M. A. Reshitko, G. A. Ougolnitsky, A. B. Usov, Numerical method for finding Nash and Shtakelberg equilibria in river water quality control models, *Computer Research and Modeling*, 2020, Volume 12, Issue 3, 653–667

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2020 Т. 12 № 3 С. 653–667
DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-3-653-667

Ки&М

МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ И СОЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

УДК: 517.977.5, 519.83

Численный метод нахождения равновесий Нэша и Штакельберга в моделях контроля качества речных вод

М. А. Решитько[a], Г. А. Угольницкий[b], А. Б. Усов[c]

Южный федеральный университет,
Россия, 344002, г. Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая, д. 105/42

E-mail: [a] reshitko@sfedu.ru, [b] gaugolnickiy@sfedu.ru, [c] tol151968@yandex.ru

Получено 10.04.2020, после доработки — 03.02.2020.
Принято к публикации 02.03.2020.

В статье рассмотрена задача построения равновесий Нэша и Штакельберга при исследовании динамической системы контроля качества речных вод. Учитывается влияние субъектов управления двух уровней: одного ведущего и нескольких ведомых. В качестве ведущего (супервайзера) выступает природоохранный орган, а в роли ведомых (агентов) — промышленные предприятия. Основной целью супервайзера является поддержание допустимой концентрации загрязняющих веществ в речной воде. Добиться этого он может не единственным образом, поэтому, кроме того, супервайзер стремится к оптимизации своего целевого функционала. Супервайзер воздействует на агентов, назначая величину платы за сброс загрязнений в водоток. Плата за загрязнение от агента поступает в федеральный и местные бюджеты, затем распределяется на общих основаниях. Таким образом, плата увеличивает бюджет супервайзера, что и отражено в его целевом функционале. Причем плата за сброс загрязнений начисляется за количество и/или качество сброшенных загрязнений. К сожалению, для большинства систем контроля качества речных вод такая практика неэффективна из-за малого размера платы за сброс загрязнений. В статье и решается задача определения оптимального размера платы за сброс загрязнений, который позволяет поддерживать качество речной воды в заданном диапазоне.

Агенты преследуют только свои эгоистические цели, выражаемые их целевыми функционалами, и не обращают внимания на состояние речной системы. Управление агента можно рассматривать как часть стока, которую агент очищает, а управление супервайзера — как назначаемый размер платы за сброс оставшихся загрязнений в водоток.

Для описания изменения концентраций загрязняющих веществ в речной системе используется обыкновенное дифференциальное уравнение. Проблема поддержания заданного качества речной воды в рамках предложенной модели исследуется как с точки зрения агентов, так и с точки зрения супервайзера. В первом случае возникает дифференциальная игра в нормальной форме, в которой строится равновесие Нэша, во втором — иерархическая дифференциальная игра, разыгрываемая в соответствии с информационным регламентом игры Штакельберга. Указаны алгоритмы численного построения равновесий Нэша и Штакельберга для широкого класса входных функций. При построении равновесия Нэша возникает необходимость решения задач оптимального управления. Решение этих задач проводится в соответствии с принципом максимума Понтрягина. Строится функция Гамильтона, полученная система дифференциальных уравнений решается численно методом стрельбы и методом конечных разностей. Проведенные численные расчеты показывают, что низкий размер платы за единицу сброшенных в водоток загрязнений приводит к росту концентрации загрязняющих веществ в водотоке, а высокий — к банкротству предприятий. Это приводит к задаче нахождения оптимальной величины платы за сброс загрязнений, то есть к рассмотрению проблемы с точки зрения супервайзера. В этом случае возникает иерархическая дифференциальная игра супервайзера и агентов, в которой ищется равновесие Штакельберга. Возникает задача максимизации целевого функционала супервайзера с учетом управлений агентов, образующих равновесие Нэша. При нахождении оптимальных управлений супервайзера используется метод качественно репрезентативных сценариев, а для агентов — принцип максимума Понтрягина. Проведены численные эксперименты, найден коэффициент системной согласованности. Полученные численные результаты позволяют сделать вывод, что система контроля качества речных вод плохо системно согласована и для достижения стабильного развития системы необходимо иерархическое управление.

Ключевые слова: равновесие Нэша, равновесие Штакельберга, принцип максимума Понтрягина, экономическое управление

Работа поддержана грантом РНФ, проект 17-19-01038.

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2020 VOL. 12 NO. 3 P. 653–667
DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-3-653-667

MODELS OF ECONOMIC AND SOCIAL SYSTEMS

UDC: 517.977.5, 519.83

Numerical method for finding Nash and Shtakelberg equilibria in river water quality control models

M. A. Reshitko[a], G. A. Ugol'nitskii[b], A. B. Usov[c]

Southern Federal University,
105/42 B. Sadovaya st., Rostov-on-Don, 344002 , Russia

E-mail: [a] reshitko@sfedu.ru, [b] gaugolnickiy@sfedu.ru, [c] tol151968@yandex.ru

Received 10.04.2020, after completion — 03.02.2020.
Accepted for publication 02.03.2020.

In this paper we consider mathematical model to control water quality. We study a system with two-level hierarchy: one environmental organization (supervisor) at the top level and a few industrial enterprises (agents) at the lower level. The main goal of the supervisor is to keep water pollution level below certain value, while enterprises pollute water, as a side effect of the manufacturing process. Supervisor achieves its goal by charging a penalty for enterprises. On the other hand, enterprises choose how much to purify their wastewater to maximize their income.The fee increases the budget of the supervisor. Moreover, effulent fees are charged for the quantity and/or quality of the discharged pollution. Unfortunately, in practice, such charges are ineffective due to the insufficient tax size. The article solves the problem of determining the optimal size of the charge for pollution discharge, which allows maintaining the quality of river water in the rear range.

We describe system members goals with target functionals, and describe water pollution level and enterprises state as system of ordinary differential equations. We consider the problem from both supervisor and enterprises sides. From agents' point a normal-form game arises, where we search for Nash equilibrium and for the supervisor, we search for Stackelberg equilibrium. We propose numerical algorithms for finding both Nash and Stackelberg equilibrium. When we construct Nash equilibrium, we solve optimal control problem using Pontryagin's maximum principle. We construct Hamilton's function and solve corresponding system of partial differential equations with shooting method and finite difference method. Numerical calculations show that the low penalty for enterprises results in increasing pollution level, when relatively high penalty can result in enterprises bankruptcy. This leads to the problem of choosing optimal penalty, which requires considering problem from the supervisor point. In that case we use the method of qualitatively representative scenarios for supervisor and Pontryagin's maximum principle for agents to find optimal control for the system. At last, we compute system consistency ratio and test algorithms for different data. The results show that a hierarchical control is required to provide system stability.

Keywords: Nash equilibrium, Stackelberg equilibrium, Pontryagin's maximum principle, economic management

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2020, vol. 12, no. 3, pp. 653–667 (Russian).

This work was supported by Russian Science Foundation, project 17-19-01038.

Введение

Современные системы управления являются многоуровневыми, иерархически организованными динамическими системами. Отношения между субъектами управления в них строятся на основе иерархии типа «начальник – подчиненные». Моделирование таких систем часто основано на игровом подходе в соответствии с информационным регламентом игр Штакельберга [Бурков, Опойцев, 1974; Гермейер, Ватель, 1974; Горелик и др., 1991; Горелов, Кононенко, 2015; Угольницкий, 2016; Угольницкий, Усов, 2014; Угольницкий, Усов, 2013; Угольницкий, Усов, 2016; Basar, Olsder, 1999; Dockner et al., 2000].

