Б. Л. Фейгин, Д. Б. Фукс, Стабильные когомологии алгебры W_n и соотношения в алгебре L_1, *Функц. анализ и его прил.*, 1984, том 18, выпуск 3, 94–95

Функциональный анализ и его приложения,
1984, т. 18, вып. 3, 94—95.

УДК 519.46

СТАБИЛЬНЫЕ КОГОМОЛОГИИ АЛГЕБРЫ W_n И СООТНОШЕНИЯ В АЛГЕБРЕ L_1

Б. Л. Фейгин, Д. Б. Фукс

1. Введение. Пусть W_n — алгебра Ли формальных векторных полей в $\mathbf{C}^n$ и $L_1 = L_1(n)$ — подалгебра этой алгебры, составленная из векторных полей с тривиальной 1-струей. Эти алгебры градуированы, вследствие чего градуированы их когомологии с коэффициентами в градуированных модулях. Эту градуировку в когомологиях мы обозначаем нижними индексами в скобках. Говоря о когомологиях, мы всегда подразумеваем непрерывные когомологии.

В статье [1] вычислены стабильные когомологии алгебры Ли $L_1(n)$ с тривиальными коэффициентами, т. е. $H^r_{(m)}(L_1(n); \mathbf{C})$, где n достаточно велико по сравнению с r и m; там же приведены некоторые следствия из этого вычисления. Источником ограничений на n в [1] является тот факт, что базисные тензорные инвариноты в $\mathbf{C}^n$ линейно независимы, лишь если n достаточно велико по сравнению с рангом рассматриваемых тензоров; каким именно должно быть n, указывает «вторая основная теорема теории инвариантов» (см. [2]). Главным содержанием этой заметки является замечание, что совсем простое добавление к указанной теореме теории инвариантов (возможно, не новое, хотя мы не встречали его в литературе) позволяет существенно расширить диапазон тех n, для которых справедливы результаты статьи [1]. Это усовершенствование результатов [1] приводит к довольно неожиданному следствию об определяющей системе образующих и соотношений алгебры $L_1(n)$.

2. Лемма из теории инвариантов. Обозначим через V стандартное n-мерное представление алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$ и рассмотрим $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$-модуль $W = S^{r_1}V' \otimes \ldots \otimes S^{r_m}V' \otimes (\otimes^r V)$, где $r_1 + \ldots + r_m = r$; штрих обозначает переход к сопряженному пространству. *Базисные* $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$-*инварианты* в модуле W' соответствуют разбиениям $\{1, \ldots, r\} = S_1 \cup \ldots \cup S_m$ с $\operatorname{Card} S_i = r_i$; инвариант I_S, отвечающий разбиению $S = \{S_i\}$, определяется формулой

$$I_S(\xi_1, \ldots, \xi_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_r) = \prod_{i=1}^{m} \prod_{j \in S_i} \alpha_j(\xi_i),$$

где $\xi_i \in V$, $\alpha_j \in V'$. Множество всех разбиений S указанного вида обозначается через Σ. В силу первой основной теоремы теории инвариантов инварианты I_S с $S \in \Sigma$ линейно порождают пространство $\operatorname{Inv} W'$ всех инвариантов модуля W'.

Лемма. *Если $n \geqslant m$, то инварианты I_S линейно независимы.*

(Если в этой формулировке вместо m написать r, то она станет прямым следствием второй основной теоремы теории инвариантов.)

Доказательство. Можно ограничиться случаем $n = m$. Выберем в V базис $e_1, \ldots, e_m$. Пусть $I = \Sigma a_S I_S$ (суммирование по $S \in \Sigma$). Возьмем $T = \{T_i\} \in \Sigma$ и подставим в I следующие аргументы: $\xi_i = x_{i1}e_1' + \ldots + x_{im}e_m'$, $\alpha_j = e_k$ при $j \in T_k$. Очевидно, I принимает на этих аргументах значение $\Pi_{i,j} x_{ij}^{r_{ij}}$, где $r_{ij} = \operatorname{Card}(S_i \cap T_j)$. Следовательно, значение инварианта I на этих аргументах есть многочлен от x_{ij}, причем коэффициент при $x_{11}^{r_1} \ldots x_{mm}^{r_m}$ равен a_T. Мы видим, что если $I = 0$, то $a_T = 0$ при всех $T \in \Sigma$.

