М.С.Гиновян

$\sqrt{n}$ - АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ ПРАВДОПОДОБИЯ

§ I. Введение

I. Пусть $x_t, t=0,\pm 1,\dots$ - гауссовский стационарный процесс с нулевым математическим ожиданием $Ex_t=0$ и со спектральной плотностью $f(\lambda)$.

Обозначим через $B_f^{(n)}=\{C(\tau-s)\}_{\tau,s=\overline{0,n}}$ теплицеву матрицу, связанную с функцией $f(\lambda)$, где

$$C(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\lambda\tau} f(\lambda)d\lambda$$

- ковариационная функция процесса x_t, т.е.

$$C(\tau)=Ex_t x_{t+\tau}$$

Как хорошо известно, n -мерная плотность вероятностей $P_n(x_1,\dots,x_n)$ случайных величин $x_1,\dots,x_n$ имеет вид

$$P_n(x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\left(\det B_f^{(n)}\right)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}X'[B_f^{(n)}]^{-1}X\right\}, \quad (I)$$

где $X=(x_1,\dots,x_n)'\in R^n$.

Обозначим через $\mathcal{L}_n$ логарифм функции правдоподобия

$$\mathcal{L}_n=\ln P_n(x_1,\dots,x_n) \quad (2)$$

Тогда из (I) и (2) имеем

$$\mathcal{L}_n=-\frac{1}{2}\left\{n\ln 2\pi+\ln\det B_f^{(n)}+X'[B_f^{(n)}]^{-1}X\right\} \quad (3)$$

При решении тех или иных статистических задач, касающихся статистических выводов о спектральной плотности $f(\lambda)$ (или ковариационной функции $C(\tau)$) по последовательным наблюдениям над рядом $x_t, t=0,\pm 1,\dots$ в случае, когда f известна лишь с точностью до некоторого конечного числа неизвестных параметров, возникает необходимость получения явного выражения для случайной величины $\mathcal{L}_n$.

В силу формулы (3), для этого необходимо найти явные выражения для $\det B_f^{(n)}$ и $[B_f^{(n)}]^{-1}$. Последняя задача, однако, является весьма сложной. Даже в сравнительно простом случае, когда x_t - процесс авторегрессии невысокого порядка (скажем, порядка

$q=2$) формулы для $[B_f^{(n)}]^{-1}$ оказываются громоздкими (см. [7] , [10]).

Это обстоятельство весьма осложняет получение тех или иных статистических выводов о процессе x_t , основанных на использовании выражения для $\mathcal{L}_n$. Однако, чаще всего, основной интерес представляет случай, когда n (число наблюдений) очень велико, и оказывается, что можно использовать не само точное выражение для $\mathcal{L}_n$, а лишь его "главную" часть $\tilde{\mathcal{L}}_n$, удовлетворяющую условию

$$n^{-1/2}(\mathcal{L}_n-\tilde{\mathcal{L}}_n)\longrightarrow 0 \tag{4}$$

при $n\to\infty$ (в смысле сходимости по вероятности).

Эту задачу изучал К.О.Джапаридзе ([6] , [7]) для процессов x_t , спектральная плотность $f(\lambda)$ которых, удовлетворяет условию *)

$$f(\lambda)\asymp 1$$

Точнее им доказана следующая

ТЕОРЕМА. Если спектральная плотность $f(\lambda)$ и ковариационная функция $c(\tau)$ гауссовского стационарного процесса x_t, $t=0,\pm1,\dots$ удовлетворяет следующим условиям:

I) $f(\lambda)\asymp 1$, $-\pi\leq\lambda\leq\pi$

2) $\sum_{j=1}^{\infty} j|c(j)|^2<\infty$

то имеет место соотношение (4), где

$$\tilde{\mathcal{L}}_n=-\frac{n}{2}\left\{\ln 2\pi+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln f(\lambda)d\lambda+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{I_n(\lambda)}{f(\lambda)}d\lambda\right\}.$$

а $I_n(\lambda)=\frac{1}{2\pi n}\left|\sum_{j=0}^{n}x_j e^{i\lambda j}\right|^2$

– периодаграмма процесса x_t .

2. Целью данной работы является доказательство того же результата при более слабых ограничениях на функцию $f(\lambda)$. Справедливы следующие теоремы

ТЕОРЕМА I. Если спектральная плотность $f(\lambda)$ гауссовского стационарного процесса x_t, $t=0,\pm1,\dots$ удовлетворяет следующим условиям:

---

*) Для переменных α и β соотношение $\alpha\asymp\beta$ означает, что $0<c_1\leq\alpha/\beta\leq c_2<\infty$, c_1 и c_2 – константы.

