О. С. Зикиров, О разрешимости нелокальной задачи для гиперболического уравнения третьего порядка, *Сиб. журн. чист. и прикл. матем.*, 2016, том 16, выпуск 2, 16–25

DOI: 10.17377/PAM.2016.16.202

УДК 517.956
DOI 10.17377/PAM.2016.16.202

О. С. Зикиров

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Изучается нелокальная граничная задача для уравнения в частных производных третьего порядка с волновым оператором в главной части. При определенных условиях гладкости на заданные, методом Римана получено интегральное представление решения изучаемой задачи.

Ключевые слова: нелокальная задача, задача Гурса, функция Римана, интегральный оператор, уравнения третьего порядка, гиперболическое уравнение, уравнение Вольтерра.

Введение

Уравнения в частных производных третьего порядка лежат в основе математических моделей различных физических явлений и процессов. Многие задачи, связанные с динамикой почвенной влаги и грунтовой воды [1; 2], распространением акустических волн в слабонеоднородных средах [3], приводятся к краевым задачам для гиперболического уравнения третьего порядка.

Например, уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$$

описывает распространение линейных акустических волн в среде с дисперсией [4], где ρ — числовой параметр, принадлежащий интервалу $(0;1)$.

В области $D = \{(x,y):\ 0 < x < l,\ 0 < y < h\}$ рассмотрим гиперболическое уравнение третьего порядка

$$Mu \equiv \left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right) u_{xy} + Lu = g(x,y), \tag{1}$$

где α, β – заданные числа, причем $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, а L — линейное дифференциальное выражение вида

$$Lu \equiv a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y)u_x + e(x,y)u_y + f(x,y)u.$$

Уравнение (1) относится к третьему каноническому виду относительно старших производных, указанному в [5], так как семейства характеристик уравнения (1) являются действительными и различными.

Заметим также, что уравнение (1) представляет собой объединение в виде одной формулы двух вариантов обобщенного псевдопараболического уравнения Аллера, частные случаи которого исследовались, например, в работах [6–14].

В данной работе изучается многоточечная нелокальная краевая задача для линейных гиперболических уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами. Доказательство существования классического решения поставленной задачи приводится методом Римана.

ISSN 2411-3468. Сибирский журнал чистой и прикладной математики. 2016. Т. 16, № 2. С. 16–25

1. Постановка задачи

Введем некоторые необходимые обозначения и определения.

Через $C^{k,l}(D)$ обозначен класс функций $u(x,y)$, непрерывных вместе со своими частными производными порядка $\partial^{m+n}u(x,y)/\partial x^m \partial y^n$ для всех $m = 0, 1, \ldots k$, $n = 0, 1, \ldots l$.

Под классом $C^{(k,\lambda)}(D)$ понимаются определенные в области D функции, у которых все частные производные порядка k существуют и удовлетворяют условию Гельдера с показателем λ, $0 < \lambda < 1$. Через $C^k(D)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, обозначим класс функций, непрерывных вместе со своими частными производными до k-го порядка включительно, в области D и $C^0(D) = C(D)$.

В настоящей работе для уравнения (1) изучается следующая задача.

Задача 1. *Найти в области D функцию $u(x,y)$ такую, что $u(x,y) \in C^{2,1}(D) \cap C^{1,2}(D) \cap$ $\cap\, C^{1,1}(\overline{D})$, удовлетворяющую уравнению (1) и следующим начальным*

$$u(x,0) = \psi_1(x), \quad u_y(x,0) = \psi_2(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

и нелокальным граничным условиям

$$u(0,y) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(y) u(x_k, y) + \varphi_1(y), \quad 0 \le y \le h, \tag{3}$$

$$u_x(0,y) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k(y) u_x(x_k, y) + \varphi_2(y), \quad 0 \le y \le h, \tag{4}$$

где x_k — произвольные фиксированные точки, причем $0 \le x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le l$, $\psi_i(x)$, $\varphi_i(y)$, $(i = 1, 2)$, $\alpha_k(y)$, $\beta_k(y)$, $(k = \overline{1,n})$ — заданные функции такие, что

$$\psi_1(0) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(0)\psi_1(x_k) + \varphi_1(0), \quad \psi_1'(0) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k(0)\psi_1(x_k) + \varphi_2(0).$$

Отметим, что нелокальные условия вида (3) впервые предложены А. М. Нахушевым и впоследствии получили развитие в работах ряда авторов (см., например, [12–14]).

