А. А. Килбас, С. А. Марзан, Нелинейные дифференциальные уравнения с дробной производной Капуто в пространстве непрерывно дифференцируемых функций,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 1, 82–86

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 1, с. 82–86

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.21+517.518.82

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

© 2005 г. **А. А. Килбас, С. А. Марзан**

Пусть $I^\alpha_{a+}g$ и $D^\alpha_{a+}y$ – дробные интегралы и производные Римана–Лиувилля комплексного порядка $\alpha \in C$ $(\mathrm{Re}(\alpha) > 0)$ на конечном отрезке $[a,b]$ действительной оси:

$$(I^\alpha_{a+}g)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x \frac{g(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad \alpha \in C, \quad \mathrm{Re}(\alpha) > 0,$$

$$(D^\alpha_{a+}y)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_a^x \frac{y(t)\,dt}{(x-t)^{1-n+\alpha}}, \quad n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1 \tag{1}$$

($[\mathrm{Re}(\alpha)]$ – целая часть $\mathrm{Re}(\alpha)$) [1, § 2.2, 2.4].

Вопросы существования и единственности решений краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка с дробной производной (1) изучались многими авторами (см. исторические сведения и обзор методов и результатов в книге [1, § 42–43] и обзорной статье [2]). Интерес к исследованию таких задач вызван их приложениями в задачах физики, механики, химии и др. (см. [3, 4]).

В работах [3–9] рассматривались вопросы существования и единственности решения $y(x)$ нелинейного дифференциального уравнения порядка $\alpha \in C$ $(\mathrm{Re}(\alpha) > 0)$.

Обозначим через $C^n[a,b]$ класс функций, n раз непрерывно дифференцируемых на конечном отрезке $[a,b]$ действительной оси, с нормой $\|f\|_{C^n} = \max\limits_{x\in[a,b]} \sum_{k=0}^n |f^{(k)}|$, $n = 0,1,2,\ldots$, $\|f\|_{C^0} \equiv \|f\|_C$.

Настоящая работа посвящена исследованию проблемы существования и единственности решения в пространстве $C^{n-1}[a,b]$ задачи типа Коши для нелинейного дифференциального уравнения

$$({}^cD^\alpha_{a+}y)(x) = f[x, y(x)] \tag{2}$$

с начальными условиями

$$y^{(k)}(a) = b_k, \quad b_k \in C \quad (k = \overline{0, n-1}) \tag{3}$$

с дробной производной Капуто комплексного порядка $\alpha \in C$ $(\mathrm{Re}(\alpha) > 0)$ на конечном отрезке $[a,b]$ действительной оси

$$({}^cD^\alpha_{a+}y)(x) = \left(D^\alpha_{a+}\left[y(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^k}{k!}y^{(k)}(a)\right]\right)(x). \tag{4}$$

Можно показать, что если $y(x) \in C^n[a,b]$, то

$$({}^cD^\alpha_{a+}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_a^x \frac{y^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\,dt \equiv (I^{n-\alpha}_{a+}y^{(n)})(x).$$

Сначала мы покажем равносильность задачи (2), (3) и интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y(t)]}{(x-t)^{1-\alpha}}\, dt. \tag{5}$$

Пусть всюду в дальнейшем Y – конечный или бесконечный интервал действительной оси R.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha \in C$ $(\mathrm{Re}(\alpha) > 0)$, $\alpha \notin N$, $n = -[-\mathrm{Re}(\alpha)]$, *функция* $f[x, y]$ *действует из* $[a, b] \times Y$ *в* R, $Y \subset R$, *непрерывна относительно переменной* x *на* $[a, b]$ *и*

$$\max_{(x,y)\in[a,b]\times\overline{Y}} |f[x, y]| = M < \infty. \tag{6}$$

Функция $y(x) \in C^{n-1}[a, b]$ *является решением задачи типа Коши (2), (3) тогда и только тогда, когда она является решением интегрального уравнения (5).*

Доказательство. Пусть функция $y(x) \in C^{n-1}[a, b]$ – решение задачи типа Коши (2), (3). Согласно (1) и (4),

$$({}^cD^{\alpha}_{a+}y)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I^{n-\alpha}_{a+}\left[y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} y^{(k)}(a)\right]\right)(x), \quad n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1.$$

