Yu. G. Smirnov, E. Yu. Smol'kin, M. O. Snegur, On spectrum's discrete nature in the problem of azimuthal symmetrical waves of an open nonhomogeneous anisotropic waveguide with longitudinal magnetization, *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*, 2017, Issue 3, 50–64

DOI: 10.21685/2072-3040-2017-3-5

УДК 517.958;621.372.8
DOI 10.21685/2072-3040-2017-3-5

Ю. Г. Смирнов, Е. Ю. Смолькин, М. О. Снегур

О ДИСКРЕТНОСТИ СПЕКТРА В ЗАДАЧЕ ОБ АЗИМУТАЛЬНЫХ СИММЕТРИЧНЫХ ВОЛНАХ ОТКРЫТОГО НЕОДНОРОДНОГО АНИЗОТРОПНОГО ВОЛНОВОДА С ПРОДОЛЬНЫМ НАМАГНИЧИВАНИЕМ[1]

Аннотация.

Актуальность и цели. Цель работы – исследование спектра задачи о распространяющихся электромагнитных волнах анизотропной магнитной неоднородной волноведущей структуры.

Материалы и методы. Для определения решения использована вариационная формулировка задачи. Вариационная задача сводится к изучению оператор-функции, нелинейно зависящей от спектрального параметра. Исследуются свойства оператор-функции, необходимые для анализа ее спектральных свойств.

Результаты. Доказаны теоремы о дискретности спектра и о распределении характеристических чисел оператор-функции на комплексной плоскости.

Выводы. Предложенный аналитический метод позволяет доказать дискретность спектра в задаче об азимутальных симметричных волнах открытого неоднородного анизотропного волновода с продольным намагничиванием. Кроме того, данный метод может быть использован для исследования спектральных свойств более сложных волноведущих структур.

Ключевые слова: задача распространения электромагнитных волн, ферритовый стержень, уравнение Максвелла, дифференциальные уравнения, анизотропная магнитная неоднородная волноведущая структура, вариационная формулировка, пространства Соболева.

Yu. G. Smirnov, E. Yu. Smol'kin, M. O. Snegur

ON SPECTRUM'S DISCRETE NATURE IN THE PROBLEM OF AZIMUTHAL SYMMETRICAL WAVES OF AN OPEN NONHOMOGENEOUS ANISOTROPIC WAVEGUIDE WITH LONGITUDINAL MAGNETIZATION

Abstract.

Background. The aim of the work is to research a spectrum of the problem of propogating electromagnetic waves of an anisotrpopic magnetic nonhomogeneous waveguiding structure.

Materials and methods. To find a solution we use variational problem formulation. The variational problem is reduced to studying of an operator-function that falls into nonlinear dependency from the spectral parameter. The article investigates properties of the operator-function necessary to analyze its spectral features.

Results. We have proved theorems on the spectrum's discerete nature and on distribution of operator-function's eigenvalues on a complex plance.

[1] Работа написана при поддержке гранта Министерства образования и науки РФ (госзадание № 1.894.2017/4.6).

Conclusions. The suggested analytical method allows to prove the spectrum's discrete nature in the problem of azimuthal symmetrical waves of an open nonhomogeneous anisotropic waveguide with longitudinal magnetization. Besides, the given method may be used in research of spectral properties of more complicated waveguiding structures.

Key words: problem of electromagnetic eave propagation, ferrite bar, Maxwell's equation, differential equations, anisotropic nonhomogeneous waveguiding-structure, variational formulation, Sobolev's spaces.

Введение

Важный класс существенно векторных электродинамических задач – это задачи о распространении волн в сложных волноведущих структурах. При исследовании процессов распространения волн в волноведущих структурах с неоднородным заполнением возникают краевые задачи на собственные значения для систем уравнений Гельмгольца с разрывными коэффициентами. При этом на линиях (поверхностях) разрыва коэффициентов ставятся дополнительные условия, называемые условиями сопряжения. В простейших задачах спектральный параметр присутствует лишь в уравнениях, в результате возникает задача на собственные значения для некоторого самосопряженного оператора. Однако при анализе достаточно сложных моделей спектральный параметр уже входит не только в уравнения, но и в условия сопряжения, причем нелинейным образом. Задача становится несамосопряженной [1].

Для исследования спектральных свойств таких задач оказывается естественным и эффективным метод операторных пучков. После того как исходная краевая задача сведена к изучению некоторого операторного пучка, можно использовать аппарат функционального анализа для исследования его спектральных свойств [2, 3].

Электрические параметры ε и μ обычных диэлектрических и магнитных сред определяются их физической структурой. Однако нередко требуются среды с необычными свойствами, которые можно получить, используя либо однородные по составу среды, либо частично заполненные. Частично заполненная среда отличается от однородный тем, что связующее вещество белее или менее непрерывно, тогда как заполняющее вещество или наполнитель имеет вид малых сфер, пластинок, нитей и др. Объемные параметры такой композиционной среды зависят от взаимного положения частиц и могут оказаться анизотропными. Очевидно, что эти параметры не являются простыми функциями параметров связующего вещества и наполнителя, а определяются таким же размером, формой и взаимным положением частиц наполнителя.

В отличие от предыдущих работ, в статье рассматривается случай неограниченной внешней области. Задача сводится к исследованию оператор-функции. Доказывается дискретность спектра задачи о нормальных волнах неоднородной волноведущей структуры.

