A. D. Polyanin, A. V. Manzhirov, The method of model solutions in the theory of linear integral equations,
Dokl. Akad. Nauk, 1997, Volume 354, Number 1, 30–34

https://www.mathnet.ru/eng/dan3783

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1997, том 354, № 1, с. 30–34

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.968

МЕТОД МОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ В ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 1997 г. А. Д. Полянин, А. В. Манжиров

Представлено академиком Д.М. Климовым 17.04.95 г.

Поступило 27.04.95 г.

Предлагается метод поиска точных аналитических решений линейных интегральных уравнений. Метод основан на построении модельного решения более простого уравнения со специальной правой частью, которая зависит от вспомогательного параметра. Модельное решение используется для построения решения исходного уравнения при произвольной правой части.

Указанный метод позволил найти новые классы интегральных уравнений, решение которых может быть представлено в аналитическом виде.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Известно сравнительно немного методов математической физики, которые позволяют получать точные аналитические решения некоторых классов линейных интегральных уравнений [1–7]. В частности, для решения уравнений с разностным ядром (возникающих во многих задачах механики) используют преобразования Фурье и Лапласа. Уравнения Вольтерра с вырожденными ядрами сводят к обыкновенным дифференциальным уравнениям [1, 6], решения которых можно найти, например, в справочниках [8–10].

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений хорошо известно, что знание любого нетривиального частного решения линейного однородного уравнения позволяет понизить его порядок, а для уравнения второго порядка знания частного решения достаточно для построения общего решения [8–10]. Покажем, что в ряде случаев похожая (но более сложная) ситуация имеет место и для линейных интегральных уравнений.

Рассмотрим линейное интегральное (функциональное, интегрофункциональное) уравнение, которое для краткости будем записывать в виде

$$\mathbf{L}[y(x)] = f(x), \tag{1}$$

где $\mathbf{L}$ – некоторый линейный оператор, $y(x)$ – неизвестная функция, $f(x)$ – известная (произвольная) функция.

Решение уравнения (1) для конкретной функции $f = f_0(x)$ будем называть *частным решением* уравнения (1), соответствующим f_0. Решение уравнения (1) для произвольной правой части $f = f(x)$ будем называть *общим решением*. В ряде случаев методом неопределенных коэффициентов удается сравнительно просто построить частное решение (задавая его структуру) интегрального уравнения для некоторых $f_0(x)$.

Возьмем некоторую функцию $\psi(x, \lambda)$, зависящую от вспомогательного параметра λ (считается, что оператор $\mathbf{L}$ не зависит от λ). Пусть $Y(x, \lambda)$ – частное решение уравнения (1), соответствующее $\psi(x, \lambda)$, т.е.

$$\mathbf{L}[Y(x, \lambda)] = \psi(x, \lambda). \tag{2}$$

Частное решение $Y(x, \lambda)$ будем называть *модельным решением*, если в правой части вспомогательного уравнения (2) стоит ядро известного обратного или прямого интегрального преобразования. Считая, что модельное решение $Y(x, \lambda)$ известно, построим общее решение уравнения (1).

2. ОПИСАНИЕ МЕТОДА МОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ. ПРОСТЕЙШАЯ МОДИФИКАЦИЯ

Пусть $\mathfrak{P}$ – некоторое обратимое интегральное преобразование, которое любой функции-оригиналу $f(x)$ ставит в соответствие изображение $F(\lambda)$ по правилу

$$F(\lambda) = \mathfrak{P}\{f(x)\}. \tag{3}$$

Считаем, что обратное интегральное преобразование $\mathfrak{P}^{-1}$ имеет ядро $\psi(x, \lambda)$ и действует следующим образом:

$$\mathfrak{P}^{-1}\{F(\lambda)\} = f(x),$$
$$\mathfrak{P}^{-1}\{F(\lambda)\} \equiv \int_a^b F(\lambda)\psi(x, \lambda)d\lambda. \tag{4}$$

Институт проблем механики
Российской Академии наук, Москва

Пределы a и b и путь интегрирования в (4) могут лежать в комплексной плоскости.