В состав простейшей иерархически организованной системы управления входят: один субъект верхнего уровня (лидер, супервайзер), один или несколько субъектов нижнего уровня (ведомые, агенты), а также собственно управляемая динамическая система (объект управления). При изучении подобных систем рассмотрение может вестись как с точки зрения супервайзера, так и с точки зрения агентов при заданном управлении супервайзера. В первом случае возникает игра Штакельберга, во втором — строится равновесие Нэша в дифференциальной игре в нормальной форме [Угольницкий, 2016; Угольницкий, Усов, 2014; Угольницкий, Усов, 2013; Угольницкий, Усов, 2016; Basar, Olsder, 1999; Dockner et al., 2000]. В обоих случаях при нахождении оптимальных стратегий агентов решаются задачи оптимального управления с использованием принципа максимума Понтрягина [Basar, Olsder, 1999; Dockner et al., 2000].

При численной реализации принципа максимума возникают системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которых представляет известные трудности [Когай, Фадеев, 2001; Малкин, 2016; Фадеев, 1990; Keller, 2018; Rao, 2009]. Для их решения, например, в [Когай, Фадеев, 2001] предлагается метод стрельбы, а в [Малкин, 2016] — метод неградиентного случайного поиска.

Ниже в развитие авторской концепции управления устойчивым развитием активных систем [Угольницкий, 2016; Угольницкий, Усов, 2014; Угольницкий, Усов, 2013; Угольницкий, Усов, 2016; Ugolnitskii, Usov, 2018] предлагается новый подход к исследованию динамических систем управления, основанный на совместном использовании принципа максимума Понтрягина и метода качественно репрезентативных сценариев имитационного моделирования [Ugolnitskii, Usov, 2018]. В отличие от [Угольницкий, 2016; Угольницкий, Усов, 2014; Угольницкий, Усов, 2013; Угольницкий, Усов, 2016; Ugolnitskii, Usov, 2018] при нахождении равновесий Нэша и Штакельберга наряду с методом сценариев используется принцип максимума Понтрягина, что позволяет более точно по сравнению с только имитационным подходом найти оптимальные стратегии агентов.

Постановка задачи

Пусть вдоль реки расположено N промышленных предприятий (агентов). В условиях рыночной экономики главная цель каждого предприятия состоит в получении максимальной прибыли. На каждом предприятии в реку сбрасывают отходы своего производства. Бесконтрольный сброс загрязняющих веществ (ЗВ) может привести к неблагоприятным экологическим последствиям. Необходим государственный контролирующий орган (супервайзер), который обеспечит непревышение предельно допустимых концентраций ЗВ в реке. Добиться этого супервайзер может не единственным образом. Поэтому, кроме того, он стремится к максимизации поступающих в его распоряжение от предприятий средств, определяя размер платы за единицу сбрасываемых отходов. Такой подход отвечает законодательству РФ [Федеральный закон от 10.01.2002 № 7-ФЗ. . . ; Постановление Правительства РФ от 03.03.2017 № 255. . . ; Постановление Правительства РФ от 13.09.2016. . . ; Бюджетный кодекс Российской Федерации] и присущ многим странам [Helmer, Hespanhol, 1997]. Действительно, согласно законодательству РФ [Бюджетный кодекс Российской Федерации] плата за загрязнение водотоков и водоемов от агентов поступает в федеральный и местные бюджеты и затем распределяется на общих основаниях. Таким образом, плата за сброс загрязнений увеличивает бюджет супервайзера, что и учитывается в его целевом функционале. Согласно [Федеральный закон от 10.01.2002 № 7-ФЗ...; Постановление Правительства РФ от 03.03.2017 № 255...; Постановление Правительства РФ от 13.09.2016...], плата за сброс загрязнений начисляется за количество и/или качество сброшенных загрязнений. К сожалению, для большинства систем контроля качества речных вод такая практика неэффективна из-за малого размера платы за сброс загрязнений [Helmer, Hespanhol, 1997]. Ниже решается задача определения оптимального размера платы за сброс загрязнений, который позволяет поддерживать качество речной воды в заданном диапазоне.

В действительности в роли супервайзера выступают различные государственные органы, как федеральные, так и территориальные. В эти организации поступают средства федерального центра, полученные, в частности, в виде платы за сброс загрязнений от предприятий и организаций. Определенное количество раз в год проводится мониторинг водных объектов на предмет превышения предельно допустимых концентраций загрязняющих веществ (ПДК ЗВ). На основе анализа полученных данных вырабатываются мероприятия по предотвращению сброса загрязнений и очистке рек и водоемов. На эти мероприятия расходуется часть поступивших средств.

Агенты преследуют только свои эгоистические цели, выражаемые их целевыми функционалами, и не обращают внимания на состояние речной системы. Для предприятий (агентов) очистка сточных вод связана с дополнительными затратами, и каждое предприятие стремится их минимизировать. Управление агента можно рассматривать как часть стока, которую агент очищает, а управление супервайзера — как назначаемый размер платы за сброс оставшихся загрязнений в водоток.

Итак, рассматривается система управления, включающая $(N + 1)$-го субъекта: N предприятий (агентов) и надзорный орган (супервайзер). Задача каждого субъекта состоит в выборе управлений, которые максимизируют его целевой функционал. Агенты выбирают степень очистки сточных вод, а супервайзер устанавливает размер платы за сброс отходов, добиваясь требуемого качества речной воды. Целевой функционал супервайзера имеет вид

$$J_0(\{v_j(t)\}_{j=1}^N, \{u_j(t)\}_{j=1}^N, B(t)) = \int_0^T \left(-C_0(\Omega(t)) + \frac{B(t)}{B_{\max}} \sum_{i=1}^N F(v_i(t))W_i(t)(1-u_i(t))\right)dt \to \max_{\{v_j(t)\}_{j=1}^N}, \qquad (1)$$

$$\Omega(t) = \sum_{i=1}^N W_i(t)(1-u_i(t)).$$

Целевые функционалы агентов берутся в виде

$$J_i(u_i(t), v_i(t), \phi_i(t), B(t)) = \int_0^T \left(z_i R_i(\phi_i(t)) - W_i(t)C_i^a(u_i(t)) - \frac{B(t)}{B_{\max}} F(v_i(t))W_i(t)(1-u_i(t))\right)dt \to \max_{u_i(t)}, \qquad (2)$$

$$i = 1, 2, \ldots, N.$$

Здесь t — временная координата; T — момент времени, до которого ведется рассмотрение; $v_i(t)$ — размер платы за единицу сброшенных отходов в момент времени t на i-м предприятии; $u_i(t)$ — степень очистки сточных вод в момент времени t на i-м предприятии; $F(v_i(t))$ — функция платы за сброс отходов в водоток; $W_i(t)$ — общее количество сброшенных отходов; $C_0(\Omega(t))$ — расходы супервайзера на очистку речной воды; $\Omega(t)$ — общее количество сброшенных в реку отходов;

$C_i^a(u_i)$ — функция расходов i-го агента на очистку своего стока; $R_i(\phi_i)$ — производственная функция, ϕ_i — объем производственных фондов i-го предприятия; z_i — прибыль i-го предприятия от реализации единицы своей продукции; $B(t)$ — концентрация ЗВ в речной системе; $B_{\max}$ — предельно допустимая концентрация ЗВ в речной системе.