I) $\ln f = u + \tilde{v}$,

где u и v ограниченные функции ($\tilde{v}$ – функция гармонически сопряженная функции v) и $\|v\|_\infty < \frac{\pi}{2}$

2) $\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|^2 = o(n^{-1/2})$,

где a_k – коэффициенты Фурье функции $\ln f$.

3) $\sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k|^2 = o(n^{-1})$,

где c_k – коэффициенты Фурье функции f , то имеет место предельное соотношение

$$n^{-1/2}(\mathcal{L}_n - \tilde{\mathcal{L}}_n) \to 0$$

при $n \to \infty$ (в смысле сходимости по вероятности), где

$$\tilde{\mathcal{L}}_n = -\frac{n}{2}\left\{\ln 2\pi + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda)\,d\lambda + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{I_n(\lambda)}{f(\lambda)}\,d\lambda\right\} \quad (5)$$

где $I_n(\lambda)$ – периодаграмма процесса x_t .

ТЕОРЕМА 2. Если спектральная плотность $f(\lambda)$ гауссовского стационарного процесса x_t удовлетворяет следующим условиям:

I) $\ln f = u + \tilde{v}$

где u и v ограниченные функции и $\|v\|_\infty < \frac{\pi}{2}$

2) $\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|^2 = o(n^{-1/2})$

где a_k – коэффициенты Фурье функции $\ln f$, то имеет место предельное соотношение

$$n^{-1/2}(\mathcal{L}_n - \hat{\mathcal{L}}_n) \to 0$$

при $n \to \infty$ (по вероятности), где

$$\hat{\mathcal{L}}_n = -\frac{n}{2}\left\{(1 + \ln 2\pi) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda)\,d\lambda + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{I_n(\lambda)}{f(\lambda)}\,d\lambda - \frac{1}{2\pi n}\int\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2(\lambda - t)n/2}{\sin^2(\lambda - t)/2} f(\lambda)\,d\lambda\,dt\right\} \quad (6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Первое условие обоих теорем является условием регулярности процесса x_t, означающее геометрически, что минимальный угол между подпространствами H_0 и H_1, положителен, где

$$H_0 = \overline{sp}\{x_t,\ t \leq 0\}$$
$$H_1 = \overline{sp}\{x_t,\ t \geq 1\}$$

§ 2. Вспомогательные результаты. Основные обозначения

I. В этом пункте приведем некоторые определения и результаты, которые понадобятся в дальнейшем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Минимальным углом между подпространствами H_1 и H_2 гильбертова пространства H называется угол $\varphi(H_1, H_2)$ $(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$, определенный равенством

$$\cos\varphi(H_1, H_2) = \sup_{\substack{\psi_1 \in H_1 \\ \psi_2 \in H_2 \\ \|\psi_1\| = \|\psi_2\| = 1}} |(\psi_1, \psi_2)|$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что функция $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$ удовлетворяет условию Хельсона-Сеге, если существует константа K такая, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{\varphi}(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda \leq K \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda$$

где $\tilde{\varphi}$ – функция гармонически сопряженная функции φ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что функция $f(\lambda)$ удовлетворяет условию Макенхоупта A_p, $1 < p < \infty$, если существует константа C такая, что

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I f(\lambda)\, d\lambda\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I f(\lambda)^{-1/(p-1)}\, d\lambda\right)^{p-1} \leq C$$

для каждого интервала I с длиной $|I| \leq 2\pi$

Обозначим через $H^0_{-\infty}(f)$ и $H^\infty_1(f)$ подпространство пространства L^2_f (L^2_f – это L^2 пространство, построенное по мере $f(\lambda)\, d\lambda$), порожденными соответственно величинами $\{e^{i\lambda t},\ t \leq 0\}$ и $\{e^{i\lambda t},\ t \geq 1\}$ и пусть

$$\rho_1 \overset{def}{=} \cos\varphi(H^0_{-\infty}(f), H^\infty_1(f))$$

– косинус минимального угла между ними.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I [9] . Для того, чтобы $\rho_1 < 1$ необходимо и достаточно, чтобы весовая функция $f(\lambda)$ удовлетворяла условию Хельсона – Сеге.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [8] . Для того, чтобы функция $f(\lambda)$ удовлетворяла условию Хельсона – Сеге необходимо и достаточно, чтобы для нее выполнялось условие Макенхоупта A_p , при $p=2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 [8] . Весовая функция $f(\lambda)$ удовлетворяет условию Хельсона – Сеге тогда и только тогда, когда она допускает представление

$$\ln f = u + \tilde{v}$$

где u и v ограниченные функции ($\tilde{v}$ – функция гармонически сопряженная функции v) и $\|v\|_\infty < \frac{\pi}{2}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.I. Как легко видеть, из неравенства Гельдора следует, что если функция $f(\lambda)$ удовлетворяет условию Макенхоупта A_p , то она удовлетворяет и условию A_q , при всех $q \geq p$. Докажем одну лемму, которая будет играть центральную роль при доказательстве основных результатов.

