Е. Г. Голузина, О множествах значений систем $\{f(z_1), f(z_2), f'(z_2)\}$ и $\{f(z_1), f'(z_1), f''(z_1)\}$ на классе типично вещественных функций, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2002, том 286, 48–61

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 286, 2002 г.

Е. Г. Голузина

О МНОЖЕСТВАХ ЗНАЧЕНИЙ СИСТЕМ $\{f(z_1), f(z_2), f'(z_2)\}$ И $\{f(z_1), f'(z_1), f''(z_1)\}$ НА КЛАССЕ ТИПИЧНО ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В настоящей работе исследованы множества значений указанных в заглавии систем на классе T функций $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$, регулярных и типично вещественных в круге $U = \{z : |z| < 1\}$. Как следствие, найдены множества значений $f'(z_2)$ и $f''(z_1)$ при фиксированных $f(z_1)$, $f(z_2)$ и $f(z_1)$, $f'(z_1)$, соответственно.

Данная работа продолжает серию исследований множеств значений систем функционалов на классах функций, допускающих интегральное представление, на основе результатов теории моментов. Рассматриваемые системы функционалов представляют собой системы значений функции и ее производных в заданных точках ее области определения. Начало указанному направлению положила работа [1], в которой были рассмотрены системы вида

$$I_{k,\nu}(p) = \{p^{(\nu)}(z_k)\}$$

(z_k — различные заданные точки круга U $k = 1, 2, \dots, m$; $\nu = 0, 1, \dots, \alpha_k$) на классе C функций $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$, регулярных и с $\mathrm{Re}\, p(z) > 0$ в U. Так, в [1] дана характеристика множества значений системы $I_{k,\nu}(p)$ с помощью неотрицательных и положительно определенных эрмитовых форм и описаны все граничные функции. При этом использованы критерии разрешимости тригонометрической проблемы моментов и теорема Фейера–Рисса для неотрицательных тригонометрических многочленов (см. [2]). Аналогичным образом в [3] было исследовано множество значений системы $I_{k,\nu}(f)$ на классе T. В [3] использовались критерии разрешимости степенной проблемы моментов и теорема Маркова–Лукача для неотрицательных алгебраических многочленов. Такой подход позволил найти множества значений конкретных систем:

$$\{f(z_1), f(z_2)\} \quad \text{и} \quad \{f(z_1), f'(z_1)\} \quad [4,5],$$
$$\{f(z_1), f(z_2), f'(z_2)\} \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z_1 \neq 0, \quad \operatorname{Im} z_2 = 0 \quad [6].$$

Здесь мы иллюстрируем возможности указанного выше подхода на примере задачи о множествах значений систем

$$\{f(z_1), f(z_2), f'(z_2)\} \quad \text{в случае} \quad \operatorname{Im} z_j \neq 0, z_j \in U, \quad j = 1, 2,$$
$$\{f(z_1), f'(z_1), f''(z_1)\} \quad \text{при любом} \quad z_1 \in U.$$

§1. Обозначения и формулировки результатов

1.1. Обозначим через D_1 множество значений системы $I_1(f) = \{f(z_1), f(z_2), f'(z_2)\}$ на классе T при условии

$$z_j \in U, \operatorname{Im} z_j \neq 0, z_1 \neq z_2, z_j \ \text{фиксированы}, \ j = 1, 2. \tag{1}$$

Положим

$$\zeta(z) = z + \frac{1}{z}, \quad \zeta_j = \zeta(z_j), \quad w_j = f(z_j),$$
$$\omega_j = \omega_j(w_j) = (4 - \zeta_j^2) w_j, \quad d_j = d_j(w_j) = -1 - \frac{\operatorname{Im} \omega_j}{\operatorname{Im} \zeta_j},$$
$$h_j = h_j(w_j) = -|w_j|^2 - \frac{\operatorname{Im} w_j}{\operatorname{Im} \zeta_j}, \quad j = 1, 2;$$
$$w_3 = f'(z_2), \quad \widetilde{w}_3 = -w_3/\zeta'(z_2).$$

Теорема 1. *D_1 есть множество всех точек $(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^3$, удовлетворяющих следующей системе неравенств:*

$$d_1 \geqslant 0, \quad d_1 d_2 \geqslant \left| \frac{\omega_1 - \bar{\omega}_2}{\zeta_1 - \bar{\zeta}_2} + 1 \right|^2, \tag{2}$$

$$h_1 \geqslant 0, \quad h_1 h_2 \geqslant \left| \frac{w_1 - \bar{w}_2}{\zeta_1 - \bar{\zeta}_2} + w_1 \bar{w}_2 \right|^2, \tag{3}$$