1. Постановка задачи

Рассмотрим трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$ с цилиндрической системой координат $O\rho\varphi z$. Пространство заполнено изотропной средой без источников с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_0 \equiv \text{const}$ и магнитной проницаемостью $\mu_0 \equiv \text{const}$, где ε_0, μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума. В $\mathbb{R}^3$ помещен цилиндрический магнитно-диэлектрический волновод

$$\Sigma := \{(\rho, \varphi, z) : h_1 \le \rho \le h_2, 0 \le \varphi < 2\pi\}$$

с образующей, параллельной оси Oz и круговым поперечным сечением. На рис. 1 представлена геометрия задачи. Волновод неограниченно продолжается в направлении z. Сечение волновода, перпендикулярное его оси, представляет собой кольцо с внутренним радиусом r_0 и внешним радиусом r соответственно. Границы r_0 – проекция поверхности идеально проводящего, бесконечно тонкого экрана, r – проекция поверхности соприкосновения диэлектриков.

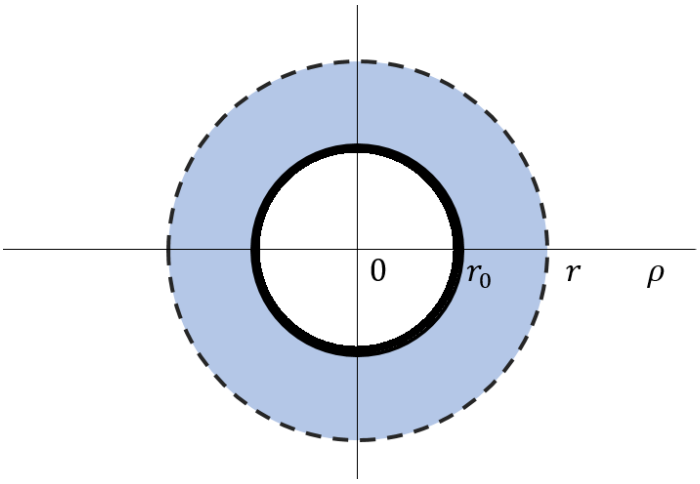


Рис. 1. Геометрия задачи

Волновод заполнен неоднородным анизотропным магнетиком (ферритом) с магнитной проницаемостью

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_\rho & -i\mu_\varphi & 0 \\ i\mu_\varphi & \mu_\rho & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z(\rho) \end{bmatrix} \tag{1}$$

и относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon > \varepsilon_0$. Предполагаем также, что константы такие, что $\mu_\rho \ge \mu_0, \mu_\varphi \ge \mu_0$; функция $\mu_z(\rho) \ge \mu_0$ дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке $[r_0, r]$. Кроме того, предполагаем, что $\operatorname{Im}\mu = 0$.

Задача о нормальных волнах волноведущей структуры состоит в отыскании нетривиальных решений однородной системы уравнений Максвелла в виде бегущей волны [4], т.е. с зависимостью $e^{i\gamma z}$ от координаты z, вдоль которых структура регулярна:

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}, \\ \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \end{cases} \tag{2}$$

$$\mathbf{E} = (E_\rho(\rho)\mathbf{e}_\rho + E_\varphi(\rho)\mathbf{e}_\varphi + E_z(\rho)\mathbf{e}_z)e^{i\gamma z},$$

$$\mathbf{H} = (H_\rho(\rho)\mathbf{e}_\rho + H_\varphi(\rho)\mathbf{e}_\varphi + H_z(\rho)\mathbf{e}_z)e^{i\gamma z}, \tag{3}$$

причем должны быть удовлетворены следующие условия: ограниченность энергии поля в любом конечном объеме волновода, обращение в нуль на поверхности идеального проводника касательных составляющих электрического поля:

$$E_\varphi\big|_{\rho=r_0} = 0, \;\; E_z\big|_{\rho=r_0} = 0, \tag{4}$$

непрерывность касательных составляющих полей на границе раздела сред:

$$\left[E_\varphi\right]\Big|_{\rho=r} = 0, \;\; \left[E_z\right]\Big|_{\rho=r} = 0,$$

$$\left[H_\varphi\right]\Big|_{\rho=r} = 0, \;\; \left[H_z\right]\Big|_{\rho=r} = 0, \tag{5}$$

и условие излучения на бесконечности: электромагнитное поле экспоненциально затухает при $\rho \to \infty$ в области $\rho > r$.

Задача о нормальных волнах является задачей на собственные значения для системы уравнений Максвелла относительно спектрального параметра γ – нормированной постоянной распространения (затухания) волноведущей структуры.