ЛЕММА 2.I. Пусть H_1 и H_2 подпространства гильбертова пространства H , удовлетворяющие условиям

I) $H = \overline{H_1 + H_2}$

2) $\rho(H_1, H_2) = \rho < 1$

где $\rho(H_1, H_2)$ – косинус минимального угла между подпространствами H_1 и H_2 , тогда для оператора A действующего в H существуют положительные константы c_1 и c_2 зависящие лишь от ρ такие, что

$$c_1\left(\|AP_1\|_2^2 + \|AP_2\|_2^2\right) \leq \|A\|_2^2 \leq c_2\left(\|AP_1\|_2^2 + \|AP_2\|_2^2\right) \quad (7)$$

где P_1 и P_2 ортопроекторы в H соответственно на подпространства H_1 и H_2 , а $\|A\|_2$ – норма Гильберта – Шмидта оператора A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что если $H_2 = H_1^\perp$ то справедливо очевидное равенство

$$\|A\|_2^2 = \|AP_1\|_2^2 + \|AP_1^\perp\|_2^2 \quad (8)$$

где $P_1^\perp$ – ортопроектор в H на подпространство $H_1^\perp$. Поэтому

$$\|AP_1^\perp\|_2^2 = \|AP_2 + A(P_1^\perp - P_2)\|_2^2 \leq$$

$$\leq \|\mathcal{A}P_2\|_2^2 + \|\mathcal{A}(P_1^{\perp} - P_2)\|_2^2 \leq$$
$$\leq \|\mathcal{A}P_2\|_2^2 + \|\mathcal{A}\|_2^2 |P_1^{\perp} - P_2| \tag{9}$$

в силу неравенства $\|\mathcal{A}B\|_2^2 \leq \|\mathcal{A}\|_2^2 |B|$, где $|B|$ – равномерная норма оператора B.

Но с другой стороны (см. [2]) имеем

$$|P_1^{\perp} - P_2| = \rho(H_1, H_2) \tag{10}$$

Поэтому из (8) и (9) учитывая (10) получаем

$$\|\mathcal{A}\|_2^2 \leq c_2(\|\mathcal{A}P_1\|_2^2 + \|\mathcal{A}P_2\|_2^2),$$

где $c_2 = \frac{1}{1-\rho}$.

Обратное неравенство почти очевидно. Действительно для подпространств H_1 и H_2 следующие равенства очевидны

$$\|\mathcal{A}\|_2^2 = \|\mathcal{A}P_1\|_2^2 + \|\mathcal{A}P_1^{\perp}\|_2^2$$
$$\|\mathcal{A}\|_2^2 = \|\mathcal{A}P_2\|_2^2 + \|\mathcal{A}P_2^{\perp}\|_2^2$$

поэтому

$$2\|\mathcal{A}\|_2^2 \geq \|\mathcal{A}P_1\|_2^2 + \|\mathcal{A}P_2\|_2^2$$

Лемма доказана.

2. Введем следующие обозначения. Обозначим через $L_n \overset{def}{=} X'[B_f^{(n)}]^{-1}X$, где $B_f^{(n)} = \|c(\tau - s)\|_{\tau,s=\overline{0,n}}$ ковариационная матрица процесса x_t, а $X = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$. Нетрудно показать (см. [3]), что L_n допускает представление

$$L_n = \iint_{-\pi}^{\pi} G_n^f(\lambda, \mu) Z(d\lambda) \overline{Z(d\mu)} \tag{11}$$

где $Z(d\lambda)$ – случайная мера в спектральном представлении процесса x_t

$$x_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} Z(d\lambda)$$

а $G_n^f(\lambda, \mu)$ – воспроизводящее ядро пространства $H_0^n(f)$ ($H_0^n(f)$ – пространство полиномов степени не выше n, рассматриваемое как подпространство гильбертова пространства L_f^2) т.е. ядро $G_n^f(\lambda, \mu)$ удовлетворяет следующим условиям (см. [11]):

I) для любого $\lambda \in [-\pi, \pi]$, $G_n^f(\lambda, \mu)$ как функция от μ принадлежит пространство $H_0^n(f)$,