$$
\begin{aligned}
&d_1(d_2^2-|2\zeta_2w_2+\frac{1}{\zeta'(z_2)}(\zeta_2^2-4)w_3-1|^2)\\
&+2\mathrm{Re}\left[(2\zeta_2w_2+\frac{1}{\zeta'(z_2)}(\zeta_2^2-4)w_3-1)\left(\frac{\omega_1-\bar\omega_2}{\zeta_1-\bar\zeta_2}+1\right)\left(\frac{\bar\omega_1-\bar\omega_2}{\bar\zeta_1-\bar\zeta_2}+1\right)\right]\\
&-d_2\left(\left|\frac{\omega_1-\bar\omega_2}{\zeta_1-\bar\zeta_2}+1\right|^2+\left|\frac{\omega_1-\omega_2}{\zeta_1-\zeta_2}+1\right|^2\right)\geqslant 0, \qquad (4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&h_1\left(h_2^2-\left|\frac{w_3}{\zeta'(z_2)}+w_2^2\right|\right)\\
&-h_2\left(\left|\frac{w_1-\bar w_2}{\zeta_1-\bar\zeta_2}+w_1\bar w_2\right|^2+\left|\frac{w_1-w_2}{\zeta_1-\zeta_2}+w_1w_2\right|^2\right)\\
&-2\mathrm{Re}\left[\left(\frac{w_3}{\zeta'(z_2)}+w_2^2\right)\left(\frac{w_1-\bar w_2}{\zeta_1-\bar\zeta_2}+w_1\bar w_2\right)\left(\frac{\bar w_1-\bar w_2}{\bar\zeta_1-\bar\zeta_2}+\bar w_1\bar w_2\right)\right]\geqslant 0, \qquad (5)
\end{aligned}
$$

В [5] доказано, что множество значений системы $\{f(z_1), f(z_2)\}$ на классе T при условии (1) есть множество точек $(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$, удовлетворяющих системе неравенств (2, 3). Это позволяет ввести класс

$$T_1 = \{f \in T : f(z_1) = w_1^{(0)}, \quad f(z_2) = w_2^{(0)}\},$$

где $w_j^{(0)}$ $(j = 1, 2)$ фиксированы таким образом, что выполнены неравенства

$$
\begin{aligned}
&d_1(w_1^{(0)}) > 0, \quad d_1(w_1^{(0)})d_2(w_2^{(0)}) > \left|\frac{\omega_1(w_1^{(0)})-\overline{\omega_2(w_2^{(0)})}}{\zeta_1-\bar\zeta_2}+1\right|^2,\\
&h_1(w_1^{(0)}) > 0, \quad h_1(w_1^{(0)})h_2(w_2^{(0)}) > \left|\frac{\overline{w_2^{(0)}}-w_1^{(0)}}{\bar\zeta_2-\zeta_1}+w_1^{(0)}\overline{w_2^{(0)}}\right|^2.
\end{aligned}
$$

Тогда из неравенств (4) и (5) теоремы 1 получаем

Следствие 1. *Множество D_1' значений $f'(z_2)$ на классе T_1 есть пересечение кругов Ω_j, $j = 1, 2$, где*

$$\Omega_j = \{w : |w - O_j| \leqslant R_j\}$$

и

$$O_1 = \frac{\zeta'(z_2)}{4-\zeta_2^2}\left[2\zeta_2 w_2^{(0)} - 1 - \frac{1}{d_1(w_1^{(0)})}\right.$$

$$\times\left(\frac{(4-\zeta_2^2)w_2^{(0)}-(4-\bar{\zeta}_1^2)\overline{w_1^{(0)}}}{\zeta_2-\bar{\zeta}_1}+1\right)\left(\frac{(4-\zeta_1^2)w_1^{(0)}-(4-\zeta_2^2)w_2^{(0)}}{\zeta_1-\zeta_2}+1\right)\Bigg],$$

$$R_1=\frac{|\zeta'(z_2)|}{d_1(w_1^{(0)})|4-\zeta_2^2|}$$

$$\times\left(d_1(w_1^{(0)})d_2(w_2^{(0)})-\left|\frac{(4-\zeta_1^2)w_1^{(0)}-(4-\overline{\zeta_2^2})\overline{w_2^{(0)}}}{\zeta_1-\bar{\zeta}_2}+1\right|^2\right)^{1/2}$$

$$\times\left(d_1(w_1^{(0)})d_2(w_2^{(0)})-\left|\frac{(4-\zeta_1^2)w_1^{(0)}-(4-\zeta_2^2)w_2^{(0)}}{\zeta_1-\zeta_2}+1\right|^2\right)^{1/2},$$

$$O_2=-\zeta'(z_2)\left[\frac{1}{h_1(w_1^{(0)})}\left(\frac{w_2^{(0)}-\overline{w_1^{(0)}}}{\zeta_2-\bar{\zeta}_1}+\overline{w_1^{(0)}}w_2^{(0)}\right)\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{w_2^{(0)}-w_1^{(0)}}{\zeta_2-\zeta_1}+w_1^{(0)}w_2^{(0)}\right)+(w_2^{(0)})^2\right],$$

$$R_2=\frac{|\zeta'(z_2)|}{h_1(w_1^{(0)})}\left(h_1(w_1^{(0)})h_2(w_2^{(0)})-\left|\frac{w_2^{(0)}-\overline{w_1^{(0)}}}{\zeta_2-\bar{\zeta}_1}+\overline{w_1^{(0)}}w_2^{(0)}\right|^2\right)^{1/2}$$

$$\times\left(h_1(w_1^{(0)})h_2(w_2^{(0)})-\left|\frac{w_2^{(0)}-w_1^{(0)}}{\zeta_2-\zeta_1}+w_1^{(0)}w_2^{(0)}\right|^2\right)^{1/2}.$$