Запишем систему уравнений Максвелла (1) в координатном виде:

$$\begin{cases} i\gamma H_\varphi = i\omega\varepsilon E_\rho, \\ i\gamma H_\rho - H_z' = -i\omega\varepsilon E_\varphi, \\ \dfrac{1}{\rho}\left(\rho H_\varphi\right)' = -i\omega\varepsilon E_z, \\ i\gamma E_\varphi = -i\omega\mu_\rho H_\rho - \omega\mu_\varphi H_\varphi, \\ i\gamma E_\rho - E_z' = -\omega\mu_\varphi H_\rho + i\omega\mu_\rho H_\varphi, \\ \dfrac{1}{\rho}\left(\rho E_\varphi\right)' = -i\omega\mu_z H_z, \end{cases} \tag{6}$$

и выразим функции E_ρ, H_ρ, E_z, H_z через E_φ и H_φ из 1, 3, 4 и 6-го уравнений последней системы (6) получаем

$$H_\rho = \frac{-\gamma E_\varphi + \omega\mu_\varphi i H_\varphi}{\omega\mu_\rho}, E_\rho = \frac{\gamma H_\varphi}{\omega\varepsilon},$$

$$H_z = -\frac{(\rho i E_\varphi)'}{\omega\mu_z\rho}, E_z = \frac{(\rho i H_\varphi)'}{\omega\varepsilon\rho}. \tag{7}$$

Из последних формул следует, что поле нормальной волны в волноводе может быть представлено при помощи двух скалярных функций:

$$u_e := i\rho E_\varphi(\rho),\ u_m := \rho H_\varphi(\rho)\,. \tag{8}$$

Тем самым задача сводится к нахождению функций u_e и u_m – компонент электрического и магнитного полей. Всюду $(\cdot)'$ обозначает дифференцирование по ρ.

Для компонент поля u_e и u_m имеем следующую задачу (задача P_0) на собственные значения: найти такие $\gamma \in \mathbb{C}$, при которых существуют нетривиальные решения следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \rho\mu_\rho \left(\dfrac{u_e'}{\mu_z \rho}\right)' + \left(\omega^2 \varepsilon\mu_\rho - \gamma^2\right) u_e = \gamma\omega\mu_\varphi u_m, \\ \rho\mu_\rho \left(\dfrac{u_m'}{\rho}\right)' + \left(\omega^2 \varepsilon\left(\mu_\rho^2 - \mu_\varphi^2\right) - \gamma^2\mu_\rho\right) u_m = \gamma\omega\varepsilon\mu_\varphi u_e, \end{cases} \tag{9}$$

удовлетворяющие условиям сопряжения на границе r_0 и r:

$$\begin{gathered} u_e(r_0) = 0,\ u_m'(r_0) = 0, \\ [u_e]\big|_r = 0,\ [u_m]\big|_r = 0, \\ \frac{u_e'(r-0)}{\mu_z(r-0)} - \frac{u_e'(r+0)}{\mu_0} = 0\,,\ \frac{u_m'(r-0)}{\varepsilon} - \frac{u_m'(r+0)}{\varepsilon_0} = 0\,, \end{gathered} \tag{10}$$

и условиям ограниченности поля во всякой конечной области и убывания на бесконечности.

Зная компоненты поля u_e и u_m как решение задачи P_0, можно определить оставшиеся компоненты по формулам (7). Определенное так поле $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ удовлетворяет всем условиям (2)–(5).

2. Дифференциальные уравнения

Вне волновода $(\rho > r)$ диэлектрическая и магнитная проницаемости имеют вид ε_0 и μ_0 соответственно, тогда из (2) получаем следующие уравнения:

$$\left(\frac{u_e'}{\rho}\right)' - \frac{k_1^2 u_e}{\rho} = 0,$$

$$\left(\frac{u_m'}{\rho}\right)' - \frac{k_1^2 u_m}{\rho} = 0,$$

где $k_1^2 = \gamma^2 - k_0^2$, $k_0^2 = \omega\mu_0\varepsilon_0$. Принимая во внимание условие на бесконечности, получаем решение последней системы в виде

$$\begin{cases} u_e(\rho;\gamma) = \tilde{C}_1 \rho K_1(k_1\rho), \\ u_m(\rho;\gamma) = \tilde{C}_2 \rho K_1(k_1\rho), \end{cases} \tag{11}$$

где функция K_1 – модифицированная функция Бесселя (функция Макдональда) [5], $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ постоянные.

Предполагаем, что константы $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ такие, что

$$\tilde{C}_1^2 + \tilde{C}_2^2 \neq 0,$$

т.е. поле вне волновода не равно тождественно нулю.

Замечание 1. В силу условия на бесконечность выбираем следующую ветвь корня:

$$k_1 = \sqrt{\gamma^2 - k_0^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left|\gamma^2 - k_0^2\right| + \operatorname{Re}(\gamma^2 - k_0^2)} +$$

$$+ i \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sign} \operatorname{Im}(\gamma^2 - k_0^2) \sqrt{\left|\gamma^2 - k_0^2\right| - \operatorname{Re}(\gamma^2 - k_0^2)}.$$

Функция $k_1(\gamma)$ является аналитической в области

$$\Gamma := \mathbb{C} \setminus \Gamma_K \text{ и } \Gamma_K := \left\{\gamma : \operatorname{Im}\gamma^2 = 0, \gamma^2 \le k_0^2\right\}.$$

Внутри волновода из (9) мы получаем систему дифференциальных уравнений:

$$L_e u_e = u_e'' - p_e u_e' + \left(q_e - \gamma^2 h_e\right) u_e = \gamma f_e u_m,$$

$$L_m u_m = u_m'' - p_m u_m' + \left(q_m - \gamma^2 h_m\right) u_m = \gamma f_m u_e, \tag{12}$$

где

$$p_e = \frac{(\rho\mu_z)'}{\rho\mu_z},\ \ p_m = \frac{1}{\rho},\ \ q_e = \omega^2 \varepsilon \mu_z,\ \ q_m = \omega^2 \varepsilon \frac{\mu_\rho^2 - \mu_\varphi^2}{\mu_\rho},$$

$$h_e = \frac{\mu_z}{\mu_\rho},\ \ h_m = 1,\ \ f_e = \omega \frac{\mu_\varphi \mu_z}{\mu_\rho},\ \ f_m = \omega \frac{\varepsilon \mu_\varphi}{\mu_\rho}.$$

Зная решения в свободном пространстве, задачу (9)–(10) можно свести к задаче на собственные значения на отрезке $[r_0, r]$.