Предполагается, что общее количество сброшенных отходов зависит от количества произведенной на предприятиях продукции линейно, т. е.

$$W_i(t) = \chi_i R_i(\phi_i), \quad \chi_i = \text{const}, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Целевые функционалы (1), (2) рассматриваются со следующими ограничениями на управления супервайзера:

$$0 \le v_i(t) \le v_{\max}, \quad \forall t \in [0, T], \quad i = 1, 2, \ldots, N \tag{3}$$

и агентов

$$0 \le u_i(t) \le 1 - \gamma, \quad \forall t \in [0, T], \quad i = 1, 2, \ldots, N \tag{4}$$

где $0 < \gamma < 1$, $1 - \gamma$ — максимально возможная степень очистки, зависящая от возможностей агента.

Для описания изменения концентрации ЗВ в реке используем обыкновенное дифференциальное уравнение, предварительно проведя усреднение по пространственным переменным. Уравнение примет вид

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -kB(t) + \sum_{i=1}^{N} W_i(t)(1 - u_i(t)), \quad B(0) = B_0. \tag{5}$$

Здесь B_0 — концентрация ЗВ в реке в начальный момент времени, k — коэффициент распада ЗВ.

Основная цель супервайзера состоит в поддержании речной экосистемы в заданном состоянии (непревышении концентрации ЗВ в реке), т. е. в выполнении неравенства

$$B(t) \le B_{\max} \quad \forall t \in [0, T]. \tag{6}$$

Изменение производственных фондов предприятий описывается уравнениями

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} = -\beta_i \phi_i(t) + \eta_i (z_i R_i(\phi_i(t)) - W_i(t) C_i^a(u_i(t)) - \frac{B(t)}{B_{\max}} F(v_i(t)) W_i(t)(1 - u_i(t))), \tag{7}$$

$$\phi_i(0) = \phi_{0i}, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{8}$$

Здесь коэффициенты β_i отражают степень износа (амортизацию) производственных фондов; η_i — часть прибыли, полученной i-м предприятием, которая идет на развитие производства $i = 1, 2, \ldots, N$.

Рассмотрение модели (1)–(7) возможно как с позиции супервайзера, так и с позиции агентов [Угольницкий, 2016; Угольницкий, Усов, 2016]. В первом случае возникает дифференциальная иерархическая игра $(N + 1)$-го лица: N предприятий и супервайзера, которая определяется информационным регламентом игр Штакельберга [Угольницкий, Усов, 2014; Угольницкий, Усов, 2013; Угольницкий, Усов, 2016; Basar, Olsder, 1999]. Во втором — функции платы за сброс отходов (функции $v_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, N$) предполагаются известными. Для каждого из агентов в этом случае решается задача оптимального управления и строится равновесие Нэша в дифференциальной игре агентов в нормальной форме [Basar, Olsder, 1999; Dockner et al., 2000].

Построение равновесия Нэша

Проведем рассмотрение с точки зрения агентов. В этом случае решается задача (2), (4), (5), (7) с известными функциями $v_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Для простоты предположим, что плата за сброс ЗВ на предприятиях не меняется с течением времени:

$$v_i(t) = C_i, \quad C_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{9}$$

Итак, решается дифференциальная игра в нормальной форме (2), (4), (5), (7) с учетом (9). Для ее решения применим принцип максимума Понтрягина [Basar, Olsder, 1999]. Функция Гамильтона для i-го предприятия имеет вид

$$\begin{aligned} H_i(\phi_i, B, u_i, y_{1i}, y_{2i}, t) = z_i R_i(\phi_i) - W_i(\phi_i) C_i^a(u_i) - \frac{B}{B_{\max}} F(v_i) W_i(\phi_i)(1 - u_i) + \\ + y_{1i}\left(-\beta_i \phi_i + \eta_i (z_i R_i(\phi_i) - W_i(\phi_i) C_i^a(u_i) - \frac{B}{B_{\max}} F(v_i) W_i(\phi_i)(1 - u_i)\right) + \\ + y_{2i}\left(-kB + \sum_{j=1}^{N} W_j(\phi_j)(1 - u_j)\right), \quad i = 1, 2, \ldots, N, \end{aligned} \tag{10}$$

где $y_{1i}(t)$, $y_{2i}(t)$ — сопряженные функции.

Перейдем от (2), (4), (5), (7), (9) к эквивалентной задаче поиска максимума функции Гамильтона (10) с учетом динамических ограничений:

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} = \frac{\partial H_i}{\partial y_{1i}} = -\beta_i \phi_i + \eta_i \left(z_i R_i(\phi_i) - W_i(\phi_i) C_i^a(u_i) - \frac{B}{B_{\max}} F(v_i) W_i(\phi_i)(1 - u_i) \right), \quad \phi_i(0) = \phi_{0i}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial H_i}{\partial y_{2i}} = -kB + \sum_{j=1}^{N} W_j(\phi_j)(1 - u_j), \quad B(0) = B_0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial y_{1i}}{\partial t} = \frac{\partial H_i}{\partial \phi_i} = -\frac{\partial R_i}{\partial \phi_i} \left((1 + y_{1i}\eta_i) \left(z_i - \chi_i C_i^a(u_i) - \chi_i F(v_i)(1 - u_i) \frac{B}{B_{\max}} \right) + \chi_i y_{2i}(1 - u_i) \right) + \beta_i y_{1i}, \tag{13}$$

$$y_{1i}(T) = 0,$$

$$\frac{\partial y_{2i}}{\partial t} = \frac{\partial H_i}{\partial B} = (1 + y_{1i}\eta_i) W_i(\phi_i) F(v_i) \frac{1 - u_i}{B_{\max}} + k y_{2i}, \quad y_{2i}(T) = 0. \tag{14}$$

Алгоритм решения задачи (2), (4), (5), (7) с учетом (9) состоит в следующем.

1. Находится максимум функций Гамильтона каждого агента (10) по их управлениям. В результате строится равновесие Нэша. В равновесии оптимальные управления агентов являются функциями сопряженных переменных и переменных состояния $u_i^*(\phi_i, B, y_{1i}, y_{2i})$, $i = 1, 2, \ldots, N$.
2. Функции ϕ_i, B, y_{1i}, y_{2i} находятся из решения системы дифференциальных уравнений (11)–(14).
3. Найденные в пункте 2 алгоритма функции $\phi_i(t)$, $B(t)$, $y_{1i}(t)$, $y_{2i}(t)$ подставляются в $u_i^*(\phi_i, B, y_{1i}, y_{2i})$. Система функций $u_i^*(\phi_i, B, y_{1i}, y_{2i})$, $i = 1, 2, \ldots, N$, образует равновесие Нэша.