1.2. Обозначим через D_2 множество значений системы $I_2(f)=\{f(r),f(z_0),f'(z_0)\}$ на классе T при условии

$$0<r<1,\quad z_0\in U,\quad \operatorname{Im} z_0\neq 0,\quad r \text{ и } z_0 \text{ фиксированы.} \tag{6}$$

Положим

$$\rho = r + \frac{1}{r}, \quad \zeta_0 = z_0 + \frac{1}{z_0},$$
$$x_1 = f(r), \quad w_1 = x_2 + ix_3 = f(z_0), \quad w_2 = x_4 + ix_5 = f'(z_0),$$
$$\tilde{w}_2 = -w_2/\zeta'(z_0);$$
$$a_{00}^{(j)} = a_{00}^{(j)}(x_1) = \varepsilon_j + (2 - \varepsilon_j\rho)x_1,$$
$$a_{01}^{(j)} = a_{01}^{(j)}(x_1, w_1) = \frac{1}{\zeta_0 - \rho}[(2 - \varepsilon_j\rho)x_1 - (2 - \varepsilon_j\zeta_0)w_1],$$
$$a_{11}^{(j)} = a_{11}^{(j)}(x_1, w_1) = (2 - \varepsilon_j\rho)x_1|\zeta_0 - \rho|^{-2} + \frac{1}{\operatorname{Im}\zeta_0}\operatorname{Im}\frac{(2 - \varepsilon_j\zeta_0)w_1}{\zeta_0 - \rho},$$
$$\begin{aligned} a_{12}^{(j)} &= a_{12}^{(j)}(x_1, w_1, w_2) \\ &= (2 - \varepsilon_j\rho)(x_1 - w_1)(\zeta_0 - \rho)^{-2} - (2 - \varepsilon_j\zeta_0)\tilde{w}_2(\zeta_0 - \rho)^{-1}, \end{aligned}$$
$$\varepsilon_j = (-1)^{j+1}, \quad j = 1, 2.$$

Теорема 2. *D_2 есть множество всех точек $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$, удовлетворяющих следующей системе неравенств:*

$$a_{00}^{(j)} \geqslant 0, \quad a_{00}^{(j)}a_{11}^{(j)} \geqslant |a_{01}^{(j)}|^2, \tag{7}$$
$$(a_{11}^{(j)})^2 a_{00}^{(j)} - 2a_{11}^{(j)}|a_{01}^{(j)}|^2 - |a_{12}^{(j)}|^2 a_{00}^{(j)} + 2\operatorname{Re}[(a_{01}^{(j)})^2\overline{a_{12}^{(j)}}] \geqslant 0, \tag{8}$$
$$j = 1, 2.$$

Как показано в [4], множеством значений системы $\{f(r), f(z_0)\}$ на классе T при выполнении условия (6) является множество точек $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих неравенствам (7).

Введем класс

$$T_2 = \{f \in T : f(z_0) = w_0, \quad f(r) = a\},$$

где a, w_0 фиксированы и удовлетворяют неравенствам

$$a_{00}^{(j)}(a) > 0, \quad a_{00}^{(j)}(a)a_{11}^{(j)}(a, w_0) > |a_{01}^{(j)}(a, w_0)|^2.$$

Записав неравенства (8) в надлежащей форме, из теоремы 2 получим

Следствие 2. *Множество D_2' значений $f'(z_0)$ на классе T_2 является пересечением двух кругов*

$$\Delta_j = \{w : |w - O^{(j)}| \leqslant R^{(j)}\}, \quad j = 1, 2,$$

где

$$O^{(j)} = \frac{\zeta'(z_0)}{(\zeta_0-\rho)(2-\varepsilon_j\zeta_0)}\Big\{(2-\varepsilon_j\rho)(w_0-a)$$
$$+[(2-\varepsilon_j\rho)a-(2-\varepsilon_j\zeta_0)w_0]^2(\varepsilon_j+(2-\varepsilon_j\rho)a)^{-1}\Big\},$$
$$R^{(j)} = \frac{|\zeta'(z_0)|}{|(\zeta_0-\rho)(2-\varepsilon_j\zeta_0)|}\Big\{(2-\varepsilon_j\rho)a-\frac{1}{\operatorname{Im}\zeta_0}\operatorname{Im}[(2-\varepsilon_j\zeta_0)(\rho-\overline{\zeta_0})w_0]$$
$$-|(2-\varepsilon_j\rho)a-(2-\varepsilon_j\zeta_0)w_0|^2(\varepsilon_j+(2-\varepsilon_j\rho)a)^{-1}\Big\},$$
$$\varepsilon_j=(-1)^{j+1}.$$

1.3. Обозначим через D_3 множество значений системы $I_3(f) = \{f(z_1), f'(z_1),\ f''(z_1)\}$ на классе T при фиксированном $z_1 \in U$.