Пусть удалось найти модельное решение $Y(x, \lambda)$ вспомогательного уравнения (2), в правой части которого стоит ядро обратного преобразования $\mathfrak{P}^{-1}$. Умножим обе части (2) на $F(\lambda)$, а затем проинтегрируем по λ в тех же пределах, которые стоят в обратном преобразовании (4). Учитывая, что оператор $\mathbf{L}$ не зависит от λ и используя равенство $\mathfrak{P}^{-1}\{F(\lambda)\} = f(x)$, получим

$$\mathbf{L}\left[\int_a^b Y(x, \lambda)F(\lambda)d\lambda\right] = f(x).$$

Отсюда следует, что решение уравнения (1) при произвольной функции в правой части $f(x)$ выражается через модельное решение более простого вспомогательного уравнения (2) по формуле

$$y(x) = \int_a^b Y(x, \lambda)F(\lambda)d\lambda, \tag{5}$$

где $F(\lambda)$ – изображение функции $f(x)$, полученное с помощью преобразования $\mathfrak{P}$ из (3).

В п. 3, 4 будут выписаны некоторые частные виды вспомогательных уравнений (2) и соответствующие формулы для решения (5).

Отметим, что в работе [11] для приближенного аналитического решения специального класса парных уравнений с произвольной правой частью использовалось решение вспомогательной задачи, правая часть которой связана с ядром рассматриваемого уравнения и одновременно является ядром некоторого интегрального преобразования.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ, СООТВЕТСТВУЮЩЕЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТИ

Пусть удалось подобрать модельное решение, соответствующее экспоненциальной правой части:

$$\mathbf{L}[Y(x, p)] = e^{px}, \ \lambda = p. \tag{6}$$

Обозначим $F_l(p)$ изображение функции $f(x)$, полученное с помощью преобразования Лапласа:

$$F_l(p) = \mathfrak{L}\{f(x)\}, \ \mathfrak{L}\{f(x)\} \equiv \int_0^\infty f(x)e^{-px}dx. \tag{7}$$

Решение уравнения (1) при произвольной правой части $f(x)$ выражается через решение более простого вспомогательного уравнения с экспоненциальной правой частью (6) по формуле

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Y(x, p)F_l(p)dp, \tag{8}$$

где $F_l(p)$ – изображение функции $f(x)$, полученное с помощью преобразования Лапласа (7). Важно отметить, что $Y(x, p)$ может иметь структуру, отличную от ядра обратного преобразования Лапласа.

Для вычисления соответствующих интегралов в правой части формулы (8) следует использовать таблицы преобразований Лапласа и методы теории функций комплексного переменного, включая лемму Жордана и теорему о вычетах [12, 13].

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ, СООТВЕТСТВУЮЩЕЕ СТЕПЕННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТИ

Пусть удалось подобрать модельное решение, соответствующее степенной правой части уравнения:

$$\mathbf{L}[Y(x, s)] = x^{-s}, \ \lambda = s. \tag{9}$$

Обозначим: $F_m(s)$ – изображение функции $f(x)$, полученное с помощью преобразования Меллина:

$$F_m(s) = \mathfrak{M}\{f(x)\}, \ \mathfrak{M}\{f(x)\} \equiv \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx. \tag{10}$$

Решение уравнения (1) при произвольной правой части $f(x)$ выражается через решение более простого вспомогательного уравнения со степенной правой частью (9) по формуле

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Y(x, s)F_m(s)ds, \tag{11}$$

где $F_m(s)$ – изображение функции $f(x)$, полученное с помощью преобразования Меллина (10).

Замечание 1. В ряде случаев модельные решения вспомогательных уравнений (6) и (9) можно искать методом неопределенных коэффициентов в виде суммы экспоненциальных или степенных функций.