Предполагается, что оптимальное решение задачи (10)–(14) существует и единственно. Для большинства реальных систем управления такое предположение верно. Далее рассмотрим параметризацию

$$C_i^a(u_i) = \alpha_i \frac{u_i}{1 - u_i}, \quad \alpha_i = \text{const}, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{15}$$

Приравняв нулю первые производные функций Гамильтона (10) по управлениям P_i, найдем стационарные точки функций H_i. Полученные уравнения имеют по два корня:

$$u_{[1,2]i} = 1 \pm \sqrt{\alpha_i}\frac{\sqrt{BFB_{\max}(1 + 2y_{1i}\eta_i + y_{1i}^2\eta_i^2) - (1 + y_{1i}\eta_i)(y_{2i}B_{\max}^2)}}{BF(1 + y_{1i}\eta_i) - y_{2i}B_{\max}}. \tag{16}$$

Первому корню в (16) соответствует знак «+», второму — знак «−». Из двух корней (16) только один удовлетворяет условиям (4). Обозначим его как

$$u_{0i} = \begin{cases} u_{1i}, & \text{если } FB(1 + y_{1i}\eta_i) - y_{2i}B_{\max} > 0,\\ u_{2i}, & \text{если } FB(1 + y_{1i}\eta_i) - y_{2i}B_{\max} < 0. \end{cases} \tag{17}$$

Подставим u_{0i} из (17) во вторую производную функции Гамильтона:

$$\frac{\partial^2 H_i}{\partial^2 u_i} = \pm\frac{2W_i(FB(1 + y_{1i}\eta_i) - y_{2i}B_{\max})^2}{B_{\max}\sqrt{\alpha_i B_{\max}(1 + y_{1i}\eta_i)(FB(1 + y_{1i}\eta_i) - y_{2i}B_{\max})}}. \tag{18}$$

Здесь знак «+» соответствует случаю, когда $u_{0i} = u_{1i}$, знак «−» — $u_{0i} = u_{2i}$. В первом случае вторая производная положительна, а во втором — отрицательна, если, конечно, производная и сам корень u_{0i} существуют. В случае когда производная либо корень u_{0i} не существуют, а также если u_{0i} не принадлежит отрезку (4), максимум функций Гамильтона в этот момент времени достигается в граничных точках (4). Условие существования выражений (16) и (18) можно записать в виде

$$\begin{cases} BFB_{\max}(1 + 2y_{1i}\eta_i + y_{1i}^2\eta_i^2) - (1 + y_{1i}\eta_i)(y_{2i}B_{\max}^2) \geq 0,\\ FB(1 + y_{1i}\eta_i) - y_{2i}B_{\max} \neq 0,\\ \alpha_i B_{\max}(1 + y_{1i}\eta_i)(FB(1 + y_{1i}\eta_i) - y_{2i}B_{\max}) > 0. \end{cases} \tag{19}$$

При выполнении условий (19) u_{0i} существует и является максимумом функции Гамильтона, если вторая производная функции Гамильтона (18) в этой точке отрицательна и u_{0i} удовлетворяет условию (4). В остальных случаях максимум достигается в одной из граничных точек (4). Обозначим через H_{0i}, H_{1i} значения функции Гамильтона (10) при заданных аргументах ϕ_i, B, y_{1i}, y_{2i}, t и значении $u = 0$ и $u = 1 - \gamma$ соответственно. В результате имеем

$$u_i^* = \begin{cases} u_{0i}, & \text{если (19) и } (0 < u_{0i} < 1 - \gamma) \text{ и } (BF(1 + y_{1i}\eta_i) - y_{2i}B_{\max} > 0),\\ 0, & \text{если } u_{0i} \text{ не существует или не оптимально или } u_{0i} \notin [0, 1 - \gamma] \text{ и } H_{0i} \geq H_{1i},\\ 1 - \gamma, & \text{если } u_{0i} \text{ не существует или не оптимально или } u_{0i} \notin [0, 1 - \gamma] \text{ и } H_{0i} < H_{1i}. \end{cases} \tag{20}$$

После нахождения $u_i^*(\phi_i, B, y_{1i}, y_{2i})$ из системы дифференциальных уравнений (11)–(14) определим функции $\phi_i(t)$, $B(t)$, $y_1 i(t)$, $y_2 i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Соотношения (11)–(14) определяют систему $3N + 1$ дифференциальных уравнений, в которой начальные условия для разных функций заданы на разных концах временного интервала. Требуется подобрать такие начальные условия для (11)–(14) (постоянные $y_{1i}(0)$, $y_{2i}(0)$), чтобы построенное по ним решение удовлетворяло условиям $y_{1i}(T) = y_{2i}(T) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$ Для этого используется метод стрельбы [Фадеев, 1990; Rao, 2009]. Система уравнений (11)–(14) при заданных значениях $y_{1i}(0)$, $y_{2i}(0)$ решается методом конечных разностей.

Таким образом, дифференциальная игра (2), (4), (5), (7) с учетом (9) решена, найдены равновесные управления $u_i^*(t)$ агентов ($i = 1, 2, \ldots, N$). Из выражения (20) видно, что управления агентов зависят друг от друга, т. е. полученные равновесия Нэша не являются равновесиями в доминирующих стратегиях.

Программа, реализующая описанный выше алгоритм решения задачи (2), (4), (5), (7) с учетом (9), написана на языке программирования C++. Численные эксперименты проводились на компьютере с микропроцессором IntelCorei3 и оперативной памятью 4 Гб.

Пример 1. Проведем исследование задачи (1)–(7) с точки зрения агентов в силу (9), (15) для следующего набора входных данных: $N = 2$, $B_0 = 0$ мг/л, $k = 1.25$, $\phi_{01} = 2$ у. е., $\phi_{02} = 1.75$ у. е., $\beta_1 = 0.19$, $\beta_2 = 0.15$, $\chi_1 = 0.25$, $\chi_2 = 0.2$, $z_1 = 0.3$ у. е., $z_2 = 0.25$ у. е., $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.35$, $\eta_1 = 0.9$, $\eta_2 = 1.0$, $B_{\max} = 0.5$ мг/л, $R_i(\phi_i) = \phi_i$ у. е., $F_i(v_i) = v_i$ у. е., $T = 4$ мес., $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Здесь у. е. — условные единицы для обозначения затрат, дохода или штрафа; мес. — месяц. В этом случае прибыли предприятий равны $J_1 = 2.82$ у. е., $J_2 = 2.15$ у. е., а концентрация загрязняющих веществ — $B(T) = 0.9$ мг/л.

Пример 2. В случае входных данных примера 1 и $C_1 = 0.5$, $C_2 = 0$ получим, что $J_1 = 1.81$ у. е., $J_2 = 2.15$ у. е., $B(T) = 0.52$ мг/л.

Пример 3. Для входных данных примера 1 и $C_1 = 0.5$, $C_2 = 0.5$ получим, что $J_1 = 1.9$ у. е., $J_2 = 1.31$ у. е., $B(T) = 0.36$ мг/л.

Пример 4. Для входных данных примера 1 и $C_1 = 1.0$, $C_2 = 0.5$ получим, что $J_1 = 1.61$ у. е., $J_2 = 1.33$ у. е., $B(T) = 0.35$ мг/л.

Пример 5. Для входных данных примера 1 и $C_1 = 1.0$, $C_2 = 1.0$ получим, что $J_1 = 1.65$ у. е., $J_2 = 0.99$ у. е., $B(T) = 0.33$ мг/л.

На рис. 1 и 2 показаны изменение производственных фондов первого предприятия, а также динамика загрязнения. Цифры 1–5 соответствуют данным примеров 1–5, а цифра 6 — максимально допустимому значению $B_{\max}$.

Таким образом, при малой величине платы за сброс отходов в водоток производственные фонды предприятий увеличиваются, но наблюдается превышение максимально допустимой концентрации ЗВ в реке. Увеличение платы за сброс отходов приводит не только к уменьшению загрязнения речных вод, но и к сокращению производства. Выбор оптимального размера платы за сброс отходов является важной задачей для стабильного развития системы. Например, при размере платы $C_1 = C_2 = 0.5$ наблюдается одновременное увеличение объема производства и соблюдение экологических требований к состоянию речных вод.

Построение равновесия Штакельберга

При рассмотрении задачи (1)–(7) с точки зрения супервайзера возникает дифференциальная иерархическая игра $(N+1)$-го лица: N предприятий (ведомых) и один супервайзер (ведущий). Игра ведется в соответствии с информационным регламентом игры Штакельберга в программных стратегиях. Первым свою стратегию поведения агентам (предприятиям) сообщает супервайзер. Агенты выбирают свои стратегии, когда выбор супервайзера уже известен. Алгоритм построения равновесия Штакельберга состоит в следующем.