Положим

$$w_1=f(z_1),\quad w_2=f'(z_1),\quad w_3=f''(z_1),$$
$$\zeta(z)=z+\frac{1}{z},\quad \zeta_1=\zeta(z_1),$$
$$\widetilde{w}_2=-w_2/\zeta'(z_1),\quad \widetilde{w}_3=\frac{1}{2}[w_3+\zeta''(z_1)\widetilde{w}_2][\zeta'(z_1)]^{-2};$$
$$\omega_1=\omega_1(w_1)=(\zeta_1^2-4)w_1,$$
$$\omega_j=\omega_j(w_j)=(\zeta_1^2-4)\widetilde{w}_j,\quad j=2,3;$$
$$a_{11}=a_{11}(w_1)=-1+\operatorname{Im}\omega_1/\operatorname{Im}\zeta_1,$$
$$a_{12}=a_{12}(w_1,w_2)=1+\omega_2-2\zeta_1 w_1,$$
$$a_{23}=a_{23}(w_1,w_2)=w_1+\frac{i\omega_2}{2\operatorname{Im}\zeta_1}+i(\overline{\zeta_1^2}-4)\operatorname{Im}w_1 2^{-1}(\operatorname{Im}\zeta_1)^{-2},$$
$$a_{33}=a_{33}(w_1,w_2)=\frac{1}{2}[\operatorname{Im}w_1(|\zeta_1|^2-4)+\operatorname{Im}\zeta_1\operatorname{Re}\omega_2](\operatorname{Im}\zeta_1)^{-3},$$
$$b_1=b_1(w_1)=-|w_1|^2-\frac{\operatorname{Im}w_1}{\operatorname{Im}\zeta_1},$$
$$b_2=b_2(w_2)=-|\widetilde{w}_2|^2-\frac{1}{2}\left(\operatorname{Re}\widetilde{w}_2+\frac{\operatorname{Im}w_1}{\operatorname{Im}\zeta_1}\right)(\operatorname{Im}\zeta_1)^{-2},$$
$$\sigma_1=\sigma_1(w_1,w_2)=\widetilde{w}_2-w_1^2,$$
$$\sigma_2=\sigma_2(w_1,w_2)=-w_1\overline{\widetilde{w}}_2-\frac{i}{2}\left(\frac{\operatorname{Im}w_1}{\operatorname{Im}\zeta_1}+\overline{\widetilde{w}}_2\right)\frac{1}{\operatorname{Im}\zeta_1}.$$

Теорема 3. *D_3 есть множество всех точек $(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^3$, удовлетворяющих в случае $\operatorname{Im} z_1 \neq 0$ системе неравенств:*

$$a_{11}(w_1) \geqslant 0, \quad a_{11}^2(w_1) \geqslant |a_{12}(w_1, w_2)|^2, \tag{9}$$

$$b_1(w_1) \geqslant 0, \quad b_1^2(w_1) \geqslant |\sigma_1(w_1, w_2)|^2, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &a_{11}^2 a_{33} - |w_1 - 2\zeta_1 \widetilde{w}_2|^2 a_{11} - a_{11}|a_{23}|^2 - |a_{12}|^2 a_{33} \\ &- 2\mathrm{Re}[(w_1 - 2\zeta_1 \widetilde{w}_2)\overline{a_{12} a_{23}}] \geqslant |\omega_3|^2 a_{11} \\ &+ 2\mathrm{Re}[\bar{\omega}_3(a_{12}a_{23} + (w_1 - 2\zeta_1\widetilde{w}_2)a_{11})], \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &b_1^2 b_2 - b_1|\sigma_2|^2 - b_2|\sigma_1|^2 \geqslant |\widetilde{w}_3 - w_1\widetilde{w}_2|^2 b_1 \\ &- 2\mathrm{Re}[\bar{\sigma}_1\sigma_2(\widetilde{w}_3 - w_1\widetilde{w}_2)]. \end{aligned} \tag{12}$$

В случае $z_1 = r$, $0 < r < 1$, D_3 есть множество всех точек $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих следующей системе неравенств ($x_1 = f(r)$, $x_2 = f'(r)$, $x_3 = f''(r)$):

$$\varepsilon + \left(2 - \varepsilon\frac{1+r^2}{r}\right)x_1 \geqslant 0,$$

$$\left[\varepsilon + \left(2 - \varepsilon\frac{1+r^2}{r}\right)x_1\right]\left[\frac{\varepsilon r^2 x_2}{1-r^2} + r^4\left(2 - \varepsilon\frac{1+r^2}{r}\right)\frac{x_3 + \frac{2x_2}{r(1-r^2)}}{2(1-r^2)^2}\right]$$
$$\geqslant \left|\varepsilon x_1 + \left(2 - \varepsilon\frac{1+r^2}{r}\right)\frac{r^2 x_2}{1-r^2}\right|^2, \quad \varepsilon = (-1)^j, \quad j = 1, 2.$$

В работе [5] доказано, что множество значений системы $\{f(z_1), f'(z_1)\}$ на классе T в случае $\operatorname{Im} z_1 \neq 0$, $z_1 \in U$, является множеством точек $(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$, удовлетворяющих системе неравенств (9, 10).