Замечание 2. Функции q_e, p_m, h_e, h_m, f_e и f_m положительны на отрезке $[r_0, r]$.

Определение 1. Если существуют нетривиальные функции u_e и u_m, отвечающие некоторому $\gamma \in \mathbb{C}$, которые при $\rho > r$ определяются решениями (11) соответственно, а при $r_0 \le \rho \le r$ являются решением системы уравнений (12), и функции u_e и u_m удовлетворяют условиям сопряжения (10), то γ называется характеристическим числом задачи P_0.

Определение 2. Пару функций u_e и u_m, причем $|u_e|^2+|u_m|^2\neq 0$, будем называть собственным вектором задачи P_0, отвечающим характеристическому числу $\gamma\in\mathbb{C}$.

Основная цель работы: *доказательство существования характеристических чисел* γ.

Лемма 1. Если γ – характеристическое число задачи P_0, то $-\gamma$, $\overline{\gamma}$ и $-\overline{\gamma}$ также являются характеристическими числами задачи P_0 с собственными векторами $(u_e,-u_m)$ $(\overline{u}_e,\overline{u}_m)$ и $(\overline{u}_e,-\overline{u}_m)$ соответственно.

Результат леммы легко проверить непосредственно с помощью формул (9) и (10). Отметим, что условие на бесконечности для всех четырех характеристических чисел также выполняется.

3. Вариационное соотношение

Будем искать решения u_e и u_m задачи P_0 в пространстве Соболева соответственно

$$H_0^1(r_0,r)=\{f: f\in H^1(r_0,r), f\big|_{r_0}=0\} \text{ и } H^1(r_0,r)$$

со скалярным произведением

$$(f,g)_1=\int_{r_0}^{r}(f'\overline{g}'+f\overline{g})d\rho,\quad \|f\|_1^2=(f,f)_1=\int_{r_0}^{r}(|f'|^2+|f|^2)d\rho.$$

Замечание 3. Здесь мы используем обозначение для пространства Соболева $H_0^1(r_0,r)$, не совпадающее со стандартным: в нашем случае $f\big|_{r_0}=0$, но вообще говоря $f\big|_{r_0}\neq 0$.

Замечание 4. Отметим еще, что имеет место вложение $H_0^1(r_0,r)\subset H^1(r_0,r)$.

Дадим другую вариационную формулировку задачи P_0. Умножим уравнения системы (12) соответственно на произвольные пробные функции v_e и v_m, считая их пока непрерывно дифференцируемыми на отрезке $[r_0,r]$. Используя формулу Грина, получаем

$$\int_{r_0}^{r}\overline{v}Lud\rho=\int_{r_0}^{r}\overline{v}u''d\rho-\int_{r_0}^{r}\overline{v}pu'd\rho+\int_{r_0}^{r}\overline{v}(q-h\gamma^2)ud\rho=$$

$$=u'\overline{v}\big|_{r_0}^{r}-\int_{r_0}^{r}u'\overline{v}'d\rho-\int_{r_0}^{r}pu'\overline{v}d\rho+\int_{r_0}^{r}(q-h\gamma^2)u\overline{v}d\rho=$$

$$=-\gamma^2\int_{r_0}^{r}hu\overline{v}d\rho-\int_{r_0}^{r}u'\overline{v}'d\rho-\int_{r_0}^{r}pu'\overline{v}d\rho+\int_{r_0}^{r}qu\overline{v}d\rho+u'(r)\overline{v}(r), \tag{13}$$

где $u = u_j$, $v = v_j$, $h = h_j$, $p = p_j$, $q = q_j$, $j = e$ или m. Применяя полученную формулу (13) отдельно для первого и второго уравнений системы (12) на отрезке $\left[r_0, r\right]$ и складывая результаты, получим

$$\int\limits_{r_0}^{r} (\overline{v}_e L_e u_e + \overline{v}_m L_m u_m)\, d\rho = -\gamma^2 \int\limits_{r_0}^{r} (h_e u_e \overline{v}_e + h_m u_m \overline{v}_m)\, d\rho - \int\limits_{r_0}^{r} (u'_e \overline{v}_e + u'_m \overline{v}_m)\, d\rho -$$

$$-\int\limits_{r_0}^{r} (p_e u'_e \overline{v}_e + u'_m \overline{v}_m)\, d\rho + \int\limits_{r_0}^{r} (q_e u_e \overline{v}_e + q_m u_m \overline{v}_m)\, d\rho + u'_e(r)\overline{v}_e(r) + u'_m(r)\overline{v}_m(r). \quad (14)$$

Принимая во внимание правые части уравнений системы (12), имеем

$$\int\limits_{r_0}^{r} (\overline{v}_e L_e u_e + \overline{v}_m L_m u_m)\, d\rho = \gamma \int\limits_{r_0}^{r} (f_e u_m \overline{v}_e + f_m u_e \overline{v}_m)\, d\rho. \quad (15)$$