5. УРАВНЕНИЕ НА ВСЕЙ ОСИ С МОДЕЛЬНЫМ РЕШЕНИЕМ В ВИДЕ СУММЫ ЭКСПОНЕНТ

Рассмотрим уравнение

$$Ay(x) + \int_{-\infty}^{\infty}[K(x-t) + e^{\alpha x + \beta t}M(x+t)]y(t)dt = f(x), \tag{12}$$

где $K = K(y)$, $M = M(z)$, $f(x)$ – некоторые (произвольные) функции, A, α, β – некоторые постоянные. При $M(z) \equiv 0$ уравнение (12) рассматривалось в [2, 4, 5].

Модельное решение вспомогательного уравнения с экспоненциальной правой частью

$$AY(x,p) + \int_{-\infty}^{\infty}[K(x-t)+e^{\alpha x+\beta t}M(x+t)]Y(t,p)dt = e^{px} \quad (13)$$

ищем методом неопределенных коэффициентов в виде

$$Y(x,p) = Be^{px}+Ce^{qx}. \quad (14)$$

Постоянные B, C, q зависят от параметра p и определяются путем подстановки выражения (14) в уравнение (13). В результате приравнивания показателей экспонент и их сомножителей находим модельное решение

$$Y(x,p) = \frac{[A+k(q)]e^{px}-m(p)e^{qx}}{[A+k(p)][A+k(q)]-m(p)m(q)},$$
$$q = \alpha-\beta-p, \quad (15)$$
$$k(p) = \int_{-\infty}^{\infty}K(y)e^{-py}dy, \quad m(p) = \int_{-\infty}^{\infty}M(z)e^{(p+\beta)z}dz.$$

Для построения решения уравнения (12) с произвольной правой частью используем преобразование Фурье. Полагая в (15) $p = i\omega$, получим модельное решение, соответствующее ядру обратного преобразования Фурье. Рассуждая далее аналогично тому, как это делалось в п. 3, приходим к формуле

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}Y(x,i\omega)F_f(\omega)d\omega,$$
$$F_f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}d\omega, \quad (16)$$

где $F_f(\omega)$ – изображение функции $f(x)$, полученное с помощью преобразования Фурье. Важно отметить, что решение (16) имеет более сложную структуру, чем обратное преобразования Фурье.

6. УРАВНЕНИЕ ФРЕДГОЛЬМА СО СЛОЖНЫМ АРГУМЕНТОМ

Метод модельных решений применим и к уравнениям со сложным аргументом. Рассмотрим, например, уравнение

$$Ay(x)+\int_a^b Q(t)y(\xi)dt = f(x), \quad \xi = xg(t), \quad (17)$$

где $Q(t)$, $f(x)$, $g(\xi)$ – некоторые функции. Уравнение (17) при $A = 0$, $a = 0$, $b = \pi/2$, $g(t) = \sin t$ встречается в смешанных задачах теории упругости [14].

Модельное решение вспомогательного уравнения со степенной правой частью

$$AY(x,s)+\int_a^b Q(t)Y(\xi,s)dt = x^{-s}, \quad \xi = xg(t), \quad (18)$$

имеет вид

$$Y(x,s) = \frac{1}{q}x^{-s}, \quad q = A+\int_a^b Q(t)[g(t)]^{-s}dt. \quad (19)$$

Подставляя это решение в формулу (11), получим решение исходного уравнения (17) с произвольной правой частью. В частном случае $A = 0$, $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$, $Q(t) \equiv 1$, $g(t) = \sin^k t$ после громоздких вычислений приходим к выражению

$$y(x) = \frac{2}{\pi}\left[f(0)+kx\int_0^{\pi/2}(\sin t)^{k-1}f'_\xi(\xi)dt\right],$$
$$\xi = x\sin^k t,$$

которое переходит в решение Шлёмильха [4] при $k = 1$.

7. ДРУГИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СО СЛОЖНЫМ АРГУМЕНТОМ

Укажем теперь модельные решения некоторых интегральных уравнений со сложным аргументом (эти модельные решения представляют самостоятельный интерес, так как левая часть соответствующих вспомогательных уравнений зависит от произвольных функций).

