

Детерминированные системы

УДК 62-501.42

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

М. И. ГИЛЬ

(Хабаровск)

Получены необходимые и достаточные условия устойчивости систем с распределенными параметрами, которые описываются линейными интегро-дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных с дифференцируемыми по времени коэффициентами.

Существующая теория устойчивости систем с распределенными параметрами [1, 2] связана в основном с развитием метода функций Ляпунова. В настоящей работе получен критерий устойчивости систем с распределенными параметрами, основанный на доказываемом ниже обобщении неравенства Важевского [3]. Этот критерий, как показано ниже, весьма прост в применении и в соответствующих случаях позволяет избежать громоздких выкладок, связанных с построением функций Ляпунова.

Как известно [4], широкий класс уравнений в частных производных и интегро-дифференциальных уравнений можно представить в виде (1) $dx/dt = A(t)x$ ($x(t) \in H$, $A(t)x \in H$, $t \geq 0$), где $A(t)$ — линейный оператор в гильбертовом пространстве H . Следуя [5], будем называть уравнение (1) устойчивым, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что из $\|x(0)\| \leq \delta$ следует $\|x(t)\| \leq \varepsilon$ ($t > 0$). Нетрудно видеть, что это определение согласовано в линейном случае с определением устойчивости по одной мере [1] или по одному расстоянию 2.

В соответствии с [4] будем называть действующий в H оператор A ограниченным справа, если найдется такая постоянная ω , что для всякого x из области определения оператора A выполняется неравенство $\operatorname{Re}(Ax, x) \leq \omega(x, x)$.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема. Пусть $A(t)$ ($t \geq 0$) — переменный линейный оператор в H с постоянной и плотной в H областью определения D , сильно дифференцируемый на ней. Если при каждом $t \geq 0$ $A(t)$ замкнут [4], операторы $A(t)$ и его сопряженный $A^*(t)$ ограничены справа, то для устойчивости уравнения (1) необходимо, чтобы

$$\int_0^{\infty} \lambda(t) dt < +\infty \quad \left(\lambda(t) = \inf_{x \in D} \operatorname{Re} \frac{(A(t)x, x)}{(x, x)} \right),$$

и достаточно, чтобы

$$\int_0^{\infty} \Lambda(t) dt < +\infty \quad \left(\Lambda(t) = \sup_{x \in D} \operatorname{Re} \frac{(A(t)x, x)}{(x, x)} \right).$$

Пример. Рассмотрим в пространстве $L_2=L_2(-\infty, \infty)$ уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial y} \left[a(t, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right] + q(t, y)u \quad (u=u(t, y)),$$

(2)

$$(u(0, y) \in L_2, t \geq 0, -\infty < y < \infty),$$

где $a(t, y)$, $q(t, y)$ — дифференцируемые по обеим переменным вещественные функции, причем $a(t, y) \geq 0$ ($t \geq 0, -\infty < y < \infty$), а $q(t, y)$ ограничена сверху при каждом $t \geq 0$. Очевидно,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dy} a(t, y) \frac{d}{dy} h, h \right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dy} a(t, y) \frac{d}{dy} h(y) \overline{h(y)} dy = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} a(t, y) \frac{d}{dy} |h(y)|^2 dy \quad \left(h, \frac{d}{dy} h \in L_2 \right), \end{aligned}$$

т. е. оператор $\frac{d}{dy} a(t, y) \frac{d}{dy}$ самосопряжен и отрицателен в L_2 (см. также [4]).

Определим на множестве D функции h из L_2 , таких, что $\frac{d^2}{dy^2} h \in L_2$, оператор

$$A(t)h(y) = \frac{d}{dy} a(t, y) \frac{dh(y)}{dy} + q(t, y)h(y).$$

Имеем

$$\begin{aligned} (A(t)h, h) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{dy} a(t, y) \frac{dh(y)}{dy} + q(t, y)h(y) \right) \overline{h(y)} dy \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} q(t, y) |h(y)|^2 dy \leq \alpha(t) \int_{-\infty}^{\infty} |h(y)|^2 dy \\ (\alpha(t) &= \sup_y q(t, y), h \in D). \end{aligned}$$

Поскольку $A(t) = A^*(t)$, то рассматриваемый оператор удовлетворяет требованиям теоремы, причем

$$\Lambda(t) = \sup_{h \in D} \frac{(A(t)h, h)}{(h, h)} = \alpha(t).$$

Таким образом, по теореме для устойчивости уравнения (2) достаточно, чтобы

$$\int_0^{\infty} \alpha(t) dt < +\infty.$$

Так как при $a(t, y) > 0$ $A(t)$ неограничен и отрицателен, то

$$\lambda(t) = \inf_{h \in D} \frac{(A(t)h, h)}{(h, h)} = -\infty$$

и необходимые условия при $a(t, y) > 0$ выполняются автоматически. Если же для некоторого $t_0 > 0$ выполняется равенство $a(t, y) = 0$ ($t > t_0$,

$-\infty < y < \infty$), то

$$\lambda(t) = \beta(t) = \inf q(t, y) \quad (t > t_0),$$

и в этом случае необходимым условием устойчивости уравнения (2) является неравенство

$$\int_{t_0}^{\infty} \beta(t) dt < +\infty.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы

Основой доказательства теоремы является следующая лемма.