Зная решения (11), выразим из формул (10) значения нормальных производных при $\rho = r$ следующим образом:

$$u'_e(r) = -k_1 \frac{\mu_z(r)}{\mu_0} \frac{K_0(k_1 r)}{K_1(k_1 r)} u_e(r),$$

$$u'_m(r) = -k_1 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \frac{K_0(k_1 r)}{K_1(k_1 r)} u_m(r). \quad (16)$$

Из выражения (14) с учетом (15) и (16) получаем

$$\gamma^2 \int\limits_{r_0}^{r} (h_e u_e \overline{v}_e + h_m u_m \overline{v}_m)\, d\rho + \int\limits_{r_0}^{r} (u'_e \overline{v}'_e + u'_m \overline{v}'_m)\, d\rho +$$

$$+\int\limits_{r_0}^{r} (p_e u'_e \overline{v}_e + p_m u'_m \overline{v}_m)\, d\rho - \int\limits_{r_0}^{r} q_e u_e \overline{v}_e + q_m u_m \overline{v}_m)\, d\rho +$$

$$+k_1 \frac{K_0(k_1 r)}{K_1(k_1 r)} \left(\frac{\mu_z(r)}{\mu_0} u_e(r)\overline{v}_e(r) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} u_m(r)\overline{v}_m(r) \right) + \gamma \int\limits_{r_0}^{r} (f_e u_m \overline{v}_e + f_m u_e \overline{v}_m)\, d\rho,$$

$$\forall \overline{v}_e \in H_0^1(r_0, r), \overline{v}_m \in H^1(r_0, r). \quad (17)$$

Замечание 5. Вариационное соотношение (17) получено для гладких функций v_e и v_m. Соотношение (17) распространяется на любые функции $v_e \in H_0^1(r_0, r)$, $v_m \in H^1(r_0, r)$ по непрерывности.

4. Задача о спектре оператор-функции

Пусть $H = H_0^1(r_0, r) \times H^1(r_0, r)$ – декартово произведение гильбертовых пространств со скалярным произведением и нормой:

$$(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (u_1, v_1)_1 + (u_2, v_2)_1,\ \|\mathbf{u}\|^2 = \|u_1\|_1^2 + \|u_2\|_1^2;\ \ \mathbf{u},\mathbf{v} \in H,$$

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T,\ \ \mathbf{v} = (v_1, v_2)^T,\ \ u_1, v_1 \in H_0^1(r_0, r),\ u_2, v_2 \in H^1(r_0, r).$$

Тогда интегралы, входящие в (17), можно рассматривать как полуторалинейные формы над полем $\mathbb{C}$, заданные на H от аргументов

$$\mathbf{u} = (u_e, u_m)^T,\ \ \mathbf{v} = (v_e, v_m)^T.$$

Эти формы определяют некоторые линейные ограниченные операторы $T : H \to H$ по формуле

$$\mathrm{t}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\mathrm{T}\,\mathbf{u},\mathbf{v}),\ \ \forall \mathbf{v} \in \mathrm{H}, \tag{18}$$

при условии, что сами формы ограничены: $|\mathrm{t}(\mathbf{u},\mathbf{v})| \le \mathrm{C}\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$. Линейность следует из линейности формы по первому аргументу, а непрерывность из оценок

$$\|\mathrm{T}\,\mathbf{u}\|^2 = \mathrm{t}(\mathbf{u}, \mathrm{T}\,\mathbf{u}) \le \mathrm{C}\|\mathbf{u}\|\|\mathrm{T}\,\mathbf{u}\|.$$

Рассмотрим полуторалинейные формы и порождаемые ими операторы:

$$\mathrm{k}(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int_{r_0}^{r} (h_e u_e \overline{v}_e + h_m u_m \overline{v}_m) d\rho = (\mathrm{K}\,\mathbf{u},\mathbf{v}),\ \ \forall \mathbf{v} \in H,$$

$$\mathrm{k}_1(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int_{r_0}^{r} ((q_e + 1) u_e \overline{v}_e + (q_m + 1) u_m \overline{v}_m) d\rho = (\mathrm{K}_1\,\mathbf{u},\mathbf{v}),\ \ \forall \mathbf{v} \in H,$$

$$\tilde{\mathrm{k}}(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int_{r_0}^{r} (f_e u_m \overline{v}_e + f_m u_e \overline{v}_m) d\rho = (\tilde{\mathrm{K}}\,\mathbf{u},\mathbf{v}),\ \ \forall \mathbf{v} \in H,$$

$$\mathrm{a}(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int_{r_0}^{r} (u_e' \overline{v}_e' + u_m' \overline{v}_m' + u_e \overline{v}_e + u_m \overline{v}_m) d\rho = (\mathrm{I}\,\mathbf{u},\mathbf{v}),\ \ \forall \mathbf{v} \in H,$$

$$\mathrm{b}(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int_{r_0}^{r} (p_e u_e' \overline{v}_e + p_m u_m' \overline{v}_m) d\rho = (\mathrm{B}\,\mathbf{u},\mathbf{v}),\ \ \forall \mathbf{v} \in H,$$

$$\mathrm{s}(\mathbf{u},\mathbf{v}) := k_1 \frac{K_0(k_1 r)}{K_1(k_1 r)} \left(\frac{\mu_z(r)}{\mu_0} u_e(r) \overline{v}_e(r) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} u_m(r) \overline{v}_m(r) \right) = (\mathrm{S}\mathbf{u},\mathbf{v}),\ \ \forall \mathbf{v} \in H.$$