Так как справедливо условие (6), то из равенства (2) следует, что $({}^cD^{\alpha}_{a+}y)(x) \in C[a, b]$, и тогда, согласно лемме 1 из работы [7],

$$\left(I^{n-\alpha}_{a+}\left[y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} y^{(k)}(a)\right]\right)(x) \in C^n[a, b].$$

Это позволяет воспользоваться леммой 5 из [7] с $\gamma = 0$. Применяя оператор I^{α}_{a+} к обеим частям уравнения (2), получаем

$$\left(I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}\left[y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} y^{(k)}(a)\right]\right)(x) =$$

$$= y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} y^{(k)}(a) - \sum_{j=1}^{n} \frac{F^{(n-j)}_{n-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha - j + 1)}(x-a)^{\alpha-j}, \tag{7}$$

$$F_{n-\alpha}(x) = \left(I^{n-\alpha}_{a+}\left[y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} y^{(k)}(a)\right]\right)(x). \tag{8}$$

В частности, при $0 < \mathrm{Re}(\alpha) < 1$

$$(I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}[y(x) - y(a)]) = y(x) - y(a) - [F_{1-\alpha}(a)/\Gamma(\alpha)](x-a)^{\alpha-1}.$$

Покажем, что в этом случае $F_{1-\alpha}(a) = 0$. Имеем

$$F_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{y(t) - y(a)}{(x-t)^{\alpha}}\, dt. \tag{9}$$

Выполнив в интеграле равенства (9) замену переменной $t = a + (x-a)s$, получим

$$F_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \frac{y(a + (x-a)s) - y(a)}{((1-s)(x-a))^{\alpha}}(x-a)\, ds =$$

$$= \frac{(x-a)^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^1 \frac{y(a+(x-a)s)-y(a)}{(1-s)^\alpha}\,ds. \tag{10}$$

Из равенства (10) следует, что $F_{1-\alpha}(a)=0$.

Пусть теперь $\mathrm{Re}(\alpha)\geq 1$, т.е. $n\geq 2$. Так как $y(x)\in C^{n-1}[a,b]$, то, согласно лемме 1 из [7],

$$y(x) = \frac{1}{(n-2)!}\int\limits_a^x (x-t)^{n-2} y^{(n-1)}\,dt + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{y^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{11}$$

Учитывая (11) и лемму 3 из [7], представим равенство (8) в виде

$$F_{n-\alpha}(x) = \left(I_{a+}^{n-\alpha}\left[(I_{a+}^{n-1}y^{(n-1)})(x) - \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}y^{(n-1)}(a)\right]\right)(x) =$$

$$= (I_{a+}^{n-\alpha}I_{a+}^{n-1}[y^{(n-1)}-y^{(n-1)}(a)])(x) = (I_{a+}^{2n-\alpha-1}[y^{(n-1)}-y^{(n-1)}(a)])(x).$$

Используя лемму 4 из [7], получаем

$$F_{n-\alpha}^{(n-j)}(x) = (D_{a+}^{n-j}I_{a+}^{2n-\alpha-1}[y^{(n-1)}-y^{(n-1)}(a)])(x) = (I_{a+}^{n+j-\alpha-1}[y^{(n-1)}-y^{(n-1)}(a)])(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n+j-\alpha-1)}\int\limits_a^x \frac{y^{(n-1)}-y^{(n-1)}(a)}{(x-t)^{2-n-j+\alpha}}\,dt. \tag{12}$$

Выполнив в последнем интеграле замену переменной $t=a+(x-a)s$, равенство (12) запишем в виде

$$F_{n-\alpha}^{(n-j)}(x) = \frac{(x-a)^{n+j-\alpha-1}}{\Gamma(n+j-\alpha-1)}\int\limits_0^1 \frac{y^{(n-1)}(a+(x-a)s)-y^{(n-1)}(a)}{(1-s)^{2-n-j+\alpha}}\,ds, \quad j=\overline{1,n}. \tag{13}$$

Из равенства (13) следует, что $F_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)=0$ $(j=\overline{1,n})$.