Пусть

$$T_3 = \{f \in T : f(z_1) = w_0, \quad f'(z_1) = \omega_0\},$$

где w_0, ω_0 удовлетворяют неравенствам

$$a_{11}(w_0) > 0, \quad a_{11}^2(w_0) > |a_{12}(w_0, \omega_0)|^2,$$
$$b_1(w_0) > 0, \quad b_1^2(w_0) > |\sigma_1(w_0, \omega_0)|^2.$$

Из неравенств (11) и (12) теоремы 3 вытекает

Следствие 3. *Множество D_3' значений $f''(z_1)$ на классе T_3 в случае $\operatorname{Im} z_1 \neq 0$ является пересечением двух кругов*

$$K_j = \{z : |w - O_j'| \leqslant R_j'\}, \quad j = 1, 2,$$

где

$$O_1' = \frac{-2}{z_1^2}\left[a_{11}^{-1}(w_0)a_{23}(w_0,\omega_0)a_{12}(w_0,\omega_0) + w_0 - \frac{2z_1(1+z_1^2)}{1-\bar z_1}\omega_0\right]$$
$$-\frac{2\omega_0}{z_1(1-z_1^2)},$$
$$R_1' = \frac{2}{|z_1|^2 a_{11}(w_0)}[a_{11}^2(w_0) - |a_{12}(w_0,\omega_0)|^2]^{1/2}$$
$$\times [a_{11}(w_0)a_{33}(w_0,\omega_0) - |a_{23}(w_0,\omega_0)|^2]^{1/2},$$
$$O_2' = \frac{2(1-z_1^2)^2}{z_1^4}\left[\frac{z_1^2 w_0\omega_0}{1-z_1^2} + \frac{1}{b_1(w_0)}\sigma_1(w_0,\omega_0)\overline{\sigma_2(w_0,\omega_0)}\right] - \frac{2\omega_0}{z_1(1-z_1^2)},$$
$$R_2' = 2\frac{|1-z_1^2|^2}{|z_1|^4 b_1(w_0)}[b_1^2(w_0) - |\sigma_1(w_0,\omega_0)|^2]^{1/2} \times [b_1(w_0)b_2(w_0,\omega_0)$$
$$- |\sigma_2(w_0,\omega_0)|^2]^{1/2}.$$

§2. Доказательства

2.1. Доказательство теоремы 1. Для класса T известно интегральное представление:

$$f(z) \in T \Longleftrightarrow \int_{-1}^{1} \frac{z}{1-2tz+z^2}\,d\alpha(t), \quad \alpha(t) \in M_1, \tag{13}$$

где M_1 — класс функций $\alpha(T)$, неубывающих на $[-1,1]$, $\int_{-1}^{1} d\alpha(t) = 1$. Поэтому для системы $I_1(f)$ имеем представление

$$f(z_j) = \int_{-1}^{1} \frac{d\alpha(t)}{\zeta_j - 2t}, \quad f'(z_2) = \int_{-1}^{1} \frac{-\zeta'(z_2)}{(\zeta_2-2t)^2}\,d\alpha(t), \quad j=1,2, \quad \alpha \in M_1. \tag{14}$$

Из (14) следует, что D_1 — выпуклое, ограниченное и замкнутое множество в $\mathbb{C}^3$. По теореме в [2, теорема 1.3, с. 86–87], для справедливости представления (14) необходимо и достаточно, чтобы при выполнении для всех $t \in [-1,1]$ неравенства

$$\varphi_1(t) \equiv \operatorname{Re}\left[\delta_0 + \frac{\delta_1}{\zeta_1 - 2t} + \frac{\delta_2}{\zeta_2 - 2t} + \frac{\delta_3}{(\zeta_2-2t)^2}\right] \geqslant 0 \tag{15}$$

выполнялось бы и неравенство

$$H_1 \equiv \mathrm{Re}[\delta_0 + \delta_1 w_1 + \delta_2 w_2 + \delta_3 \tilde{w}_3] \geqslant 0, \tag{16}$$

где $\delta_0, \ldots, \delta_3$ — комплексные числа, $\delta_0 \neq 0$.

Запишем (15) в виде

$$\varphi_1(t) = \frac{A_6(t)}{|\zeta_1 - 2t|^2 |\zeta_2 - 2t|^4} \geqslant 0, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \tag{17}$$

где $A_6(t)$ — алгебраический многочлен от t 6-ой степени. По теореме Маркова–Лукача [2, с. 89], имеем

$$A_6(t) = (1 - t^2)(x_0 + x_1 t + x_2 t^2)^2 + \left(\sum_{k=0}^{3} y_k t^k \right)^2, \tag{18}$$

где $x_j (j = 0, 1, 2)$ и $y_k (k = 0, 1, 2, 3)$ — некоторые вещественные числа. Подставим (18) в левую часть неравенства (17) и запишем $\varphi_1(t)$ в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) = (1 - t^2) \bigg| & \frac{\beta_0}{\zeta_1 - 2t} + \frac{\beta_1}{\zeta_2 - 2t} \\ & + \frac{\beta_2}{\bar{\zeta}_2 - 2t} \bigg|^2 + \left| \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{\zeta_1 - 2t} + \frac{\gamma_2}{\zeta_2 - 2t} + \frac{\gamma_3}{\bar{\zeta}_2 - 2t} \right|^2. \end{aligned} \tag{19}$$