2) выполняется воспроизводящее свойство: для любого $\lambda \in [-\pi, \pi]$ и любой функции $\varphi \in H_0^n(f)$

$$(\varphi(\mu), G_n^f(\lambda, \mu))_f = \varphi(\lambda),$$

где $(\cdot,\cdot)_f$ – скалярное произведение в L_f^2. Легко убедиться (см. [II]), что если $\{\varphi_k\}_{k=\overline{0,n}}$ ортонормированный базис в $H_0^n(f)$ (ортонормированность в смысле скалярного произведения $(\cdot,\cdot)_f$), то

$$G_n^f(\lambda, \mu) = \sum_{k=0}^{n} \overline{\varphi_k(\lambda)}\, \varphi_k(\mu)$$

Далее обозначим через $\tilde{L}_n$

$$\tilde{L}_n \overset{def}{=} \frac{1}{2\pi} \iiint_{-\pi}^{\pi} \frac{G_n^1(\lambda, t) G_n^1(t, \mu)}{f(t)} dt Z(d\lambda) \overline{Z(d\mu)} \qquad (I2)$$

где $G_n^1(\lambda, \mu) = [\sin(\lambda - \mu) n/2 / \sin(\lambda - \mu)/2]$ ядро Дирихле, которое, как известно является воспроизводящим ядром пространства $H_0^n(1)$

Положим

$$R_n \overset{def}{=} L_n - \tilde{L}_n = \iint_{-\pi}^{\pi} \left[G_n^f(\lambda, \mu) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{G_n^1(\lambda, t) G_n^1(t, \mu)}{f(t)} \right] Z(d\lambda) \overline{Z(d\mu)} \qquad (I3)$$

Будем изучать $\sqrt{n}$ – асимптотическое поведение математического ожидания и дисперсии случайной величины R_n.

§ 3. Асимптотическое поведение математического ожидания ER_n

В силу представления (I3) математическое ожидание случайной величины R_n задается формулой

$$ER_n = \int_{-\pi}^{\pi} \left[G_n^f(\lambda, \lambda) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|G_n^1(\lambda, t)|^2}{f(t)} dt \right] f(\lambda) d\lambda \qquad (I4)$$

Имеет место следующая теорема

ТЕОРЕМА 3. Если спектральная плотность $f(\lambda)$ гауссовского стационарного процесса x_t удовлетворяет следующим условиям:

I) $\ln f = u + \tilde{v}$

где u и v ограниченные функции и $\|v\|_\infty < \frac{\pi}{2}$

2) $$\sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k|^2 = o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (I5)$$

где C_K – коэффициенты Фурье функции f, то

$$ER_n = o(n^{1/2}) \tag{16}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} G_n^f(\lambda,\lambda) f(\lambda)\, d\lambda = n \qquad \text{так как } G_n^f(\lambda,\lambda) = \sum_{K=0}^{n} |\varphi_K(\lambda)|^2$$

и $\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_K(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda = 1$

Поэтому из (14) имеем

$$ER_n = n - \frac{1}{2\pi}\iint_{-\pi}^{\pi} \frac{|G_n^1(\lambda,t)|^2}{f(t)} f(\lambda)\, d\lambda\, dt =$$

$$= n - \frac{n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{f(t)}\left(\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} |G_n^1(\lambda,t)|^2 f(\lambda)\, d\lambda\right) dt =$$

$$= n\left[1 - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sigma_n(f)}{f(t)}\, dt\right], \tag{17}$$

где

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} |G_n^1(\lambda,t)|^2 f(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2(\lambda-t)\, n/2}{\sin^2(\lambda-t)/2} f(\lambda)\, d\lambda$$

– чезаровская сумма ряда Фурье функции

Поэтому из (17) имеем

$$ER_n = n\left|\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)-\sigma_n(f)}{f(t)}\, dt\right| \leq$$

$$\leq n\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)-\sigma_n(f)|^2 dt\right)^{1/2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{f^2(t)}\right)^{1/2}. \tag{18}$$

В силу предложения 2 в условиях теоремы спектральная плотность $f(\lambda)$ удовлетворяет условию Хельсона – Сеге и поэтому, в силу предложения 3, для нее выполняется условие Макенхоупта A_p, при $p=2$. Отсюда согласно замечания 2.1 получаем

$$K = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{f^2(t)} < \infty$$

Далее $\sigma_n(f)$ можно представить в виде (см. [5], стр.109)