Заметим, что условие (3) непосредственно связано с условием

$$u(0,y) = \int_{x_0}^{l} k(x,y)u(x,y)\,dx + \varphi_1(y)$$

и получается из него, если интеграл приближенно заменить конечной суммой.

Изучение нелокальных задач с условиями типа (3) и (4) объясняется тем, что они обобщают как аналогичные локальные граничные условия, так и нелокальные условия типа Бицадзе – Самарского.

Определение 1. Под классическим решением задачи (1)–(4) будем понимать функцию $u(x,y)$ из класса $C^{2,1}(D) \cap C^{1,2}(D) \cap C^{1,1}(\overline{D})$, удовлетворяющую уравнению (1) и условиям (2)–(4) в обычном смысле.

Задачу (1)–(4) исследуем в пространстве $C^{2,1}(D) \cap C^{1,2}(D) \cap C^{1,1}(\overline{D})$, и в этом случае будем требовать выполнения следующих условий.

Условие 1. *Коэффициенты уравнения* (1) *удовлетворяют условиям*

$$a(x,y) \in C^{1,0}(\overline{D}) \cap C^{2,0}(D); \quad b(x,y) \in C^{1,0}(\overline{D}) \cap C^{0,1}(\overline{D}) \cap C^{1,1}(D);$$
$$c(x,y) \in C^{0,1}(\overline{D}) \cap C^{0,2}(D); \quad d(x,y) \in C^{0,0}(\overline{D}) \cap C^{1,0}(D);$$
$$e(x,y) \in C^{0,0}(\overline{D}) \cap C^{0,1}(D); \quad f(x,y) \in C^{0,0}(D),$$

кроме того, $d(x,y) < 0$, $e(x,y) < 0$ *для любых* $(x,y) \in D$.

Условие 2. *Заданные функции* $\psi_i(x)$, $\varphi_i(y)$ $(i = 1,\, 2)$, $\alpha_k(y)$, $\beta_k(y)$, $(k = \overline{1,n})$ *и* $g(x,y)$ *удовлетворяют условиям*

$$\psi_i(x) \in C^2[0,l], \quad \varphi_i(y) \in C^2[0,h],\ (i = 1,\, 2); \quad \alpha_k(y),\ \beta_k(y) \in C^2[0,h];$$
$$g(x,y) \in C^{(1,\lambda)}(\overline{D}), \quad \text{кроме того}, \quad g(x,0) = g(0,y) = 0.$$

Имеет место следующая теорема разрешимости нелокальной задачи (1)–(4).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1 *и* 2*. Тогда нелокальная задача* (1)–(4) *однозначно разрешима в классе* $C^{2,1}(D) \cap C^{1,2}(D) \cap C^{1,1}(\overline{D})$.

Справедливость сформулированной теоремы докажем методом Римана.

2. Функция Римана

Введем оператор M^*, сопряженный с оператором M:

$$M^* v \equiv -\left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y}\right) v + L^* v,$$

где

$$L^* v \equiv (av)_{xx} + (2bv)_{xy} + (cv)_{yy} - (dv)_x - (ev)_y + fv = 0.$$

Очевидно, что оператор M^* определен на функциях $v(x,t)$, имеющих следующую гладкость: $v(x,t) \in C^{1,1}(\overline{D})$, $v(x,t) \in C^{2,1}(D)$ и $v(x,t) \in C^{1,2}(D)$.