1. Рассмотрим уравнение Вольтерра

$$\int_{-\infty}^{x}e^{\alpha t}\left[\sum_{n=1}^{N}Q_n(x-t)y(\xi_n)\right]dt = f(x),$$
$$\xi_n = e^{\beta t}g_n(x-t), \quad (20)$$

где $Q_n(z)$, $g_n(z)$, $f(z)$ – некоторые функции, α, β – некоторые постоянные; $n = 1, 2, \ldots, N$.

Модельное решение, соответствующее экспоненциальной правой части $f(x) = e^{px}$ уравнения (20), имеет вид

$$Y(x,p) = \frac{1}{q}x^{\lambda}, \quad \lambda = \frac{p-\alpha}{\beta},$$
$$q = \int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{N}Q_n(z)[g_n(z)]^{\frac{p-\alpha}{\beta}}e^{-pz}dz. \quad (21)$$

Важно отметить, что в данном случае структура модельного решения отличается от структуры правой части вспомогательного уравнения. Решение уравнения (20) с произвольной правой частью получается в результате подстановки модельного решения (21) в формулу (8) (при условии существования соответствующих интегралов).

2. Рассмотрим интегральное уравнение со сложным аргументом и сложными пределами интегрирования

$$\int_{ax}^{bx} Q\left(\frac{t}{x}\right) t^n y(\xi)dt = f(x), \quad \xi = t^m g\left(\frac{t}{x}\right), \tag{22}$$

где $Q(z)$, $f(z)$, $g(z)$ – некоторые функции, a, b, n, m – некоторые постоянные $m \neq 0$. В частных случаях $a = 0$, $b = 1$; $a = -\infty$, $b = 1$; $a = 1$, $b = \infty$ исходное уравнение (31) соответствует уравнениям Вольтерра первого рода, а в случаях $a = 0$, $b = \infty$; $a = -\infty$, $b = \infty$ соответствует уравнениям первого рода на полуоси и на всей оси.

Модельное решение, соответствующее степенной правой части $f(x) = x^{-s}$ уравнения (22), имеет вид

$$\begin{gathered} Y(x, s) = \frac{1}{q} x^{-\frac{s+n+1}{m}}, \\ q = \int_a^b Q(z)[g(z)]^{-\frac{s+n+1}{m}} z^{-s-1} dz. \end{gathered} \tag{23}$$

3. Рассмотрим уравнение

$$Ay(x) + \sum_{n=1}^{N} \int_{a_n}^{b_n} Q_n(t) y(\xi_n) dt +$$

$$+ \sum_{m=1}^{M} \int_{\alpha_m}^{\beta_m} R_m(t) y(\zeta_m) dt = f(x), \tag{24}$$

$$\xi_n = x g_n(t), \quad \zeta_m = h_m(t) x^{-1},$$

где $Q_n(z)$, $R_m(z)$, $g_n(z)$, $h_m(z)$, $f(z)$ – некоторые функции. Модельное решение, соответствующее степенной правой части $f(x) = x^{-s}$ уравнения (24), в этом случае будет определяться формулой

$$\begin{gathered} Y(x, s) = \frac{q(s)}{\Delta(s)} x^{-s} - \frac{r(-s)}{\Delta s} x^s, \\ \Delta(s) = q(s)q(-s) - r(s)r(-s), \end{gathered} \tag{25}$$

$$q(s) = A + \sum_{n=1}^{N} \int_{a_n}^{b_n} Q_n(t)[g_n(t)]^s dt,$$

$$r(s) = \sum_{m=1}^{M} \int_{\alpha_m}^{\beta_m} R_m(t)[h_m(t)]^s dt.$$

Решение уравнения (24) с произвольной правой частью получается в результате подстановки модельного решения (25) в формулу (11).

8. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ МЕТОДА МОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

1. В правой части вспомогательного уравнения (7) может стоять произведение $g(x)\psi(x, \lambda)$, где $\psi(x, \lambda)$ – ядро обратного преобразования $\mathfrak{P}^{-1}$, а $g(x)$ – любая функция, которая не зависит от λ. В этом случае обе части уравнения следует умножить на

$F_g(\lambda) \equiv \mathfrak{P}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}$ и рассуждать далее, как п. 2. Искомое решение будет определяться формулой (8), в которой $F(\lambda)$ следует заменить на $F_g(\lambda)$.

2. Пусть удалось найти модельное решение $Y(x, \lambda)$ вспомогательной задачи для уравнения (1):

$$\mathbf{L}[Y(x, \lambda)] = \mathbf{H}_\lambda[\psi(x, \lambda)]. \tag{26}$$

В правой части (26) стоит некоторый обратимый линейный оператор $\mathbf{H}_\lambda$, который не зависит от переменной x и действует по параметру λ на ядро обратного преобразования $\psi(x, \lambda)$; см. формулу (6). Решение уравнения (1) при произвольной правой части $f(x)$ выражается через решение вспомогательного уравнения (26) с помощью обратного оператора $\mathbf{H}_\lambda^{-1}$ по формуле

$$y(x) = \int_a^b F(\lambda) \mathbf{H}_\lambda^{-1}[Y(x, \lambda)] d\lambda.$$

3. Пусть линейное интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_\alpha^\beta \psi(x, \lambda) \omega(\lambda) d\lambda = f(x) \tag{27}$$

для любой правой части $f(x)$ допускает аналитическое решение

$$\omega(\lambda) = \mathbf{M}[f]. \tag{28}$$

Оператор $\mathbf{M}$ необязательно имеет вид интегрального преобразования, а может быть сложной композицией операций дифференцирования, интегрирования (как с постоянными, так и с переменными пределами интегрирования) и умножения на некоторые функции (примеры таких операторов можно найти, например, в [2, 4]). Кроме того, оператор $\mathbf{M}$ может задаваться также с помощью бесконечного ряда [2].

Будем считать, что совпадают области определения уравнений (1) и (27). Пусть удалось найти модельное решение вспомогательного уравнения (2), в правой части которого стоит ядро интегрального уравнения (27). Тогда решение уравнения (1) для произвольной правой части $f(x)$ выражается через модельное решение более простого вспомогательного уравнения (2) по формуле

$$y(x) = \int_{\alpha}^{\beta} Y(x, \lambda)\omega(\lambda)d\lambda,$$

где $\omega(\lambda)$ – решение уравнения (27), которое дается формулой (28).

Замечание 2. Метод модельных решений может использоваться также при решении линейных функциональных, интегрофункциональных и интегродифференциальных уравнений. Например, для функционального уравнения $y(x) + ax^m y(b/x) = f(x)$ модельное решение, соответствующее степенной правой части $f(x) = x^{-s}$, имеет вид

$$Y(x, s) = \frac{x^{-s} - ab^{-s}x^{s+m}}{1 - a^2 b^m}.$$

Подставляя его в формуле (11) и используя свойства преобразования Меллина, получим решение для произвольной функции $f(x)$ в виде

$$y(x) = \frac{f(x) - ax^m f(b/x)}{1 - a^2 b^m}.$$

Авторы благодарят В.М. Александрова за внимание к работе и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.* Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 192 с.
2. *Забрейко П.П., Кошелев А.И. и др.* Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 448 с.
3. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М.: Наука, 1967. 508 с.
4. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
5. *Гахов Ф.Д., Черский Ю.И.* Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978. 296 с.
6. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Наук. думка, 1986. 544 с.
7. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
8. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
9. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations. Boca Raton; L.: CRC Press, 1995. 707 p.
10. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям (точные решения). М.: Физматлит, 1995. 602 с.
11. *Александров В.М.* // ДАН. 1973. Т. 210. № 1. С. 55–58.
12. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Наука, 1974. 542 с.
13. *Свешников А.Г., Тихонов А.Н.* Теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1970. 304 с.
14. *Уфлянд Я.С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. М.: Наука, 1977. 220 с.