Заметим, что имеют место разложения

$$\begin{aligned} \frac{1 - t^2}{|\zeta_j - 2t|^2} &= -\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{\mathrm{Im}\,\zeta_j} \mathrm{Im} \frac{4 - \zeta_j^2}{\zeta_j - 2t} \right), \quad j = 1, 2, \\ \frac{1 - t^2}{(\zeta_1 - 2t)(\bar{\zeta}_2 - 2t)} &= -\frac{1}{4} \left[1 - \frac{1}{\bar{\zeta}_2 - \zeta_1} \left(\frac{4 - \zeta_1^2}{\zeta_1 - 2t} - \frac{4 - \bar{\zeta}_2^2}{\bar{\zeta}_2 - 2t} \right) \right], \\ \frac{1 - t^2}{(\zeta_2 - 2t)^2} &= -\frac{1}{4} \left[1 - \frac{2\zeta_2}{\zeta_2 - 2t} + \frac{\zeta_2^2 - 4}{(\zeta_2 - 2t)^2} \right], \\ \frac{1 - t^2}{(\zeta_1 - 2t)(\zeta_2 - 2t)} &= -\frac{1}{4} \left[1 - \frac{1}{\zeta_2 - \zeta_1} \left(\frac{4 - \zeta_1^2}{\zeta_1 - 2t} - \frac{4 - \zeta_2^2}{\zeta_2 - 2t} \right) \right], \\ \frac{1}{|\zeta_j - 2t|^2} &= \frac{1}{\bar{\zeta}_j - \zeta_j} \left(\frac{1}{\zeta_j - 2t} - \frac{1}{\bar{\zeta}_j - 2t} \right), \quad j = 1, 2, \\ \frac{1}{(\zeta_1 - 2t)(\zeta_2 - 2t)} &= \frac{1}{\zeta_1 - \zeta_2} \left(\frac{1}{\zeta_2 - 2t} - \frac{1}{\zeta_1 - 2t} \right). \end{aligned} \tag{20}$$

В силу условия $\varphi_1(t) \geqslant 0$ на промежутке $[-1,1]$, из (19) получаем, что для того чтобы неравенство (15) влекло за собой неравенство (16) необходимо и достаточно, чтобы при произвольном выборе z_1 и z_2 из круга U, $\operatorname{Im} z_j \neq 0$, $j=1,2$, $z_1 \neq z_2$, была неотрицательна форма

$$\begin{aligned}
H_1 = {} & \left(\frac{\operatorname{Im}[(\zeta_1^2-4)w_1]}{\operatorname{Im}\zeta_1}-1\right)|\beta_0|^2 + \left(\frac{\operatorname{Im}[(\zeta_2^2-4)w_2]}{\operatorname{Im}\zeta_2}-1\right)(|\beta_1|^2+|\beta_2|)^2 \\
& + 2\operatorname{Re}\left\{\left[\frac{(4-\zeta_1^2)w_1-(4-\bar\zeta_2^2)\bar w_2}{\bar\zeta_2-\zeta_1}-1\right]\beta_0\bar\beta_1\right\} \\
& + 2\operatorname{Re}\left\{\left[\frac{(4-\zeta_1^2)w_1-(4-\zeta_2^2)w_2}{\zeta_2-\zeta_1}-1\right]\beta_0\bar\beta_2\right\} \\
& +2\operatorname{Re}\big[(2\zeta_2 w_2-1-(\zeta_2^2-4)\tilde w_3)\beta_1\bar\beta_2\big] \\
& + |\gamma_0|^2 - \frac{\operatorname{Im} w_1}{\operatorname{Im}\zeta_1}|\gamma_1|^2 - \frac{\operatorname{Im} w_2}{\operatorname{Im}\zeta_2}(|\gamma_2|^2+|\gamma_3|^2) \\
& + 2\operatorname{Re}(\bar w_1\gamma_0\bar\gamma_1) + 2\operatorname{Re}(\bar w_2\gamma_0\bar\gamma_2) + 2\operatorname{Re}(w_2\gamma_0\bar\gamma_3) \\
& + 2\operatorname{Re}\left(\frac{\bar w_2-w_1}{\zeta_1-\bar\zeta_2}\gamma_1\bar\gamma_2\right) + 2\operatorname{Re}\left(\frac{w_2-w_1}{\zeta_1-\zeta_2}\gamma_1\bar\gamma_3\right) + 2\operatorname{Re}(\tilde w_3\gamma_2\bar\gamma_3).
\end{aligned} \tag{21}$$

Для завершения доказательства теоремы 1 нам потребуются следующие два утверждения.

Пусть $C_1 = C_1(w_1,w_2,w_3)$ — матрица эрмитовой формы (21), $|C_1(w_1,w_2,w_3)|$ — ее определитель.

Лемма 1. 1. *Точка $X=(w_1,w_2,w_3)\in\mathbb{C}^3$ тогда и только тогда является внутренней точкой множество D_1, когда эрмитова форма (21) положительна.*

2. *Точка $X\in D_1$ тогда и только тогда является граничной точкой множества D_1, когда $|C_1(X)|=0$.*

Доказательство леммы 1 аналогично доказательству леммы 2 в [3].

Положительная определенность эрмитовой формы (21) равносильна [7, с. 300] положительности последовательных главных миноров матрицы $H_1(X)$. Ввиду замкнутости множества D_1 и леммы 1, это доказывает теорему 1.