1. Решается параметрическая задача для определения оптимальных стратегий агентов (1), (4)–(7). В роли параметров выступают управления супервайзера — функции $\{v_i(t)\}_{i=1}^N$. Находятся равновесия Нэша в игре N агентов в зависимости от управлений супервайзера $\{v_i(t)\}_{i=1}^N$. Обозначим найденные равновесия Нэша через $\{u_i^{Ne}(v_i(t))_k\}_{i=1}^N$, $k = 1, 2, \ldots, L$. Здесь L есть число равновесий Нэша при фиксированных управлениях супервайзера $\{v_i(t)\}_{i=1}^N$.

2. Подставим найденные на предыдущем шаге алгоритма функции $\{u_i^{Ne}(v_i(t))_k\}_{i=1}^N$, $k = 1, 2, \ldots, L$, в целевой функционал супервайзера и найдем $\max_{\{v_j(t)\}_{j=1}^N} \min_{1\le k\le L} J_0(\{v_j(t)\}_{j=1}^N, \{u_i^{Ne}(v_j(t))_k\}_{j=1}^N, B)$. Обозначим $(\{v_j^*(t)\}_{j=1}^N, k^*) = \arg\max_{\{v_j(t)\}_{j=1}^N} \min_{1\le k\le L} J_0(\{v_j(t)\}_{j=1}^N, \{u_i^{Ne}(v_j(t))_k\}_{j=1}^N, B)$.

3. Равновесие Штакельберга имеет вид $\{v_j^*(t)\}_{j=1}^N, \{u_i^{Ne}(v_j^*(t))_{k^*}\}_{j=1}^N$.

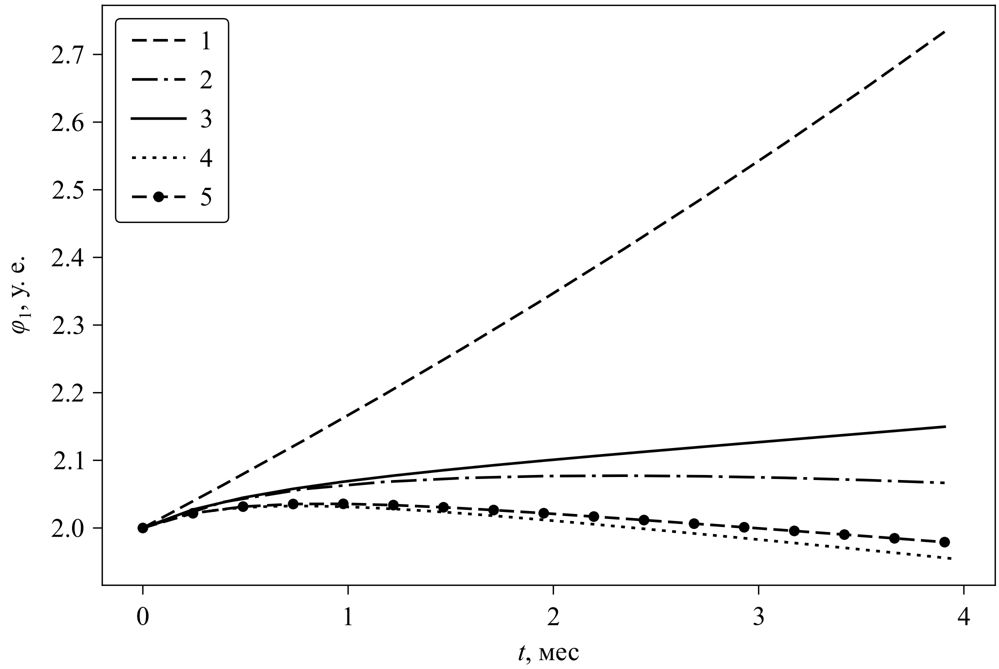

Рис. 1. Изменение производственных фондов первого предприятия для входных данных примеров 1–5

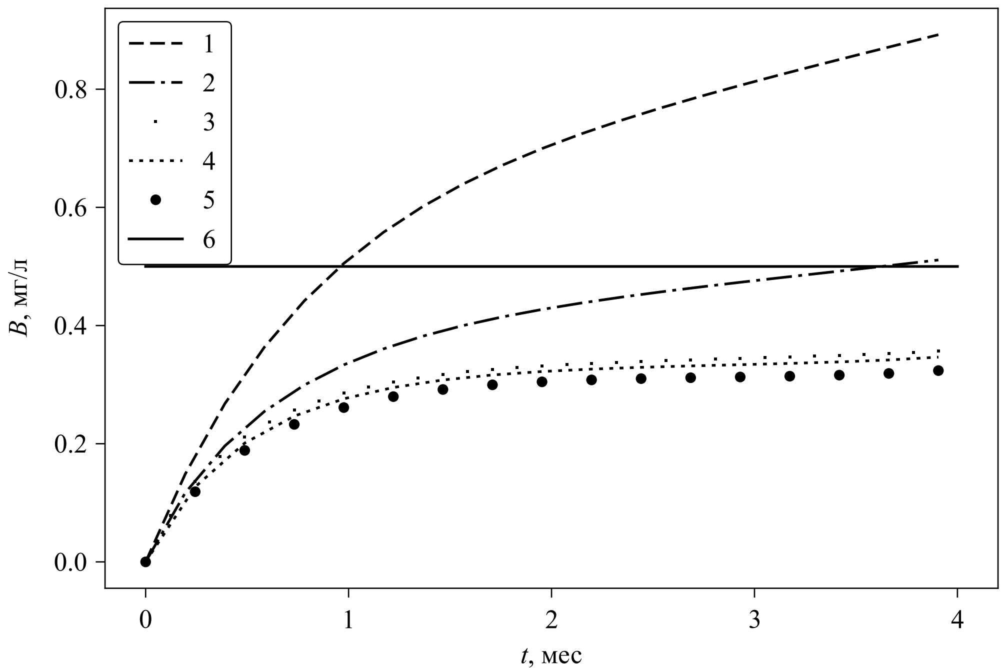

Рис. 2. Изменение величины загрязнения с течением времени для входных данных примеров 1–5

При построении равновесия Штакельберга для модели (1)–(7) учтем, что субъект управления верхнего уровня (супервайзер) не может изменять свои управления в любой момент времени. Процессы управления обладают объективной инерцией, поэтому управления супервайзера остаются постоянными в течение некоторого промежутка времени, т. е. являются ступенчатыми функциями вида

$$v_i = \begin{cases} v_{i1}, & \text{если } 0 \le t < t_1, \\ v_{i2}, & \text{если } t_1 \le t < t_2, \\ \dots \\ v_{iK}, & \text{если } t_{K-1} \le t \le T, \end{cases} \tag{21}$$

где $v_{ij} = \text{const}$, $t_j = j\Delta t$, $\Delta t = T/K$, $i = 1, 2, \dots, N$, $j = 0, 1, 2, \dots, K$, K — число интервалов постоянства управлений супервайзера. С учетом (21) задача (1)–(7) примет вид

$$J_0\left(\{v_j\}_{j=1}^N, \{u_j\}_{j=1}^N, B\right) = \sum_{k=1}^{K}\left(-\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} C_0(\Omega(t))dt + \frac{1}{B_{\max}}\sum_{i=1}^{N} F(v_{ki})\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} B(t)W_i(t)(1-u_i(t))dt\right) \to \max_{\{v_j\}_{j=1}^N}, \tag{22}$$

$$\Omega(t) = \sum_{i=1}^{N} W_i(t)(1-u_i(t)),$$

$$\begin{gathered} J_i(u_i(t), \{v_{ik}\}_{k=1}^K, \phi_i(t), B(t)) = \int\limits_0^T (z_i R_i(\phi_i(t)) - W_i(t)C_i^a(u_i(t)))dt - \\ - \sum_{k=1}^{K}\frac{F(v_{ki})}{B_{\max}}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} B(t)W_i(t)(1-u_i(t))dt \to \max_{u_i(t)}, \end{gathered} \tag{23}$$

$$0 \le v_{ki}(t) \le v_{\max}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \tag{24}$$

Условия (4)–(7) останутся без изменения.