Определение 2. Назовем функцией Римана для уравнения (1) функцию $v(x,y) = v(x,y;\xi,\eta)$, являющуюся регулярным решением следующей задачи:

$$M^* v = 0; \tag{5}$$

$$v(\xi,y;\xi,\eta) = \omega_1(\xi,y), \quad v_x(\xi,y;\xi,\eta) = \exp\Bigl(-\frac{1}{\alpha}\int\limits_{\eta}^{y} a(\xi,t)\,dt\Bigr), \tag{6}$$

$$v(x,\eta;\xi,\eta) = \omega_2(x,\eta), \quad v_y(x,\eta;\xi,\eta) = \exp\Bigl(-\frac{1}{\beta}\int\limits_{\xi}^{x} c(t,\eta)\,dt\Bigr). \tag{7}$$

Здесь (ξ,η) — произвольная фиксированная точка из замкнутой области D, $\omega_1(\xi,y)$ и $\omega_2(x,\eta)$ являются решениями следующих задач Коши соответственно:

$$\beta\omega_{1yy}(\xi,y) - b(\xi,y)\omega_{1y}(\xi,y) + d(\xi,y)\omega_1(\xi,y) = 0,$$
$$\omega_1(\xi,\eta) = 0, \quad \beta\omega_{1y}(\xi,\eta) = 1; \tag{8}$$

$$\alpha\omega_{2xx}(x,\eta) - b(x,\eta)\omega_{2x}(x,\eta) + e(x,\eta)\omega_2(x,\eta) = 0,$$
$$\omega_2(\xi,\eta) = 0, \quad \alpha\omega_{2x}(\xi,\eta) = 1. \tag{9}$$

Очевидно, задачи (8) и (9) однозначно разрешимы.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* 1. *Тогда функция Римана* $v(x,y)=v(x,y;\xi,\eta)$ *уравнения* (1) *существует и единственна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть решение задачи (5)–(9) — функция $v(x,y)$ существует. Тогда, интегрируя уравнение (6) по x в пределах от ξ до x, по y от η до y и пользуясь первыми условиями из (6), (7), а также условиями (8) и (9), получим

$$-\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)v(x,y)+\int\limits_{\xi}^{x}\int\limits_{\eta}^{y}L^{*}v(t,\tau)\,d\tau dt=\alpha+\beta.$$

Используя интегрирование по частям и равенства

$$\alpha v_{xy}+a(x,y)v_x=0;\quad \beta v_{xy}+c(x,y)v_y=0,$$

вытекающие из равенств (6), (7), получим

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)v(x,y)=\frac{1}{2}\,K_0v(x,y)+\gamma(x,y).$$

Здесь

$$K_0v(x,y)=2b(x,y)v(x,y)+\int\limits_{\xi}^{x}\big[c_y(t,y)-e(t,y)\big]v(t,y)\,ds+$$
$$+\int\limits_{\eta}^{y}\big[a_x(x,\tau)-d(x,\tau)\big]v(x,\tau)\,d\tau+\int\limits_{\xi}^{x}\int\limits_{\eta}^{y}f(t,\tau)v(t,\tau)d\tau\,dt;$$

$$\gamma(x,y)=-(\alpha+\beta)+\alpha\exp\Big(-\frac{1}{\alpha}\int\limits_{\eta}^{y}a(\xi,t)\,dt\Big)+\beta\exp\Big(-\frac{1}{\beta}\int\limits_{\xi}^{x}c(t,\eta)\,dt\Big).$$

Основываясь на представлении общего решения уравнения (5) для определения функции $v(x,y)$, приходим к интегральному уравнению

$$v(x,y)\;=\;\frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}\int\limits_{\beta x-\alpha y}^{\alpha x+\beta y}K_0v(\bar{x}(s),\bar{y}(s))\,ds\;+\;\gamma_1(x,y),\tag{10}$$

где

$$\bar{x}(s)=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\big(\beta^2x-\alpha\beta y+\alpha s\big),\quad \bar{y}(s)=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\big(-\alpha\beta x+\alpha^2y+\beta s\big);$$

$\gamma_1(x,y)$ — известная функция.