3. Теоремы о стабильных когомологиях алгебры W_n. Единственная в статье [1] ссылка на основные теоремы теории инвариантов содержится в п. 2 § 1 этой статьи. Доказанная лемма позволяет заменить в соответствующей фразе неравенство $r + q \leqslant n$ неравенством $r + p \leqslant n$, которое, поскольку $p \leqslant r$, выполнено, если выполнено неравенство $2r \leqslant n$. Это позволяет, ничего больше не меняя в доказательствах, произвести соответствующие изменения во всех формулировках статьи. Мы приведем здесь новые формулировки теорем 0.1, 0.2, 2.1 и 2.2, напомнив необходимые обозначения. Через T^p_q обозначается $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$ — модуль $(\otimes^p V) \otimes (\otimes^q V')$, через A — его произвольный подмодуль, через $\mathscr{A}$ — соответствующий W_n-модуль формальных тензорных полей. При $A = T^0_q$, $S^q V'$ модуль $\mathscr{A}$ обозначается также соответственно через $\mathscr{T}_q$, $\mathscr{S}_q$.

Теорема 3.1. *Если $n > 2r$, то $H^r_{(m)}(L_1(n); \mathbf{C}) = 0$ при $r \neq m$.*

Теорема 3.2. *Если $n > 2r$, то $H^r(W_n, \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C}), \mathscr{A}) = 0$ при $r \neq q - p$.*

Т е о р е м а 3.3. *Если $n > 2r$, то*

$$H^r(W_n; \mathcal{T}_q) \cong H^{r-q}(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}); \mathbb{C}) \otimes \mathrm{Inv}(\otimes^q \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})).$$

Т е о р е м а 3.4. *Если $n > 2r$, то*

$$H^r(W_n; \mathcal{S}_q) \cong H^{r-q}(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}); \mathbb{C}) \otimes H^q(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}); \mathbb{C}).$$

Аналогичным образом изменяются формулировки теоремы 2.4 и гипотезы 2.3 (которая остается гипотезой).

4. Образующие и соотношения алгебры $L_1^{\mathrm{pol}}(n)$ и других подобных алгебр. Как известно, минимальная система образующих и соотношений в подалгебре $L_1^{\mathrm{pob}}(n)$ алгебры $L_1(n)$, составленной из полиномиальных векторных полей, при каждом m содержит $\dim H^1_{(m)}(L_1(n); \mathbb{C})$ образующих веса m и $\dim H^2_{(m)}(L_1(n); \mathbb{C})$ соотношений веса m. Таким образом, если мы положим в теореме 3.1 $r = 1$, то мы получим, что при $n > 2$ алгебра $L_1^{\mathrm{pol}}(n)$ порождается полями веса 1. Впрочем, это совершенно очевидно и непосредственно; более того, это верно и при $n = 2$. Алгебра же $L_1^{\mathrm{pol}}(1)$ порождается, как известно, двумя образующими весов 1 и 2. Если в теореме 3.1 положить $r = 2$, то мы увидим, что при $n > 4$ эти образующие связаны только соотношениями веса 2. В действительности, как показывает прямое, но довольно длинное вычисление, это верно и при $n = 3, 4$. При $n = 1$ соотношений два и они имеют веса 5 и 7, при $n = 2$ образующие (их 6) связаны 25 соотношениями, 7 из которых имеют вес 2, остальные — вес 3.

Соотношения веса 2 между образующими веса 1 — это линейные соотношения между коммутаторами. Мы приходим к следующему утверждению.

Т е о р е м а 4.1. *Пусть $F_k \subset L_1(n)$ — пространство векторных полей веса k. При $n \geqslant 2$ алгебра $L_1^{\mathrm{pol}}(n)$ порождается элементами любого базиса пространства F_1. При $n \geqslant 3$ определяющую систему соотношений составляют элементы любого базиса ядра оператора $[\ ,\ ]\colon \Lambda^2 F_1 \to F_2$.*

Назовем градуированную алгебру Ли $\bigoplus_{k \geqslant 1} F_k$ *линейно порожденной*, если для нее выполнено заключение теоремы 4.1.

Т е о р е м а 4.2. *Пусть H_n — алгебра Ли формальных гамильтоновых векторных полей в $\mathbb{C}^{2n}$. Если $n \geqslant 3$, то алгебра Ли $H_n \cap L_1^{\mathrm{pol}}(2n)$ является линейно порожденной.*

Доказательство этой теоремы похоже на доказательство теоремы 4.1, хотя получить для гамильтоновых алгебр аналог теоремы 3.1 не удается (неясно даже, в чем он мог бы состоять).

По-видимому, аналог теоремы 4.2 имеет место и для двух оставшихся картановских серий.

ЦИТИРУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Фукс Д. Б.*— Функц. анализ, 1983, т. 17, вып. 4, с. 62—69. 2. *Вейль Г.* Классические группы, их инварианты и представления. М.: ИЛ, 1947.

Институт физики твердого тела
АН СССР
Московский государственный
университет

Поступило в редакцию
23 мая 1983 г.