Таким образом, решение задачи (1)–(7) в случае (21) свелось к исследованию модели (4)–(7), (22)–(24). Заметим, что в отличие от (1) формула (21) определяет целевую функцию, зависящую от K/N переменных, а не функционал.

Исследование проведем методом качественно репрезентативных сценариев (КРС) [Ugolnitskii, Usov, 2018] с использованием принципа максимума Понтрягина для определения оптимальных стратегий агентов. Оптимальные управления супервайзера определяются в результате компьютерной имитации на основе метода КРС.

Идея метода КРС состоит в том, что из множества потенциально возможных сценариев управления супервайзера выбираются немногие сценарии (стратегии), позволяющие представить качественно различные пути развития управляемой динамической системы [Ugolnitskii, Usov, 2018]. Эта идея формализуется следующим образом.

Определение 1. Множество стратегий супервайзера $QRS = \{v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(m)}\}$ назовем множеством КРС, если выполнены два условия:

1) $\forall v^{(i)}, v^{(j)} \in QRS : |J_0^{(i)} - J_0^{(j)}| > \Delta$,
2) $\forall v^{(l)} \notin QRS\, \exists v^{(j)} \in QRS : |J_0^{(l)} - J_0^{(j)}| \le \Delta$,

где $J_0^{(i)}$, $J_0^{(j)}$, $J_0^{(l)}$ — значения выйгрышей супервайзера (22), а $\Delta > 0$ — некоторая постоянная величина.

Множество КРС супервайзера есть декартово произведение $N \times K$ множеств, определяющих управления супервайзера в моменты времени $k = 1, 2, \dots, K$ для каждого из N агентов (т. е. $QRS = v_{11}^{QRS} \times v_{12}^{QRS} \times \ldots \times v_{1K}^{QRS} \times v_{21}^{QRS} \times \ldots \times v_{NK}^{QRS}$). Множество v_{ik}^{QRS} есть множество КРС супервайзера на k-й год для i-го агента.

Для задачи (4)–(7), (22)–(24) положим $\forall i, k\ v_{ik}^{QRS} = \{0, v_{\max}/2,\ v_{\max}\}$. Тогда первоначально множество КРС супервайзера содержит $m = |QRS| = \prod_{i=1}^{N}\prod_{k=1}^{K}|v_{ik}^{QRS}| = 3^{KN}$ элементов. После идентификации модели и проверки обоих условий в определении множества КРС в это множество могут быть добавлены другие стратегии супервайзера или часть стратегий из множества КРС может быть удалена.

Алгоритм нахождения равновесия Штакельберга на множестве КРС супервайзера для задачи (4)–(7), (22)–(24):

1. Задаются вид и значения всех входных функций и параметров модели (4)–(7), (22)–(24) ($j = 1$).
2. Фиксируется очередная (j-я) стратегия супервайзера из его множества КРС (QRS): $v^{(j)} = (v_{11}^{(j)}, v_{12}^{(j)}, \ldots, v_{1K}^{(j)}, v_{21}^{(j)}, v_{22}^{(j)}, \ldots, v_{2K}^{(j)}, \ldots, v_{N1}^{(j)}, v_{N2}^{(j)}, \ldots, v_{NK}^{(j)})$, $v_{ik}^{(j)} \in v_{ik}^{QRS}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, $k = 1, 2, \ldots, K$.
3. С использованием принципа максимума Понтрягина по аналогии с предыдущим параграфом находятся равновесия Нэша в игре агентов (4)–(7), (23) (всего L равновесий): $\{u_i^{Ne}(v^{(j)})_l\}_{i=1}^{N}$, $l = 1, 2, \ldots, L$.
4. Найденные в пункте 3 алгоритма стратегии агентов и определенная в пункте 2 стратегия супервайзера подставляются в (22). Ищется минимум по равновесиям Нэша. Набор управлений $\{u_i^*(v^{(j)})\}_{i=1}^{N}$, его доставляющий, и само значение функции (21) сохраняются.
5. Если просмотрены не все КРС супервайзера, то необходимо перейти к следующей его КРС ($j := j + 1$) и вернуться к пункту 2 алгоритма. При этом ищется максимум по управлениям супервайзера, управление $v^{(j)}$, доставляющее наибольшее значение (22), сохраняется.
6. После просмотра всех КРС супервайзера определяется стратегия, доставляющая наибольшее значение (22), то есть $v^* = \arg\max_{v^{(j)}\in QRS} J_0(v^{(j)},\ \{u_i^*(v^{(j)})\}_{i=1}^{N}, B)$.
7. Равновесие Штакельберга для модели (4)–(7), (22)–(24) на множестве КРС супервайзера имеет вид $(v^*, \{u_i^*(v^*)\}_{i=1}^{N})$.

При фиксированной стратегии супервайзера для агентов возникает дифференциальная игра N лиц в нормальной форме (пункт 3 алгоритма), исследование которой сводится к решению задачи, описанной в предыдущем параграфе.

Пример 6. Исследуем задачу (1)–(7) с точки зрения супервайзера в случае (9), (15). Построим множество КРС супервайзера в случае $N = 2$, $B_0 = 0$ мг/л, $k = 1.25$, $\phi_{01} = 2$ у. е., $\phi_{02} = 1.75$ у. е., $\beta_1 = 0.19$, $\beta_2 = 0.15$, $\chi_1 = 0.25$, $\chi_2 = 0.2$, $z_1 = 0.3$ у. е., $z_2 = 0.25$ у. е., $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.35$, $\eta_1 = 0.65$, $\eta_2 = 0.8$, $B_{\max} = 1.0$ мг/л, $R_i(\phi_i) = \phi_i$ у. е., $F_i(v_i) = v_i$ у. е., $T = 2$ мес., $C_0(\Omega) = 0.1\Omega$ у. е.

Рассмотрим случай $K = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ (K есть число интервалов постоянства управлений супервайзера). Обозначим множества КРС супервайзера для значений $K = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ через QRS_1, QRS_2, QRS_3, QRS_4. Мощности этих множеств соответственно равны 9, 81, 729 и 6561. Проанализируем данные множества с точки зрения выполнения требований к множествам КРС. Результаты проверки первого условия для этих множеств приведены в таблице 1.

Выясним, как увеличение мощности множества КРС влияет на выигрыш супервайзера. Для этого проверим второе условие попарно для каждого множества управлений и всех множеств

Таблица 1. Оценка «близости» разных стратегий из множеств QRS

	QRS_1	QRS_2	QRS_3	QRS_4
$\min_{(i,j),i\neq j}\lvert J_0^i - J_0^j\rvert$	0.0027	$7.685e-05$	$1.13e-06$	$1.0e-08$

Таблица 2. Оценка «достаточности» начальных множеств КРС

	QRS_1	QRS_2	QRS_3
QRS_2	0.059	–	–
QRS_3	0.06	0.023	–
QRS_4	0.06	0.025	0.01

большей мощности. В таблице 2 приведены значения выражения $\max_{I\in QRS_L}\min_{j\in QRS_P}|J_0^I - J_0^j|$, где $L > P$, L — номер множества QRS в строке, P — номер множества QRS в столбце, символ «–» означает, что в этом случае условие не проверялось.