$\sigma_n(f)=\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)c_k e^{i\lambda k}$, где c_k – коэффициенты Фурье функции f. Поэтому из (18) имеем

$$|ER_n|\leq K_n\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-\sigma_n(f)|^2dt\right)^{1/2}=$$

$$=K_n\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}c_k e^{itk}-\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)c_k e^{itk}\right|^2dt\right)^{1/2}=$$

$$=K_n\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}c_k e^{itk}+\sum_{k=0}^{n}\frac{kc_k}{n}e^{itk}\right|^2dt\right)^{1/2}\leq$$

$$\leq 2K_n\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}c_k e^{itk}\right|^2+\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{kc_k}{n}e^{itk}\right|^2\right\}dt\right)^{1/2}\leq$$

$$\leq 2K_n\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}c_k e^{itk}\right|^2dt+\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{kc_k}{n}e^{itk}\right|^2dt\right)^{1/2}=$$

$$=2K_n\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}|c_k|^2+\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{kc_k}{n}\right|^2\right)^{1/2}\leq$$

$$\leq 2K_n\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}|c_k|^2+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}k|c_k|^2\right)^{1/2}=o(n^{1/2})$$

в силу (15) и того очевидного факта, что если $\sum_{k=n+1}^{\infty}|c_k|^2=o(n^{-1/2})$ то $\sum_{k=0}^{n}k|c_k|^2=o(n^{1/2})$ теорема 3 доказана.

§ 4. Асимптотическое поведение дисперсии $\mathcal{D}R_n$.

В силу представления (13) дисперсия случайной величины задается формулой

$$\mathcal{D}R_n=\iint_{-\pi}^{\pi}\left|G_n^f(\lambda,\mu)-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{G_n^1(\lambda,t)\,G_n^1(t,\mu)}{f(t)}dt\right|^2 f(\lambda)f(\mu)d\lambda d\mu \qquad (19)$$

ТЕОРЕМА 4. Если спектральная плотность $f(\lambda)$ гауссовского стационарного процесса x_t удовлетворяет следующим условиям:

1) $\ln f=u+\tilde{v}$

где u и v ограниченные функции и $\|v\|_\infty<\frac{\pi}{2}$

2) $$\sum_{j=n+1}^{\infty}|a_j|^2=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad (20)$$

где a_k – коэффициенты Фурье функции $\ln f$, то имеет место предельное соотношение

$$\mathcal{D}R_n = o(n^{1/2})$$

при $n \to \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что (I9) является нормой Гильберта - Шмидта в L^2_f оператора $\mathcal{A}_n$

$$[\mathcal{A}_n\varphi](\lambda)=\int_{-\pi}^{\pi}\left[G_n^f(\lambda,\mu)-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{G_n^1(\lambda,t)G_n^1(t,\mu)}{f(t)}dt\right]\varphi(\mu)f(\mu)d\mu \quad (2I)$$

Обозначим через P_n^f (соответственно P_n^1) - оператор ортогонального проектирования в L^2_f (соответственно в L^2) на подпространство $H_0^n(f)$ (соответственно на $H_0^n(1)$). Как легко видеть, оператор $\mathcal{A}_n$ на языке ортопроекторов P_n^f и P_n^1 задается формулой

$$\mathcal{A}_n = P_n^f - P_n^1\frac{1}{f}P_n^1 f \quad (22)$$

где через h обозначен оператор умножения на функцию $h(\lambda)$.

Введем в рассмотрении подпространства $H_1=\frac{1}{f}H_0^n$ и $H_2=(H_0^n)^{\perp}$ (ортогональное дополнение в L^2_f) пространства L^2_f. Покажем, что косинус минимального угла между подпространствами H_1 и H_2 отделен от I равномерно по n. Действительно, заметим, что (см. [2]), если $H_1\cap H_2=\{0\}$ и $H_1^{\perp}\cap H_2^{\perp}=\{0\}$, то

$$\rho(H_1,H_2)=\rho(H_1^{\perp},H_2^{\perp}).$$

Поэтому вместо H_1 и H_2 можно рассматривать их ортогональные дополнения $H_1^{\perp}=\left(\frac{1}{f}H_0^n\right)^{\perp}=H_{-\infty}^{-1}(f)+H_{n+1}^{\infty}(f)$ и $H_2^{\perp}=H_0^n$

Из определения минимального угла следует (см. [9]), что

$$2-2\rho=\inf\|\Psi_1+\Psi_2\|^2,$$

где $\inf$ берется по всем $\Psi_1\in H_1,\ \Psi_2\in H_2$ для которых $\|\Psi_1\|=\|\Psi_2\|=1$.