2.2. Доказательство теоремы 2. Используя (13), для системы

$I_2(f)$ получаем представление

$$f(r)=\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\alpha(t)}{\rho-2t},\quad f(z_0)=\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\alpha(t)}{\zeta_0-2t},\quad f'(z_0)=\int\limits_{-1}^{1}\frac{-\zeta'(z_0)}{(\zeta_0-2t)^2}d\alpha(t),$$
$$\alpha\in M_1. \tag{22}$$

Из (22) следует, что D_2 — выпуклое, ограниченное и замкнутое множество в $\mathbb{R}^5$.

Для выполнения (22) необходимо и достаточно, чтобы из справедливости неравенства

$$\varphi_2(t)\equiv \operatorname{Re}\left[\delta_0+\frac{\delta_1}{\rho-2t}+\frac{\delta_2}{\zeta_0-2t}+\frac{\delta_3}{(\zeta_0-2t)^2}\right]\geqslant 0 \tag{23}$$

при любом $t\in[-1,1]$ следовало неравенство

$$H_2\equiv \operatorname{Re}[\delta_0+\delta_1x_1+\delta_2w_1+\delta_3\tilde{w}_2]\geqslant 0. \tag{24}$$

Используя теорему Маркова Лукача [2, с. 89], из (23) получим

$$\varphi_2(t)=\frac{1-t}{\rho-2t}\left|\beta_0+\frac{\beta_1}{\zeta_0-2t}+\frac{\beta_2}{\bar{\zeta}_0-2t}\right|^2+\frac{1+t}{\rho-2t}\left|\gamma_0+\frac{\gamma_1}{\zeta_0-2t}+\frac{\gamma_2}{\bar{\zeta}_0-2t}\right|^2,$$

где β_k, γ_k — комплексные числа ($k=0,1,2$), $\beta_0\neq 0$, $\gamma_0\neq 0$. Следовательно, для справедливости представления (22) необходимо и достаточно, чтобы при произвольном выборе $r\in(0,1)$ и $z_0\in U$, $\operatorname{Im} z_0\neq 0$, была неотрицательна эрмитова форма

$$\begin{aligned}H_2&=a_{00}^{(1)}|\beta_0|^2+a_{11}^{(1)}(|\beta_1|^2+|\beta_2|^2)+2\operatorname{Re}(a_{01}^{(1)}\bar{\beta}_0\beta_1)+2\operatorname{Re}(\bar{a}_{01}^{(1)}\bar{\beta}_0\beta_2)\\&+2\operatorname{Re}(a_{12}^{(1)}\beta_1\bar{\beta}_2)+a_{00}^{(2)}|\gamma_0|^2+a_{11}^{(2)}(|\gamma_1|^2+|\gamma_2|^2)+2\operatorname{Re}(a_{01}^{(2)}\bar{\gamma}_0\gamma_1)\\&+2\operatorname{Re}(\bar{a}_{01}^{(2)}\bar{\gamma}_0\gamma_2)+2\operatorname{Re}(a_{12}^{(2)}\gamma_1\bar{\gamma}_2).\end{aligned} \tag{25}$$

Для завершения доказательства теоремы 2 воспользуемся следующей леммой.

Лемма 2. 1. *Пусть* $X=(x_1,x_2,\dots,x_5)\in\mathbb{R}^5$. *Тогда* $X\in\operatorname{Int}D_2\iff$ *эрмитова форма* (25) *положительна.*

2. *Пусть* $X\in D_2$. *Тогда*

$$X\in\partial D_2\iff |C_2(X)|=0,$$

где $|C_2(X)|$ — *определитель матрицы эрмитовой формы* (25).

Лемма 2 доказывается аналогично лемме 1 в [3].

2.3. Доказательство теоремы 3. В силу (13), для системы $I_3(f)$ имеем интегральное представление

$$f(z_1)=\int_{-1}^{1}\frac{d\alpha(t)}{\zeta_1-2t},\quad f'(z_1)=\int_{-1}^{1}\frac{-\zeta'(z_1)d\alpha(t)}{(\zeta_1-2t)^2},$$

$$f''(z_1)=\int_{-1}^{1}\left(\frac{2[\zeta'(z_1)]^2}{(\zeta_1-2t)^3}-\frac{\zeta''(z_1)}{(\zeta_1-2t)^2}\right)d\alpha(t),\ \alpha\in M_1. \qquad (26)$$

Из (26) видно, что система (w_1,w_2,w_3) получается из системы $(\tilde{w}_1,\tilde{w}_2,\tilde{w}_3)$ преобразованием

$$w_1=\tilde{w}_1,\quad w_2=-\zeta'(z_1)\tilde{w}_2,\quad w_3=2(\zeta'(z_1))^2\tilde{w}_3-\zeta''(z_1)\tilde{w}_2$$

и

$$\tilde{w}_l=\int_{-1}^{1}\frac{d\alpha(t)}{(\zeta_1-2t)^l},\quad l=1,2,3,\quad \int_{-1}^{1}d\alpha(t)=1.$$

В случае $\operatorname{Im}\zeta_1\neq 0$ рассмотрим неотрицательную на промежутке $[-1,1]$ функцию

$$\varphi_3(t)\equiv\operatorname{Re}\left\{\delta_0+\sum_{k=1}^{3}\frac{\delta_k}{(\zeta_1-2t)^k}\right\} \qquad (27)$$