Из анализа таблиц 1 и 2 видно, что необходимо сужение начального множества КРС, что и было проделано. Отметим, что невыполнение первого условия в определении множества КРС показывает, что для каких-то управлений из множества КРС результаты похожи, а значит, часть управлений следует исключить из множества КРС. В противном случае будут рассмотрены лишние управления и увеличится время расчетов.

Из таблицы 2 видно, что для множества QRS_3 при сравнении со множеством QRS_4 второе условие для КРС выполняется при $\Delta \geq 0.01$. Возьмем $\Delta = 0.01$, тогда при использовании множества QRS_4 доход супервайзера не превысит $J_{03}^{\max} + \Delta$, где $J_{03}^{\max}$ — доход супервайзера при использовании множества QRS_3. Для начальных данных примера $J_{03}^{\max} = 0.21$, то есть увеличение дохода супервайзера при использовании QRS_4 не превысит 5 %. В дальнейших экспериментах используется сужение множества QRS_3.

Ниже, помимо вычислений по приведенному выше алгоритму, рассматривается задача максимизации целевого функционала супервайзера (1) с учетом условий (3)–(7) сразу по всем управлениям v_i и u_i. Выигрыш супервайзера в этом случае обозначается как J^*, а концентрация ЗВ — как B^*. На основе полученных значений вычисляется индекс системной согласованности, равный отношению $\Theta = {}^{J_0}/_{J^*}$.

Пример 7. В таблице 3 приведены выигрыши супервайзера и агентов, а также значения переменных состояния ϕ_1, ϕ_2, B в последний момент времени T в равновесии Штакельберга при использовании множества QRS_3. Здесь L — номер примера. Значение $L = 1$ соответствует случаю $N = 2$, $B_0 = 0$ мг/л, $k = 1.25$, $\phi_{01} = 2$ у. е., $\phi_{02} = 1.75$ у. е., $\beta_1 = 0.19$, $\beta_2 = 0.15$, $\chi_1 = 0.25$, $\chi_2 = 0.2$, $z_1 = 0.3$ у. е., $z_2 = 0.25$ у. е., $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.35$, $\eta_1 = 0.65$, $\eta_2 = 0.8$, $B_{\max} = 1.0$ мг/л, $R_i(\phi_i) = \phi_i$ у. е., $F_i(v_i) = v_i$ у. е., $T = 2$ мес., $C_0(\Omega) = 0.1\Omega$ у. е.; значение $L = 2$ — входным данным

Таблица 3. Результаты расчетов на множестве QRS_3

L	J_0, у. е.	J_1, у. е.	J_2, у. е.	$\phi_1(T)$, у. е.	$\phi_2(T)$, у. е.	$B(T)$, мг/л	J^*, у. е.	B^*, мг/л	Θ
1	0.2	0.93	0.67	1.87	1.76	0.4	0.53	0.59	0.38
2	0.23	0.99	0.69	2.1	1.89	0.42	0.58	0.63	0.4
3	0.12	0.72	0.54	1.0	0.98	0.3	0.27	0.4	0.44
4	0.68	0.41	0.03	1.58	1.3	0.6	2.24	1.01	0.3
5	0.31	0.85	0.64	1.82	1.73	0.47	0.53	0.59	0.58
6	0.31	0.84	0.55	1.81	1.67	0.31	1.09	0.55	0.28
7	0.31	2.53	1.87	2.74	2.59	0.49	0.82	0.77	0.38
8	0.27	0.89	0.61	1.84	1.71	0.61	0.81	1.01	0.33
9	0.45	0.65	0.51	1.7	1.64	0.54	0.93	0.75	0.48
10	0.06	1.01	0.7	1.58	1.42	0.25	0.09	0.29	0.67
11	0.2	0.95	0.74	1.87	1.8	0.39	0.31	0.48	0.65

при $L = 1$ и $\eta_1 = 0.9$, $\eta_2 = 1.0$; $L = 3 - \beta_1 = 0.5$, $\beta_2 = 0.45$; $L = 4 - \chi_1 = 0.55$, $\chi_2 = 0.5$; $L = 5 - \alpha_1 = 0.2$, $\alpha_2 = 0.5$; $L = 6 - B_{\max} = 0.5$ мг/л; $L = 7 - z_1 = 0.6$ у. е., $z_2 = 0.5$ у. е.; $L = 8 - k = 0.5$; $L = 9 - \alpha_1 = 0.2$, $\alpha_2 = 0.45$, $\chi_1 = 0.35$, $\chi_2 = 0.25$; $L = 10 - \eta_1 = 0.25$, $\eta = 0.2$, $\chi_1 = 0.1$, $\chi_2 = 0.15$; $L = 11 - \chi_1 = 0.2$, $\chi_2 = 0.15$, $\alpha_1 = 0.25$, $\alpha_2 = 0.35$.

Проведенные расчеты позволили сделать вывод об адекватности предложенной математической модели и утверждать, что:

1) увеличение части прибыли, идущей на развитие производства, незначительно, но увеличивает прибыль агентов и супервайзера;
2) при увеличении износа производственных фондов прибыль субъектов значительно сокращается;
3) при увеличении количества ЗВ, вырабатываемых в процессе производства, прибыль агентов падает, а прибыль супервайзера и степень загрязнения растут;
4) при высокой стоимости очистки незначительно уменьшается прибыль агентов и растет загрязненность;
5) уменьшение максимально допустимой концентрации ЗВ приводит к уменьшению прибыли агентов;
6) система плохо согласована для приведенных наборов входных данных, поэтому необходимо использовать иерархические механизмы согласования.

Заключение

Предложен численный метод построения равновесий Нэша и Штакельберга при исследовании иерархически организованных систем управления. Исследование проведено на примере системы контроля качества поверхностных вод. Предложенный метод предполагает совместное использование принципа максимума Понтрягина и метода качественно репрезентативных сценариев. При решении возникающих задач динамической оптимизации предложено использовать принцип максимума Понтрягина. При этом нахождение максимума функции Гамильтона сводится к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Из анализа полученных результатов численного исследования задачи сделан вывод о необходимости иерархического управления устойчивым развитием системы.

В дальнейшем планируется анализ и совершенствование предложенного численного метода решения дифференциальных игр, а также рассмотрение случая «близоруких» агентов, стремящихся к максимизации своего выигрыша только за один временной промежуток.

Список литературы (References)

Бюджетный кодекс Российской Федерации. — URL: http://pravo.gov.ru/proxy/ips/?docbody=&nd=102054721 (дата обращения: 16.01.2020).
Byudzhetnyi kodeks Rossiiskoi Federatsii. — URL: http://pravo.gov.ru/proxy/ips/?docbody=&nd=102054721 (accessed: 16.01.2020) (in Russian).

Бурков В., Опойцев В. Метаигровой подход к управлению иерархическими системами // Автоматика и телемеханика. — 1974. — № 1. — С. 103–114.
Burkov V., Opoitsev V. Metaigrovoi podkhod k upravleniyu ierarkhicheskimi sistemami [Metagamery approach to the management of hierarchical systems] // Automation and Remote Control. — 1974. — No. 1. — P. 103–114 (in Russian).