Следовательно условие $\rho<1$ эквивалентно такому

$$\inf_{\substack{\Psi_1\in H_1,\Psi_2\in H_2\\ \|\Psi_1\|=\|\Psi_2\|=1}}\|\Psi_1+\Psi_2\|^2>\varepsilon>0 \quad (23)$$

Далее, учитывая следующее очевидное неравенство

$$\sup_n\rho\left(H_{-\infty}^{-1}(f),H_{n+1}^{\infty}(f)\right)<\rho\left(H_{-\infty}^{-1}(f),H_0^{\infty}(f)\right)<1 \quad (24)$$

легко понять, что для $\varphi_1 \in H^{-1}_{-\infty}(f)$, $\varphi_2 \in H^{\infty}_{n+1}(f)$ и $\varphi_3 \in H^n_0$ справедливо неравенство

$$\|\varphi_1+\varphi_2\|^2+\|\varphi_3\|^2 \geqslant \lambda_1\left(\|\varphi_1\|^2+\|\varphi_2\|^2\right)+\|\varphi_3\|^2 \geqslant$$

(при некотором $\lambda_1 < 1$, не зависящим от n в силу (24))

$$\geqslant \lambda_1\left(\|\varphi_1\|^2+\|\varphi_2\|^2+\|\varphi_3\|^2\right) \geqslant \frac{\lambda_1}{2}\left(\|\varphi_1\|^2+\|\varphi_2+\varphi_3\|^2\right) \qquad (25)$$

Для завершения доказательства требуемого утверждения остается лишь заметить, что из (25) следует (23) при $\psi_1=\varphi_1+\varphi_2$ и $\psi_2=\varphi_3$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ (продолжение). В силу леммы 2.I существует константа C_1, не зависящая от n, такая, что

$$\|\mathcal{A}_n\|^2_2=\|P^f_n-P^1_n\frac{1}{f}P^1_n f\|^2_2 \leqslant$$

$$\leqslant C_1\left(\|(P^f_n-P^1_n\frac{1}{f}P^1_n f)P_1\|^2_2+\|(P^f_n-P^1_n\frac{1}{f}P^1_n f)P_2\|^2_2\right)=$$

где P_1 и P_2 ортопроекторы в L^2_f на H_1 и H_2 соответственно

$$=C_1\|P^f_n-P^1_n)P_1\|^2_2$$

так как на H_2 $\mathcal{A}_n P_2=0$, и $P^1_n\frac{1}{f}P^1_n f P_1=P^1_n P_1$

Следовательно,

$$\|\mathcal{A}_n\|^2_2 \leqslant C_1\|P^f_n-P^1_n\|^2_2 \qquad (26)$$

Еще раз применяя лемму 2.I на этот раз для оператора $P^f_n-P^1_n$ и для подпространств $H_1=(\frac{1}{f}H^n_0)^{\perp}$ и $\tilde{H}_2=H^n_0$, получаем

$$\|P^f_n-P^1_n\|^2_2 \leqslant \left(\|P^f_n-P^1_n)\tilde{P}_1\|^2_2+\|(P^f_n-P^1_n)\tilde{P}_2\|^2_2\right) \qquad (27)$$

где C_2 константа не зависящая от n, а $\tilde{P}_1$ и $\tilde{P}_2$ ортопроекторы соответственно на $\tilde{H}_1$ и $\tilde{H}_2$. Поскольку на подпространстве H_2 операторы P^f_n и P^1_n совпадают и $P^1_n\tilde{P}_1=0$, то из (27) имеем

$$\|P^f_n-P^1_n\|^2_2 \leqslant C_2\|P^f_n\tilde{P}_1\|^2_2 \qquad (28)$$

Следовательно из (26) и (28) получаем

$$\|\mathcal{A}_n\|^2_2 \leqslant C\|P^f_n\tilde{P}_1\|^2_2 \qquad (29)$$

где $C = e_1 e_2$. Для завершения доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма

ЛЕММА 4.I. Если весовая функция $f(\lambda)$ удовлетворяет следующим условиям

I) $\ln f = u + \tilde{v}$

где u и v ограниченные функции и $\|v\|_\infty < \frac{\pi}{2}$

2) $$\sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j|^2 = o(n^{1/2}) \tag{30}$$

где a_j – коэффициенты Фурье функции $\ln f$, то

$$\|P_n^f - \hat{P}_n\|_2^2 = o(n^{1/2}) \tag{31}$$

где $\hat{P}_n$ – ортопроектор в L_f^2 на подпространство $\frac{1}{g} H_0^n$ (g – это внешняя функция класса Харди (см. [3]) из представлений $f = |g|^2$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 2 работы [I2] из (30) следует, что

$$\sum_{k=0}^{n} \inf_{P_k} \left\| \frac{1}{g} - P_k \right\|_f^2 = o(n^{1/2}) \tag{32}$$

где $\inf$ берется по всем многочленам P_k , степени не выше k .