Таким образом, учитывая равенства (3), (6), а также лемму 2 из [7], приходим к интегральному уравнению (5).

Пусть теперь $y(x)\in C^{n-1}[a,b]$ – решение интегрального уравнения (5). Применяя оператор D_{a+}^α к обеим частям уравнения (5), учитывая лемму 3 из [7] и равенство (4), приходим к уравнению (2).

Покажем, что $y(x)$ удовлетворяет начальным условиям (3). Дифференцируя j $(j=\overline{0,n-1})$ раз обе части уравнения (5) с использованием леммы 4 из [7], получаем

$$y^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{n-1}\frac{b_k}{(k-j)!}(x-a)^{k-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha-j)}\int\limits_a^x \frac{f[t,y(t)]\,dt}{(x-t)^{1-\alpha+j}} \quad (j=\overline{0,n-1}). \tag{14}$$

С помощью замены переменной $t=a+(x-a)s$ в последнем интеграле равенство (14) приведем к виду

$$y^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{n-1}\frac{b_k}{(k-j)!}(x-a)^{k-j} + \frac{(x-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j)}\int\limits_0^1 \frac{f[a+(x-a)s,y(a+(x-a)s)]\,ds}{(1-s)^{1-\alpha+j}} \quad (j=\overline{0,n-1}). \tag{15}$$

Учитывая (6) и равенство (15), приходим к равенствам (3). Это и завершает доказательство теоремы.

Следствие 1. *Пусть* $n \in N$, $y(x) \in C^n[a,b]$, *функция* $f[x,y]$ *удовлетворяет условиям теоремы 1, функция* $y(x) \in C^n[a,b]$ *является решением задачи Коши для уравнения*

$$y^{(n)}(x) = f[x, y(x)] \tag{16}$$

с начальными условиями (3) тогда и только тогда, когда она является решением интегрального уравнения

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^x \frac{f[t,y(t)]}{(x-t)^{1-n}}dt. \tag{17}$$

Для установления условий существования и единственности решения задачи типа Коши (2), (3) в классе $C^{n-1}[a,b]$ к условиям теоремы 1 добавим дополнительное условие, а именно липшицевость $f[x,y]$ относительно второй переменной:

$$|f[x,y_1] - f[x,y_2]| \le L|y_1 - y_2| \quad (L > 0 \quad \forall\, y_1, y_2 \in Y). \tag{18}$$

Теорема 2. *Пусть* $\alpha \in C$, $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, $\alpha \notin N$, $n = -[-\operatorname{Re}(\alpha)]$, *функция* $f[x,y]$ *действует из* $[a,b]\times Y$, $Y \subset R$ *в* R, *непрерывна относительно переменной* x *и выполняются условия (6) и (18). Тогда существует единственное решение* $y(x)$ *задачи типа Коши (2), (3) в пространстве* $C^{n-1}[a,b]$ $(n \in N)$.

Доказательство. Согласно теореме 1, достаточно доказать существование единственного решения $y(x)$ интегрального уравнения (5). Воспользуемся специальным видом уравнения (5). Оно имеет смысл на любом отрезке $[a, x_1] \subset [a,b]$. Выберем x_1 так, чтобы выполнялось неравенство

$$L\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_1-a)^{\operatorname{Re}(\alpha-k)}}{|\Gamma(\alpha-k)|\operatorname{Re}(\alpha-k)} < 1, \tag{19}$$

и докажем существование единственного решения интегрального уравнения (5) на отрезке $[a, x_1]$.

Для доказательства применим теорему Банаха о неподвижной точке [10, с. 74]. Обозначим через T интегральный оператор в правой части уравнения (5), т.е.

$$(Ty)(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{j!}(x-a)^j + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x \frac{f[t,y(t)]}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt \quad (\operatorname{Re}(\alpha) > 0, \quad \alpha \notin N), \tag{20}$$

и покажем, что он отображает пространство $C^{n-1}[a,x_1]$ в себя. Если $y(x) \in C^{n-1}[a,b]$, то достаточно показать, что функция

$$z(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{j!}(x-a)^j + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x \frac{f[t,y(t)]}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt \quad (\operatorname{Re}(\alpha) > 0, \quad \alpha \notin N)$$

принадлежит пространству $C^{n-1}[a,b]$. Используя лемму 4 из [7], получаем

$$z^{(k)}(x) = \sum_{j=k}^{n-1} \frac{b_j}{(j-k)!}(x-a)^{j-k} + (I_{a+}^{\alpha-k} f[t,y(t)])(x) \quad (k = \overline{0, n-1}).$$

А тогда, согласно условию (6) и лемме 2 из [7], $z(x) \in C^{n-1}[a,x_1]$.

