырождения критических ветвящихся процессов в случайной среде // Теория вероятн. и ее примен. 1976. Т. 21, № 4. С. 813–825.
39. *Козлов М.В.* Условная функциональная предельная теорема для критического ветвящего процесса в случайной среде // ДАН. 1995. Т. 344, № 1. С. 12–15.
40. *Liu Q.* On the survival probability of a branching process in a random environment // Ann. Inst. Henri Poincaré. Probab. Stat. 1996. V. 32. P. 1–10.
41. *Севастьянов Б.А.* Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971.
42. *Спицер Ф.* Принципы случайного блуждания. М.: Мир, 1969.
43. *Smith W.L., Wilkinson W.E.* On branching processes in random environments // Ann. Math. Stat. 1969. V. 40. P. 814–827.
44. *Tanny D.* Limit theorems for branching processes in a random environment // Ann. Probab. 1977. V. 5. P. 100–116.
45. *Tanny D.* On multitype branching processes in a random environment // Adv. Appl. Probab. 1981. V. 13. P. 464–497.
46. *Ватутин В.А.* Редуцированные ветвящиеся процессы в случайной среде: критический случай // Теория вероятн. и ее примен. 2002. Т. 47, № 1. С. 21–38.
47. *Ватутин В.А.* Предельная теорема для промежуточно докритического ветвящегося процесса в случайной среде // Теория вероятн. и ее примен. 2003. Т. 48, № 3. С. 453–465.
48. *Ватутин В.А., Дьяконова Е.Е.* Критические ветвящиеся процессы в случайной среде: вероятности вырождения в фиксированный момент // Дискрет. математика. 1997. Т. 9, № 4. С. 100–126.
49. *Vatutin V.A., Dyakonova E.E.* Reduced branching processes in random environment // Mathematics and computer science. II: Algorithms, trees, combinatorics and probabilities / Ed. by B. Chauvin, P. Flajolet, D. Gardy, A. Mokkadem. Basel: Birkhäuser, 2002. P. 455–467.
50. *Ватутин В.А., Дьяконова Е.Е.* Ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона в случайной среде. I: Предельные теоремы // Теория вероятн. и ее примен. 2003. Т. 48, № 2. С. 274–300.
51. *Ватутин В.А., Дьяконова Е.Е.* Ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона в случайной среде. II: Конечномерные распределения // Теория вероятн. и ее примен. 2004. Т. 49, № 2. С. 231–268.
52. *Vatutin V., Dyakonova E.* Yaglom type limit theorem for branching processes in random environment // Mathematics and computer science. III: Algoritms, trees, combinatorics and probabilities / Ed. by M. Drmota, P. Flajolet, D. Gardy, B. Gittenberger. Basel: Birkhäuser, 2004. P. 375–385.
53. *Ватутин В.А., Дьяконова Е.Е.* Ветвящиеся процессы в случайной среде и бутылочные горлышки в эволюции популяций // Теория вероятн. и ее примен. 2006. Т. 51, № 1. С. 22–46.
54. *Ватутин В.А., Дьяконова Е.Е.* Предельные теоремы для редуцированных ветвящихся процессов в случайной среде // Теория вероятн. и ее примен. 2007. Т. 52, № 2. С. 271–300.
55. *Ватутин В.А., Дьяконова Е.Е.* Волны в редуцированных ветвящихся процессах в случайной среде // Теория вероятн. и ее примен. 2008. Т. 53, № 4. С. 665–683.

56. *Ватутин В.А., Дьяконова Е.Е.* Асимптотические свойства многотипных критических ветвящихся процессов, эволюционирующих в случайной среде // Дискрет. математика. 2010. Т. 22, № 2. С. 22–40.
57. *Vatutin V.A., Kyprianou A.E.* Branching processes in random environment die slowly // Algorithms, trees, combinatorics and probabilities: Proc. Fifth Colloquium on Mathematics and Computer Science. Nancy: DMTCS, 2008. P. 379–400.
58. *Ватутин В.А., Вахтель В.И.* Внезапное вырождение критического ветвящегося процесса в случайной среде // Теория вероятн. и ее примен. 2009. Т. 54, № 3. С. 417–438.
59. *Vatutin V.A., Zubkov A.M.* Branching processes. II // J. Sov. Math. 1993. V. 67, N 6. P. 3407–3485.
60. *Weissner E.W.* Multitype branching processes in random environments // J. Appl. Probab. 1971. V. 8. P. 17–31.
61. *Зубков А.М.* Предельные распределения расстояния до ближайшего общего предка // Теория вероятн. и ее примен. 1975. Т. 20, № 3. С. 614–623.