Введем в рассмотрении оператор Γ из пространства $\frac{1}{g} H_0^n$ в пространство $H_0^n(f)$, при котором

$$\Gamma : \varphi_k(\lambda) \overset{def}{=\!=} \frac{e^{i\lambda k}}{g(\lambda)} \longrightarrow \gamma_k(\lambda),$$

где $\gamma_k(\lambda)$ полином степени $\leq k$, при котором достигается $\inf$ в (32). Тогда (32), как легко понять, можно записать в виде

$$\|\Gamma - I\|_2^2 = o(n^{1/2}) \tag{33}$$

где I – единичный оператор в R^n .

Обозначим через $\psi_k(\lambda) \overset{def}{=\!=} (\Gamma\Gamma^*)^{1/2} \gamma_k$. Нетрудно видеть, что система $\{\psi_k\}_{k=\overline{0,n}}$ является ортонормированным базисом пространства $H_0^n(f)$. Покажем, что системы $\{\psi_k\}_{k=\overline{0,n}}$ и $\{\gamma_k\}_{k=\overline{0,n}}$ являются $o(n^{1/2})$ квадратично близкими, точнее

$$\sum_{k=0}^{n} \|\psi_k(\lambda) - \gamma_k(\lambda)\|_f^2 = o(n^{1/2}) \tag{34}$$

Действительно

$$\sum_{K=0}^{n}\|\Psi_K(\lambda)-\gamma_K(\lambda)\|_f^2=\|(\Gamma\Gamma^*)^{1/2}-I\|_2^2=$$
$$=\sum_{K=0}^{n}(|\lambda_K|-1)^2\leq\sum_{K=0}^{n}(\lambda_K-1)^2=\|\Gamma-I\|_2^2=o(n^{1/2})$$

в силу (33), где λ_K - собственные значения оператора Γ .

Далее рассмотрим

$$\|P_n^f-\hat{P}_n\|_2^2=\iint_{-\pi}^{\pi}\left|G_n^f(\lambda,\mu)-\frac{G_n^1(\lambda,\mu)}{g(\lambda)\overline{g(\mu)}}\right|^2 f(\lambda)f(\mu)\,d\lambda\,d\mu=$$
$$=\iint_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{K=0}^{n}\left[\Psi_K(\lambda)\overline{\Psi_K(\mu)}-\frac{e^{iK(\lambda-\mu)}}{g(\lambda)\overline{g(\mu)}}\right]\right|^2 f(\lambda)f(\mu)\,d\lambda\,d\mu\leq$$
$$\leq\sum_{K=0}^{n}\iint_{-\pi}^{\pi}\left|\Psi_K(\lambda)\right|^2\left|\overline{\Psi_K(\mu)}-\frac{e^{-i\mu K}}{\overline{g(\mu)}}\right|^2 f(\lambda)f(\mu)\,d\lambda\,d\mu+$$
$$+\sum_{K=0}^{n}\iint_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{e^{-i\mu K}}{\overline{g(\mu)}}\right|^2\left|\Psi_K(\lambda)-\frac{e^{i\lambda K}}{g(\lambda)}\right|^2 f(\lambda)f(\mu)\,d\lambda\,d\mu\leq$$
$$\leq 2\sum_{K=0}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\Psi_K(\lambda)-\frac{e^{i\lambda K}}{g(\lambda)}\right|^2 f(\lambda)\,d\lambda\leq$$
$$\leq 2\sum_{K=0}^{n}\|\Psi_K(\lambda)-\gamma_K(\lambda)\|_f^2+2\sum_{K=0}^{n}\left\|\gamma_K(\lambda)-\frac{e^{i\lambda K}}{g(\lambda)}\right\|_f^2=$$
$$=2(\|\Gamma\ \Gamma)^{1/2}-I\|_2^2+\|\Gamma-I\|_2^2)=o(n^{1/2})$$

в силу (33) и (34).

Лемма 4.I доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ (окончание). Поскольку

$$\tilde{H}_1=\left(\frac{1}{f}H_0^n\right)^{\perp}=\overline{H_{-\infty}^{-1}(f)+H_{n+1}^{\infty}(f)}\text{ и}$$

$$\sup_n\rho\left(H_{-\infty}^{-1}(f),H_{n+1}^{\infty}(f)\right)<\rho\left(H_{-\infty}^{-1}(f),H_0^{\infty}(f)\right)<1$$

то в силу леммы 2.I существует константа C_3 , такая, что равномерно по n

$$\|P_n^f\tilde{P}_1\|_2^2\leq C_3\left(\|P_n^f Q\|_2^2+\|P_n^f Q_2\|_2^2\right),\qquad(35)$$

где Q_1 и Q_2 ортопроекторы в L_f^2 соответственно на подпространстве $H_{-\infty}^{-1}(f)$ и $H_{n+1}^{\infty}(f)$.