Теперь, используя лемму 2 из [7] и условие (18), для любых $y_1(x), y_2(x) \in C^{n-1}[a,x_1]$ получаем

$$\|(Ty_1)(x) - (Ty_2)(x)\|_{C^{n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \|I_{a+}^{\alpha-k}(f[t,y_1(t)] - f[t,y_2(t)])\|_C \le$$

$$\leq L\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x_1-a)^{\mathrm{Re}(\alpha-k)}}{|\Gamma(\alpha-k)|\,\mathrm{Re}(\alpha-k)}\|y_1(x)-y_2(x)\|_C \leq L\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x_1-a)^{\mathrm{Re}(\alpha-k)}}{|\Gamma(\alpha-k)|\,\mathrm{Re}(\alpha-k)}\|y_1(x)-y_2(x)\|_{C^{n-1}}.$$

Из условия (19), согласно теореме Банаха о неподвижной точке [10, с. 74], вытекает существование и притом единственной функции $y^*(x)\in C^{n-1}[a,x_1]$ такой, что $(Ty^*)(x)=y^*(x)$, т.е. существует единственное решение интегрального уравнения (5) на отрезке $[a,x_1]$.

Рассмотрим далее отрезок $[x_1,x_2]$, где $x_2=x_1+h$, $h>0$, $x_2<b$. Уравнение (5) перепишем в виде

$$y(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x_1}^{x}\frac{f[t,y(t)]}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b_k}{k!}(x-a)^k+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{x_1}\frac{f[t,y(t)]}{(x-t)^{1-\alpha}}dt,\quad x\in[x_1,x_2]. \tag{21}$$

Так как на отрезке $[a,x_1]$ функция $y(x)$ однозначно определена, последний интеграл можно считать известной функцией и уравнение (21) перепишем в виде

$$y(x)=y_1(x)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x_1}^{x}\frac{f[t,y(t)]}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt,$$

где

$$y_1(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b_k}{k!}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{x_1}\frac{f[t,y(t)]}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt$$

есть известная функция. Повторяя те же рассуждения на отрезке $[x_1,x_2]$, получаем единственное решение на этом отрезке. Затем берем следующий отрезок и т.д., пока не получим единственное решение на всем отрезке $[a,b]$.

Таким образом, существует единственное решение $y(x)$ уравнения (5), а значит, и задачи типа Коши (2), (3), что и доказывает теорему.

Следствие 2. *Пусть $n\in N$, $f[x,y]$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда существует единственное решение $y(x)$ задачи Коши (16), (3) в пространстве $C^n[a,b]$.*

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф03МС-008).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.
2. *Kilbas A.A., Trujillo J.J.* // Applicable Analysis. 2001. V. 78. № 1–2. P. 153–192.
3. *Pitcher E., Sewell W.E.* // Bull. Amer. Math. Soc. 1938. V. 44. № 2. P. 100–107; Errata // Ibid. № 12. P. 888.
4. *Al-Bassam M.A.* // J. Reine and Angew. Math. 1965. Bd 218. P. 70–78.
5. *Лесковский И.П.* // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 1. С. 170–173.
6. *Семенчук Н.П.* // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 10. С. 1831–1833.
7. *Килбас А.А., Бонилла Б., Трухилло Х.* // Докл. АН Беларуси. 2000. Т. 44. № 6. С. 18–22.
8. *Kilbas A.A., Bonilla B., Trujillo J.J.* // Demonstratio Math. 2000. V. 33. № 3. P. 583–602.
9. *Килбас А.А., Марзан С.А.* // Докл. НАН Беларуси. 2003. Т. 47. № 1. С. 29–35.
10. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1981.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию
07.07.2003 г.