Таким образом, задача (6)–(9) для уравнения (5) эквивалентна интегральному уравнению (10).

Нетрудно убедиться, что интегральный оператор

$$Kv=\frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}\int\limits_{\beta x-\alpha y}^{\alpha x+\beta y}K_0v(\bar{x}(s),\bar{y}(s))\,ds+\gamma(x,y)$$

действует из $C(\overline{D})$ в $C(\overline{D})$ с нормой $\|v\| = \max\limits_{\overline{D}} |v(x,y)|$.

Обозначим через $N = \max\{k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4\}$, где $k_1 = \max\limits_{\overline{D}} |c_y(x,y) - e(x,y)|$, $k_2 = \max\limits_{\overline{D}} |a_x(x,y) - d(x,y)|$, $k_3 = \max\limits_{\overline{D}} |f(x,y)|$, $k_4 = \max\limits_{\overline{D}} |2b(x,y)|$.

Пусть $v_1(x,y)$ и $v_2(x,y)$ — произвольные элементы $C(\overline{D})$. Тогда легко видеть, что для $v(x,y) = v_1(x,y) - v_2(x,y)$ имеет место оценка

$$|Kv| \leq \frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}\, N\,(\alpha x + \beta y)\big[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\big]\|v\|.$$

Далее,

$$|K^2 v| \leq \frac{1}{2^2(\alpha^2+\beta^2)^2}\,\frac{N^2}{2!}\,(\alpha x + \beta y)^2\big[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\big]^2\|v\|.$$

Продолжая этот процесс, для n-й степени оператора K получим

$$|K^n v| \leq \frac{1}{2^n(\alpha^2+\beta^2)^n}\,\frac{N^n}{n!}\,(\alpha x + \beta y)^n\big[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\big]^n\|v\|.$$

Отсюда видно, что можно подобрать n такое, что

$$\frac{1}{2^n(\alpha^2+\beta^2)^n}\,\frac{N^n}{n!}\,(\alpha l + \beta h)^n(l^n + h^n) < 1.$$

Следовательно, оператор K, в соответствии с обобщенным принципом сжатых отображений всегда имеет, и притом единственную, неподвижную точку. Эта неподвижная точка и есть решение уравнения (10). Теорема 2 доказана. □

Для функции Римана $v(x,y;\xi,\eta)$ справедливо следующие утверждение.

Лемма 1. *Если $d(x,y) < 0$, $e(x,y) < 0$, $\forall (x,y) \in D$, тогда для функции $v(x,y;\xi,\eta)$ справедливы неравенства*

$$\begin{aligned} &v(x,\eta;l,\eta) < 0,\ \ \forall x \in [0,l), \qquad \alpha v_x(0,\eta;l,\eta) > 1;\\ &v(\xi,y;\xi,h) < 0,\ \ \forall y \in [0,h), \qquad \beta v_y(\xi,0;\xi,h) > 1. \end{aligned} \tag{11}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя рассуждениям [8], рассмотрим задачу

$$\alpha v_{xx}(x,\eta;l,\eta) - b(x,\eta)v_x(x,\eta;l,\eta) + e(x,\eta)v(x,\eta;l,\eta) = 0, \tag{12}$$

$$v(x,\eta;l,\eta)\,|_{x=l} = 0, \quad \alpha v_x(x,\eta;l,\eta)\,|_{x=l} = 1; \tag{13}$$

Уравнение (12) запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\alpha p(x;l,\eta)\frac{\partial v_x(x,\eta;l,\eta)}{\partial x}\right] + q(x,\eta)v(x,\eta;l,\eta) = 0, \tag{14}$$

где

$$p(x;l,\eta) = \exp\Big[\int\limits_x^l b(t,\eta)\,dt\Big], \quad q(x,\eta) = p(x;l,\eta)e(x,\eta).$$

Пусть $v = v(x,\eta;l,\eta)$, $0 \leq x < l$ — решение уравнения (14), удовлетворяющее условиям (13). Тогда в силу принципа максимума и принципа Заремба–Жиро [8] из (14) получим $v(x,\eta;l,\eta) < 0$, $\forall x \in [0,l)$.