Форма $\mathrm{a}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ определяет единичный оператор. Ограниченность форм $k(\mathbf{u},\mathbf{v})$, $k_1(\mathbf{u},\mathbf{v})$ и $\tilde{k}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ следует из неравенства Пуанкаре [6]

Теперь вариационную задачу (17) можно записать в операторном виде:

$$(N(\gamma)\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0,\ \ \forall \mathbf{u} \in H,$$

или эквивалентно:

$$N(\gamma)\mathbf{u} := \left(\gamma^2 K + \gamma\tilde{K} - K_1 + I + B + S(\gamma)\right)\mathbf{u} = 0. \qquad (19)$$

Уравнение (19) – операторная запись вариационного соотношения (17). Характеристические числа и собственные векторы N совпадают по определению с собственными значениями и собственными векторами задачи P_0.

5. Свойства оператор-функций

Задача о нормальных волнах свелась к изучению спектральных свойств оператор-функции N. В связи с этим прежде всего рассмотрим свойства операторов, входящих в оператор-функцию N. Справедливы [7] следующие леммы:

Лемма 2. Единичный оператор $I: H \to H$ является положительно определенным в H.

Лемма 3. Ограниченные операторы K, K_1 и $\tilde{K}: H \to H$ являются компактными и $K > 0$.

Лемма 4. Оператор $B: H \to H$ является компактным.

Лемма 5. Оператор $S: H \to H$ является компактным.

Лемма 6. Существует $\tilde{\gamma} \in \mathbb{R}$ такое, что оператор $\mathrm{N}(\tilde{\gamma})$ непрерывно обратим, т.е. резольвентное множество $\varsigma(N) := \{\gamma : \exists N^{-1}(\gamma): H \to H$ оператор-функции $N(\tilde{\gamma})$ не пусто; $\varsigma(N) \neq \varnothing$.

Доказательство. Пусть $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ и $\gamma \to +\infty$. Тогда легко проверить, что справедливы следующие оценки для операторов, входящих в оператор-функцию $N(\tilde{\gamma})$: положительный оператор K ограничен и

$$\min_{r_0 \le \rho \le r}(h_e, h_m)\|\mathbf{u}\|_{L_2}^2 \le (\mathrm{K}\,\mathbf{u}, \mathbf{u}) \le \max_{r_0 \le \rho \le r}(h_e, h_m)\|\mathbf{u}\|_{L_2}^2,$$

$$\min_{r_0 \le \rho \le r}(h_e, h_m) > 0.$$

Далее, для оператора $\tilde{K}$, взяв действительную часть, получим

$$\mathrm{Re}(\tilde{\mathrm{K}}\,\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathrm{Re}\int_{r_0}^{r}(f_m u_m \overline{v}_e + f_e u_e \overline{v}_m)\,d\rho =$$

$$= \int_{r_0}^{r}(f_e + f_m)(\mathrm{Re}\,u_e\,\mathrm{Re}\,u_m + \mathrm{Im}\,u_e\,\mathrm{Im}\,u_m)\,d\rho.$$

Справедливы следующие оценки:

$$\int_{r_0}^{r}(\mathrm{Re}\,u_e\,\mathrm{Re}\,u_m + \mathrm{Im}\,u_e\,\mathrm{Im}\,u_m)\,d\rho \le$$

$$\le \frac{1}{2}\int_{r_0}^{r}\Big((\mathrm{Re}\,u_e)^2+(\mathrm{Re}\,u_m)^2+(\mathrm{Im}\,u_e)^2+(\mathrm{Im}\,u_m)^2\Big)d\rho$$

и

$$\int_{r_0}^{r}(\mathrm{Re}\,u_e\,\mathrm{Re}\,u_m+\mathrm{Im}\,u_e\,\mathrm{Im}\,u_m)\,d\rho \ge$$

$$\ge -\frac{1}{2}\int_{r_0}^{r}\Big((\mathrm{Re}\,u_e)^2+(\mathrm{Re}\,u_m)^2+(\mathrm{Im}\,u_e)^2+(\mathrm{Im}\,u_m)^2\Big)d\rho,$$

следовательно

$$\left|\mathrm{Re}(\tilde{K}\mathbf{u},\mathbf{u})\right| \le \frac{1}{2}\max_{r_0\le\rho\le r}(f_e+f_m)\|\mathbf{u}\|_{L_2}^2 .$$

Оператор K_1 ограничен и

$$\left|K_1\mathbf{u},\mathbf{u})\right| \le \max_{r_0\le\rho\le r}(|q_e+1|,|q_m+1|)\|\mathbf{u}\|_{L_2}^2 .$$

Для оператора B, взяв действительную часть, получим

$$\mathrm{Re}(B\mathbf{u},\mathbf{u})=\mathrm{Re}\int_{r_0}^{r}(p_e u_e'\overline{v}_e+p_m u_m'\overline{v}_m)\,d\rho=\frac{1}{2}\int_{r_0}^{r}\left(p_e\left(|u_e|^2\right)'+p_m\left(|u_m|^2\right)'\right)d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\left(p_e(r)\left(|u_e(r)|^2\right)+p_m(r)\left(|u_m(r)|^2\right)\right)-$$

$$-\frac{1}{2}p_m(r_0)\left(|u_m(r_0)|^2\right)-\frac{1}{2}\int_{r_0}^{r}\left(p_e'\left(|u_e|^2\right)+p_m'\left(|u_m|^2\right)\right)d\rho.$$