Гермейер Ю., Ватель И. Игры с иерархическим вектором интересов // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. — 1974. — № 3. — С. 54–69.
Germeier Yu., Vatel I. Igry s ierarkhicheskim vektorom interesov [Games with a hierarchical vector of interests] // Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika. — 1974. — No. 3. — P. 54–69 (in Russian).

Горелик В., Горелов М., Кононенко А. Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. — М., 1991.

Gorelik V., Gorelov M., Kononenko A. Analiz konfliktnykh situatsii v sistemakh upravleniya [Analysis of conflict situations in control systems]. — Moscow, 1991 (in Russian).

Горелов М., Кононенко А. Динамические игры. III. Иерархические игры // Автоматика и телемеханика. — 2015. — № 2. — С. 89–106.

Gorelov M. A., Kononenko A. F. Dynamic models of conflicts. III. Hierarchical games // Automation and Remote Control. — 2014. — № 76:2. — P. 264–277.

Когай В., Фадеев С. Применение продолжения по параметру на основе метода множественной стрельбы для численного исследования нелинейных краевых задач // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2001. — Т. 4, № 1 (7). — С. 83–101.

Kogai V., Fadeev S. Primenenie prodolzheniya po parametru na osnove metoda mnozhestvennoi strel'by dlya chislennogo issledovaniya nelineinykh kraevykh zadach [Application of continuation in a parameter based on the multiple shooting method for the numerical study of nonlinear boundary value problems] // Sibirskii zhurnal industrial'noi matematiki. — 2001. — Vol. 4, No. 1 (7). — P. 83–101 (in Russian).

Малкин В. Решение двухточечной краевой задачи методом неградиентного случайного поиска // Системный анализ и прикладная информатика. — 2016. — № 1. — С. 20–34.

Malkin V. Reshenie dvukhtochechnoi kraevoi zadachi metodom negradientnogo sluchainogo poiska [Solution of a two-point boundary value problem by a non-gradient random search method] // Sistemnyi analiz i prikladnaya informatika. — 2001. — No. 1. — P. 20–34 (in Russian).

Постановление Правительства РФ от 03.03.2017 № 255 (ред. от 27.12.2019) «Об исчислении и взимании платы за негативное воздействие на окружающую среду». — URL: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_213744/aed3a10937b9f8c79b9b9b5bdc08a8a31296c43d (дата обращения: 16.01.2020).

Postanovlenie Pravitel'stva RF ot 03.03.2017 No. 255 (red. ot 27.12.2019) "Ob ischislenii i vzimanii platy za negativnoe vozdeistvie na okruzhayushchuyu sredu". — URL: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_213744/aed3a10937b9f8c79b9b9b5bdc08a8a31296c43d (accessed: 16.01.2020) (in Russian).

Постановление Правительства РФ от 13.09.2016 «О ставках платы за негативное воздействие на окружающую среду и дополнительных коэффициентах». — URL: http://pravo.gov.ru/proxy/ips/?docbody=&nd=102409476 (дата обращения: 16.01.2020).

Postanovlenie Pravitel'stva RF ot 13.09.2016 "O stavkakh platy za negativnoe vozdeistvie na okruzhayushchuyu sredu i dopolnitel'nykh koeffitsientakh". — URL: http://pravo.gov.ru/proxy/ips/?docbody=&nd=102409476 (accessed: 16.01.2020) (in Russian).

Угольницкий Г. Управление устойчивым развитием активных систем. — Ростов н/Д: Издательство Южного федерального университета, 2016. — 940 с.

Ugolnitskii G. Upravlenie ustoichivym razvitiem aktivnykh sistem [Management of sustainable development of active systems]. — Rostov-na-Donu: Izdatel'stvo Yuzhnogo federal'nogo universiteta, 2016. — 940 p. (in Russian).

Угольницкий Г., Усов А. Равновесия в моделях иерархически организованных динамических систем с учетом требований устойчивого развития // Автоматика и телемеханика. — 2014. — № 6. — С. 86–102.

Ugol'nitskii G. A., Usov A. B. Equilibria in models of hierarchically organized dynamic systems with regard to sustainable development conditions // Automation and Remote Control. — 2014. — No. 75:6. — P. 1055–1068. (Original Russian paper: *Ugol'nitskii G., Usov A.* Ravnovesiya v modelyakh ierarkhicheski organizovannykh dinamicheskikh sistem s uchetom trebovanii ustoichivogo razvitiya // Avtomatika i telemekhanika. — 2014. — No. 6. — P. 86–102.)

Угольницкий Г., Усов А. Динамические иерархические игры двух лиц в программных стратегиях и их приложения // Математическая теория игр и ее приложения. — 2013. — № 5 (2). — С. 82–104.

Ugolnitskii G., Usov A. Dinamicheskie ierarkhicheskie igry dvukh lits v programmnykh strategiyakh i ikh prilozheniya [Dynamic hierarchical two-person games in software strategies and their applications] // Matematicheskaya teoriya igr i ee prilozheniya. — 2013. — No. 5 (2). — P. 82–104 (in Russian).

Угольницкий Г., Усов А. Алгоритмы решения дифференциальных моделей иерархических систем управления // Автоматика и телемеханика. — 2016. — № 5. — С. 148–158.

Ugol'nitskii G. A., Usov A. B. Solution algorithms for differential models of hierarchical control systems // Automation and Remote Control. — 2016. — No. 77:5. — P. 872–880. (Original Russian paper: *Ugol'nitskii G., Usov A.* Algoritmy resheniya differentsial'nykh modelei ierarkhicheskikh sistem upravleniya // Avtomatika i telemekhanika. — 2016. — No. 5. — P. 148–158.)

Фадеев С. Программа численного решения нелинейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром // Вычислительные методы линейной алгебры. — Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1990. — С. 104–200.

Fadeev S. Programma chislennogo resheniya nelineinykh kraevykh zadach dlya sistem obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii s parametrom [The program for the numerical solution of nonlinear boundary value problems for systems of ordinary differential equations with a parameter] // Vychislitel'nye metody lineinoi algebry. — Novosibirsk: Nauka, Sibirskoe otdelenie, 1990. — P. 104–200 (in Russian).

Федеральный закон от 10.01.2002 № 7-ФЗ (ред. от 27.12.2019) «Об охране окружающей среды». Статья 16. — URL: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_34823/4d2f994d3199b20f35934603e85132412705d121/ (дата обращения: 16.01.2020).

Federal'nyi zakon ot 10.01.2002 No. 7-FZ (red. ot 27.12.2019) «Ob okhrane okruzhayushchei sredy». Stat'ya 16. — URL: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_34823/4d2f994d3199b20f35934603e85132412705d121/ (accessed: 16.01.2020) (in Russian).

Basar T., Olsder G. J. Dynamic Noncooperative Game Theory. — SIAM: Philadelphia, 1999.

Dockner E., Jorgensen S., Long N. V., Sorger G. Differential Games in Economics and Management Science. — Cambridge University Press, 2000.

Helmer R., Hespanhol I. Water Pollution Control. A Guide to the Use of Water Quality Management Principles. — St. Edmundsbury Press, 1997.

Keller H. B. Numerical methods for two-point boundary-value problems. — Courier Dover Publications, 2018.

Rao A. V. A Survey of Numerical Methods for Optimal Control // Advances in the Astronautical Sciences. — 2009. — Vol. 135. — P. 497–528.

Ugolnitskii G., Usov A. Computer Simulations as a Solution Method for Differential Games // Computer Simulations: Advances in Research and Applications / eds. M. D. Pfeffer and E. Bachmaier. — NY: Nova Science Publishers, 2018. — P. 63–106.