$(\delta_k\in\mathbb{C},\ k=0,1,2,3,\ \delta_0\neq 0)$ и представим ее в виде

$$\varphi_3(t)=\frac{A_6(t)}{|\zeta_1-2t|^6}=(1-t^2)\left|\frac{\beta_0}{\bar{\zeta}_1-2t}+\frac{\beta_1}{\zeta_1-2t}+\frac{\beta_2}{(\zeta_1-2t)^2}\right|^2$$
$$+\left|\gamma_0+\frac{\gamma_1}{\bar{\zeta}_1-2t}+\frac{\gamma_2}{\zeta_1-2t}+\frac{\gamma_3}{(\zeta_1-2t)^2}\right|^2.$$

В случае $z_1=r$ $(r+\frac{1}{r}=\rho)$ рассмотрим функцию (27) при $\zeta_1=\rho$ и вещественных δ_k и запишем ее в виде

$$\frac{A_3(t)}{(\rho-2t)^3}=\frac{1-t}{\rho-2t}\left(\beta_0+\frac{\beta_1}{\rho-2t}\right)^2+\frac{1+t}{\rho-2t}\left(\gamma_0+\frac{\gamma_1}{\rho-2t}\right)^2.$$

Далее доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 1, при этом используются разложения (20) и равенства

$$\frac{1-t^2}{|\zeta_1-2t|^2(\zeta_1-2t)}=-\frac{1}{4(\zeta_1-2t)}+\frac{i}{8\operatorname{Im}\zeta_1}\left[\frac{4-\zeta_1^2}{(\zeta_1-2t)^2}+\frac{\bar\zeta_1^2-4}{|\zeta_1-2t|^2}\right],$$

$$\frac{1}{|\zeta_1-2t|^2(\zeta_1-2t)}=\frac{i}{2\operatorname{Im}\zeta_1}\left[\frac{1}{(\zeta_1-2t)^2}-\frac{1}{|\zeta_1-2t|^2}\right],$$

$$\frac{1-t^2}{|\zeta_1-2t|^4}=-\frac{1}{4|\zeta_1-2t|^2}+\frac{1}{4\operatorname{Im}\zeta_1|\zeta_1-2t|^2}\operatorname{Re}\frac{i(4-\zeta_1^2)}{\zeta_1-2t},$$

$$\frac{1-t\varepsilon}{(\rho-2t)^k}=\frac{\varepsilon}{2(\rho-2t)^{k-1}}+\frac{2-\rho\varepsilon}{2(\rho-2t)^k},\ k=1,2,3.$$

Теорема 3. *Каждой точке $X_l\in\partial D_l$, $l=1,3$, соответствует только одна функция класса T и она имеет вид: либо*

$$f_l(z)=\sum_{j=1}^{4}\frac{\lambda_j z}{1-2t_j z+z^2},\quad \text{где}\quad t_1=-1,\quad t_2=1,\quad t_3,t_4\in(-1,1),$$

$$\lambda_j\geqslant 0,\sum_{j=1}^{4}\lambda_j=1, t_j\neq t_k\quad \text{при}\quad j\neq k,\quad \text{либо}$$

$$f_l(z)=\sum_{j=1}^{3}\frac{\mu_j z}{1-2\tau_j z+z^2},$$

$$\text{где}\quad \tau_j\in(-1,1), j=1,2,3,\quad \mu_j\geqslant 0,\quad \sum_{j=1}^{3}\mu_j=1,$$

$$\tau_j\neq\tau_k\quad \text{при}\quad j\neq k.$$

Каждой точке $X_2\in\partial D_2$ соответствует единственная функция класса T:

$$f_2(z)=\sum_{j=1}^{3}\frac{\nu_j z}{1-2t_j z+z^2},$$

$$\text{где}\quad \nu_j\geqslant 0,\quad \sum_{j=1}^{3}\nu_j=1,\quad t_j\neq t_k\quad \text{при}\quad j\neq k,$$

$$t_1=-1\,\text{или}\,1,\ t_{2,3}\in(-1,1).$$

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству леммы 2 в [3].

Литература

1. В. А. Андреева, Н. А. Лебедев, А. В. Стовбун, *Об областях значений некоторых систем функционалов в некоторых классах регулярных функций*, Вестн. ЛГУ, No. 7, сер. мат., мех. и астр., вып. 2 (1961), 8–22.
2. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи*, М., 1973.
3. Е. Г. Голузина, *Об областях значений некоторых систем функционалов в классе типично вещественных функций*, Вестн. ЛГУ, No. 7, сер. мат., мех. и астр., вып. 2 (1965), 45–62.
4. Е. Г. Голузина, *О множестве значений одной системы функционалов в классе типично вещественных функций*, Зап. научн. семин. ПОМИ **226** (1996), 69–79.
5. Е. Г. Голузина, *О множестве значений систем* $\{f(z_1), f'(z_1)\}$*и* $\{f(z_1), f(z_2)\}$ *в классе типично вещественных функций*, Зап. научн. семин. ПОМИ **254** (1998), 65–75.
6. Е. Г. Голузина, *О множествах значений систем* $\{f(z_0), f'(z_0), c_2\}$ *и* $\{f(r), f'(r), f(z_0)\}$ *в классе типично вещественных функций*, Зап. научн. семин. ПОМИ **276** (2001), 41–51.
7. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, 3-е изд., М., 1967.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 10 августа 2002 г.