Справедливы следующие оценки:

$$\mathrm{Re}(B\mathbf{u},\mathbf{u})\le\frac{1}{2}\left(p_e(r)\left(|u_e(r)|^2\right)+p_m(r)\left(|u_m(r)|^2\right)-p_m(r_0)\left(|u_m(r_0)|^2\right)\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\max_{r_0\le\rho\le r}\left(|p_e'|+|p_m'|\right)\|\mathbf{u}\|_{L_2}^2$$

и

$$\mathrm{Re}(B\mathbf{u},\mathbf{u})\ge\frac{1}{2}\left(p_e(r)\left(|u_e(r)|^2\right)+p_m(r)\left(|u_m(r)|^2\right)-p_m(r_0)\left(|u_m(r_0)|^2\right)\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\max_{r_0\le\rho\le r}\left(|p_e'|+|p_m'|\right)\|\mathbf{u}\|_{L_2}^2 .$$

Тогда для оператор-функции *N* имеем следующую оценку $(\gamma > 0)$:

$$\operatorname{Re}(N(\gamma)\mathbf{u},\mathbf{u}) \ge \gamma^2 \min_{r_0\le\rho\le r}(h_e,h_m)\|\mathbf{u}\|_{L_2}^2 - \frac{\gamma}{2}\max_{r_0\le\rho\le r}(f_e+f_m)\|\mathbf{u}\|_{L_2}^2 -$$

$$-\left(\max_{r_0\le\rho\le r}\left(|q_e+1|,|q_m+1|\right)+\frac{1}{2}\max_{r_0\le\rho\le r}\left(|p_e'|+|p_m'|\right)\right)\|\mathbf{u}\|_{L_2}^2 +$$

$$+\|\mathbf{u}\|^2 + \left(k_1\frac{K_0(k_1r)}{K_1(k_1r)}\frac{\mu_z(r)}{\mu_0}+\frac{p_e(r)}{2}\right)|u_e(r)|^2 +$$

$$+\left(k_1\frac{K_0(k_1r)}{K_1(k_1r)}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}+\frac{p_m(r)}{2}\right)|u_m(r)|^2 - p_m(r_0)|u_m(r_0)|^2.$$

Имеем $k_1 > 0$ и $k_1 \to \infty$ при $\gamma \to \infty$. В силу условия (11) условие

$$|u_e(r)| = |u_m(r)| = 0$$

не может выполняться. Поэтому сумма последних трех слагаемых в последнем неравенстве будет положительной при достаточно большом $\gamma > 0$.

Получаем, что найдется такое большое $\tilde{\gamma} > 0$, что

$$\operatorname{Re}(N(\gamma)\mathbf{u},\mathbf{u}) = \tilde{\gamma}^2(K\mathbf{u},\mathbf{u}) + \tilde{\gamma}\operatorname{Re}(K\mathbf{u},\mathbf{u}) -$$

$$-\operatorname{Re}(K_1\mathbf{u},\mathbf{u}) + (\mathbf{u},\mathbf{u}) + \operatorname{Re}(B\mathbf{u},\mathbf{u}) + (S(\tilde{\gamma})\mathbf{u},\mathbf{u}) \ge \|\mathbf{u}\|^2$$

для любого $\mathbf{u}$, тождественно не равного 0. Поэтому $\gamma \in \varsigma(N)$, где $\varsigma(N)$ – резольвентное множество пучка *N*.

Теорема 1. Оператор-функция $N(\gamma): H \to H$ является ограниченной, голоморфной и фредгольмовой в области Γ.

Доказательство. В области Γ функция

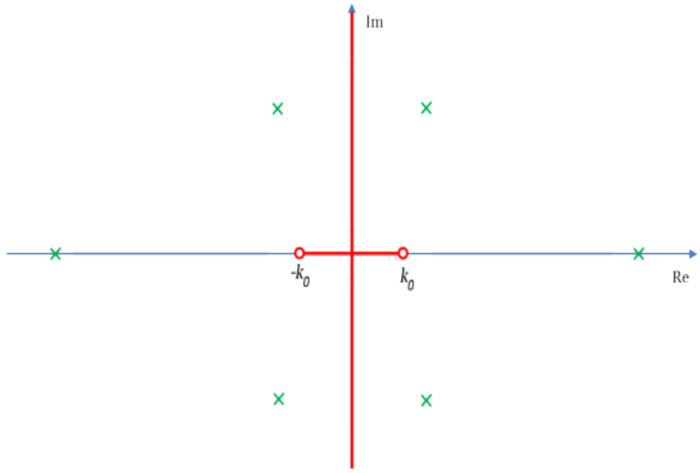
$$k_1\frac{K_0(k_1r)}{K_1(k_1r)}$$

является аналитической (как функции от γ), так как при $\operatorname{Re}k_1 > 0$ функция $K_1(k_1r)$ не имеет нулей [8, 9]. Тогда в силу Лемм 2–6 получаем требуемый результат.

Теорема 2. Спектр оператор-функции $N(\gamma): H \to H$ является дискретным в Γ, т.е. имеет конечное число характеристических точек конечной алгебраической кратности в любом компакте $K_0 \subset \Gamma$.