Далее, поскольку подпространства $\frac{1}{g}H_0^n$ и $H_{n+1}^{\infty}(f)$ ортогональны (соответственно ортогональны $\frac{1}{g}H_{-n}^0$ и $H_{-\infty}^{-1}(f)$),

то $Q_2\hat{P}_n=0$, поэтому

$$\|P_n^f Q_2\|_2^2=\|P_n^f Q_2-\hat{P}_n Q_2\|_2^2\leq\|P_n^f-\hat{P}_n\|_2^2=o(n^{1/2}) \tag{36}$$

в силу леммы 4.I. Аналогичными рассуждениями нетрудно убедиться, что

$$\|P_n^f-\bar{\hat{P}}_n\|_2^2=o(n^{1/2}) \tag{37}$$

где $\bar{\hat{P}}_n$ – ортопроектор в L_f^2 на подпространство $\frac{1}{g}H_{-n}^0$.

Из формул (29) и (35)-(37) заключаем, что

$$\|\mathcal{A}_n\|_2^2=o(n^{1/2})$$

Теорема полностью доказана, так как $\|\mathcal{A}_n\|_2^2=\mathcal{D}R_n$

§ 5. Доказательство теорем I и 2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. В силу формул (3) и (5) имеем

$$\mathcal{L}_n-\tilde{\mathcal{L}}_n=-\frac{1}{2}\Big\{\Big[\ln\det B_f^{(n)}-\frac{n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln f(\lambda)\,d\lambda\Big]+$$
$$+\Big[X'\big[B_f^{(n)}\big]^{-1}X-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{I_n(\lambda)}{f(\lambda)}\,d\lambda\Big]\Big\} \tag{38}$$

В силу теоремы I работы в условиях теоремы

$$n^{-1/2}\Big|\ln\det B_f^{(n)}-\frac{n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln f(\lambda)\,d\lambda\Big|\longrightarrow 0 \tag{39}$$

при $n\to\infty$

Далее в силу формулы (7) и очевидного равенства

$$I_n(t)\overset{def}{=\!=}\frac{1}{2\pi n}\Big|\sum_{j=1}^{n}x_j e^{itj}\Big|^2=\iint_{-\pi}^{\pi}G_n^{\parallel}(\lambda,t)G_n^{\parallel}(t,\mu)Z(d\lambda)\overline{Z(d\mu)}$$

легко понять, что второй член в (38) совпадает со случайной величиной R_n , введенный нами формулой (I3). Поэтому в силу теорем 3, 4 и неравенства Чебышева получаем

$$n^{-1/2}\Big[X'\big[B_f^{(n)}\big]^{-1}X-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{I_n(\lambda)}{f(\lambda)}\,d\lambda\Big]\longrightarrow 0 \tag{40}$$

при $n\to\infty$ (в смысле сходимости по вероятности).

Из (39) и (40) следует, что $n^{-1/2}(\mathcal{L}_n-\tilde{\mathcal{L}}_n)\to 0$ по вероятности при $n\to\infty$.

Теорема I доказана..

Теорема 2 доказывается аналогичными рассуждениями.

Автор весьма признателен В.Н.Солеву за постановку задачи и постоянную помощь в работе.

Литература

1. Гренандер У. и Сеге Г. Теплицевы формы и их приложения, М., 1961.
2. Гохберг И.Ц. и Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, М., Наука, 1965.
3. Ибрагимов И.А. и Розанов Ю.А. Гауссовские случайные процессы, М., Наука, 1970.
4. Хеннан Э. Многомерные временные ряды, М., Мир, 1974.
5. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации, М., Наука, 1965.
6. Джапаридзе К.О. Оценивание параметров спектральной плотности, имеющей фиксированные нули. - Теория вероятностей и ее применения, 1977, т.22, № 4, с.729-748.
7. Джапаридзе К.О. Асимптотически эффективные оценивания параметров спектра гауссовского временного ряда, Тбилиси, Изд-во Тбилисского университета, 1977.
8. Hunt R., Muckenhopt B. and Wheader R., Weighted norm inequalities for the conjugate funetion and Hilbert transform, - Trans, Amer. Math. Soc. 1973, vol.176, p.227-253.
9. Helson H. and Szego G., A problem in prediction theory, Ann. Mat. Puca ed appl., 1960, vol.51, p.108-138.
10. Grenander U.and Rosenblatt M., Statistical analysis of stationary time serics, Uppsala, 1956.
11. Аронштайн Н., Теория воспроизводящих ядер, Сб. переводов "Математика", 1963, 7, 2, с.67-130.
12. Гиновян М.С., Асимптотическое поведение теплицева определителя. Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1980, т.97, с.22-31.