Лемма. В предположениях теоремы решение уравнения (1) удовлетворяет неравенствам

$$(П.1) \quad \exp \left[\int_s^t \lambda(\tau) d\tau \right] \leq \frac{\|x(t)\|}{\|x(s)\|} \leq \exp \left[\int_s^t \Lambda(\tau) d\tau \right] \quad (0 \leq s < t < \infty).$$

Доказательство леммы. Докажем вначале, что задача Коши для уравнения (1) равномерно корректна и, следовательно, обладает при заданном начальном условии единственным решением. Зафиксируем t и положим $B = A(t)$. По условию теоремы

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(Bx, x) &\leq \omega(x, x) \quad (x \in D), \\ \operatorname{Re}(B^*y, y) &\leq \omega(y, y) \quad (y \in D(B^*)), \\ (\omega &\geq \Lambda(t), t \geq 0), \end{aligned}$$

где $D(B^*)$ — область определения оператора B^* . Как показано в [4] (стр. 112), задача Коши для уравнения

$$dx/ds = Bx \quad (s \geq 0)$$

равномерно корректна и для полугруппы $U(s)$ этого уравнения справедлива оценка

$$(П.2) \quad \|U(s)\| \leq e^{\omega s} \quad (s \geq 0).$$

Воспользуемся равенством ([4], стр. 44)

$$R_\lambda(B) \equiv (B - \lambda I)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda s} U(s) ds \quad (\lambda > 0, I: Ix = x, x \in H).$$

Согласно (П.2), имеем

$$\|R_\lambda(B)\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda s} \|U(s)\| ds \leq \frac{1}{\lambda - \omega} \quad (\lambda > \omega > 0).$$

Отсюда при $\mu = \lambda - \omega - 1$ следует неравенство

$$\|R_\mu(A(t) - (\omega + 1)I)\| \leq (1 + \mu)^{-1} \quad (\mu > -1).$$

По теореме 3.11 ([4], стр. 255) задача Коши для уравнения

$$\frac{d}{dt} y = (A(t) - (\omega + 1)y) \quad (0 \leq t \leq T < \infty)$$

равномерно корректна. Полагая $x(t) = e^{(\omega+1)t}y(t)$, можем утверждать, что корректна задача Коши и для уравнения (1). Следуя известным рассуждениям (см., например, [5], стр. 182), продифференцируем функцию

$$\varphi(t) = (x(t), x(t)) \exp \left[-2 \int_{t_0}^t \Lambda(\tau) d\tau \right].$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varphi(t) &= [(x'(t), x(t)) + (x(t), x'(t))] \exp \left[-2 \int_{t_0}^t \Lambda(\tau) d\tau \right] - \\ &- 2(x(t), x(t)) \Lambda(t) \exp \left[-2 \int_{t_0}^t \Lambda(\tau) d\tau \right] = \\ &= 2\operatorname{Re}(A(t)x(t), x(t)) - \Lambda(t)(x(t), x(t)) \exp \left[-2 \int_{t_0}^t \Lambda(\tau) d\tau \right]. \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства

$$\operatorname{Re}(A(t)x, x) \leq \Lambda(t)(x, x)$$

следует оценка $d\varphi(t)/dt \leq 0$, т. е. $\varphi(t)$ — невозрастающая функция, и, таким образом, при $s < t$ справедливо правое из неравенств (П.1). Аналогично доказывается левое неравенство. Лемма доказана.

Утверждение теоремы следует из доказанной леммы и определения устойчивости.

Поступила в редакцию
2 апреля 1980 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Сиразетдинов Т. К.* Устойчивость систем с распределенными параметрами. Изд-во Казанск. авиационного ин-та, 1971.
2. *Маргынюк А. А., Гутовски Р.* Интегральные неравенства и устойчивость движения. «Наукова думка», Киев, 1979.
3. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. «Наука», 1968.
4. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. «Наука», 1967.
5. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. «Наука», 1970.

ON STABILITY OF NONSTATIONARY DISTRIBUTED SYSTEMS

M. I. GIL'

The necessary and sufficient conditions for stability of a distributed systems are obtained which are described by linear integro-differential equations and partial equations with time-differentiable coefficients.