Доказательство. Утверждение теоремы является следствием теоремы 1 и теоремы о голоморфной оператор-функции [10].

Рисунок 2 дает наглядное представление о распределении спектра оператор-функции $N(\gamma)$ на комплексной плоскости. Для точки $\gamma \in \Gamma$ требуется отдельное исследование.



$\times$ – характеристические числа; $\circ$ – точки множества Γ_K

Рис. 2. Спектр оператор-функции $\mathrm{N}(\gamma)$

Заключение

Исходная задача о нормальных волнах неоднородной волноведущей структуры сведена к краевой задаче для продольных компонент электромагнитного поля в пространствах Соболева. Неоднородность диэлектрического заполнения и вхождение спектрального параметра в условия сопряжения приводят к необходимости дать специальное определение решения задачи. Для определения решения использована вариационная формулировка задачи. Вариационная задача сводится к изучению оператор-функции.

Исследуются свойства операторов в оператор-функции, необходимые для анализа ее спектральных свойств. Доказаны теоремы о дискретности спектра и о распределении характеристических чисел оператор-функции на комплексной плоскости.

Библиографический список

1. **Ильинский, А. С.** Применение методов спектральной теории в задачах распространения волн / А. С. Ильинский, Ю. В. Шестопалов. – М. : Изд-во МГУ, 1989.
2. **Смирнов, Ю. Г.** Метод операторных пучков в краевых задачах сопряжения для системы эллиптических уравнений / Ю. Г. Смирнов // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27, № 1. – С. 140–147.
3. **Смирнов, Ю. Г.** Применение метода операторных пучков в задаче о собственных волнах частично заполненного волновода / Ю. Г. Смирнов // Доклады АН СССР. – 1990. – Т. 312, № 3. – С. 597–599.
4. **Смирнов, Ю. Г.** Математические методы исследования задач электродинамики / Ю. Г. Смирнов. – Пенза : Инф.-изд. центр ПензГУ, 2009. – 268 с.
5. **Делицин, А. Л.** Об одном подходе к задаче о полноте системы собственных и присоединенных волн волновода / А. Л. Делицин // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 36, № 5.
6. **Adams, R.** Sobolev spaces / R. Adams. – New York : Academic Press, 1975.
7. **Смирнов, Ю. Г.** О дискретности спектра в задаче о нормальных волнах открытого неоднородного волновода / Ю. Г. Смирнов, Е. Ю. Смолькин // Дифференциальные уравнения. – 2017. – Т. 53, № 10. – С. 1298–1309.

8. **Абрамовиц, М.** Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 832 с.
9. **Градштейн, И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М. : Наука, 1971.
10. **Гохберг, И. Ц.** Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. – М. : Наука, 1965. – 448 с.

References

1. Il'inskiy A. S., Shestopalov Yu. V. *Primenenie metodov spektral'noy teorii v zadachakh rasprostraneniya voln* [Application of spectral theory's methods in wave propagation problems]. Moscow: Izd-vo MGU, 1989.
2. Smirnov Yu. G. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations]. 1991, vol. 27, no. 1, pp. 140–147.
3. Smirnov Yu. G. *Doklady AN SSSR* [Reports of AS USSR]. 1990, vol. 312, no. 3, pp. 597–599.
4. Smirnov Yu. G. *Matematicheskie metody issledovaniya zadach elektrodinamiki* [MAthematical research methods in problems of electrodynamics]. Penza: Inf.-izd. tsentr PenzGU, 2009. 268 p.
5. Delitsin A. L. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations]. 2000, vol. 36, no. 5.
6. Adams R. *Sobolev spaces*. New York: Academic Press, 1975.
7. Smirnov Yu. G., Smol'kin E. Yu. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations]. 2017, vol. 53, no. 10, pp. 1298–1309.
8. Abramovits M., Stigan I. *Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam* [Special functions reference book]. Moscow: Nauka, 1979. 832 p.
9. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [Tables of integrals, sums, series and products]. Moscow: Nauka, 1971.
10. Gokhberg I. Ts., Kreyn M. G. *Vvedenie v teoriyu lineynykh ne- samosopryazhennykh operatorov v gil'bertovom prostranstve* [Introduction into the theory of linear nonself-adjoint operators in Hilbert space]. Moscow: Nauka, 1965. 448 p.

Смирнов Юрий Геннадьевич
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

Smirnov Yuriy Gennad'evich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of sub-department of mathematics and supercomputer modeling, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Смолькин Евгений Юрьевич
кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, научно-исследовательский центр «Суперкомпьютерное моделирование в электродинамике», Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

Smol'kin Evgeniy Yur'evich
Candidate of physical and mathematical sciences, research assistant, the research center "Supercomputer modeling in electrodynamics", Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

E-mail: e.g.smolkin@hotmail.com

Снегур Максим Олегович
студент, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

Snegur Maksim Olegovich
Student, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

E-mail: snegur.max15@gmail.com

УДК 517.958;621.372.8

Смирнов, Ю. Г.

О дискретности спектра в задаче об азимутальных симметричных волнах открытого неоднородного анизотропного волновода с продольным намагничиванием / Ю. Г. Смирнов, Е. Ю. Смолькин, М. О. Снегур // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2017. – № 3 (43). – С. 50–64. DOI 10.21685/2072-3040-2017-3-5