Интегрируя уравнение (14) в пределах от 0 до l и учитывая условия (13), имеем

$$\alpha p(x; l, \eta) v_x(0, \eta; l, \eta) \ = \ 1 + \int\limits_0^l q(t, \eta) v(t, \eta; l, \eta)\, dt.$$

Так как $v(x, \eta; l, \eta) < 0$ и $e(x, \eta) < 0$, то из последнего равенства следует $\alpha v_x(0, \eta; l, \eta) >$ > 1. □

Аналогично доказывается и неравенство (11).

3. Задача Гурса

Теперь рассмотрим характеристическую задачу: *найти функцию* $u(x, y)$, *являющуюся в области* D *решением уравнения* (1) *и удовлетворяющую начальным условиям* (2) *и граничным условиям*

$$u(0, y) = \mu_1(y), \quad u_x(0, y) = \mu_2(y), \quad 0 \le y \le h, \tag{15}$$

где $\mu_i(y)$ $(i = 1, 2)$ — пока неизвестные функции. Пусть выполняются следующие условия согласования:

$$\psi_1(0) = \mu_1(0), \quad \psi_1'(0) = \mu_2(0), \quad \psi_2(0) = \mu_1'(0), \quad \psi_2'(0) = \mu_2'(0),$$

и пусть $u(x, y)$, $v(x, y) \in C^{2,1}(D) \bigcap C^{1,2}(D) \bigcap C^{1,1}(\overline{D})$. Тогда имеет место равенство

$$vMu - uM^*v = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}. \tag{16}$$

Здесь

$$P = \alpha v u_{xy} - \alpha v_{xy} u - \beta v_y u_y + (av)u_x - (av)_x u + (bv)u_y - (bv)_y u + (dv)u;$$

$$Q = \beta v u_{xy} - \beta v_{xy} u - \alpha v_x u_x + (bv)u_x - (bv)_x u + (cv)u_y - (cv)_y u + (ev)u.$$

Предположим, что P, Q непрерывны в области $\overline{D}$, а P_x, Q_y непрерывны и ограничены в D. Проинтегрируем тождество (16) по области $D_0 = \{(\xi, \eta) : x_0 < \xi < x,\ y_0 < \eta < y\}$, имеем

$$\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} (vMu - uM^*v) d\xi d\eta = \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) d\xi d\eta. \tag{17}$$

С помощью функции Римана $v(x, y; \xi, \eta)$ из формулы (17) легко получим интегральное представление общего решения $u(x, y)$ уравнения (1) в области D.

$$u(x, y) = \alpha v_x(0, y; x, y) u(x_0, y) + \beta v_y(x, y_0; x, y) u(x, y_0) - \int\limits_{x_0}^{x} \big[\beta v(\xi, y_0; x, y) u_{xy}(\xi, y_0) +$$

$$+ c(\xi, y_0) v(\xi, y_0; x, y) u_y(\xi, y_0) + A(\xi; x, y) u_x(\xi, y_0) + B(\xi; x, y) u(\xi, y_0)\big]\, d\xi -$$

$$- \int\limits_{y_0}^{y} \big[\alpha v(x_0, \eta; x, y) u_{xy}(x_0, \eta) + a(x_0, \eta) v(x_0, \eta; x, y) u_x(x_0, \eta) + A_1(\eta; x, y) u_y(x_0, \eta) +$$

$$+ B_1(\eta; x, y)u(x_0, \eta)\big] \, d\eta + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} v(\xi, \eta; x, y) g(\xi, \eta) \, d\xi d\eta. \quad (18)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
A(\xi, x, y) &= -\alpha v_x(\xi, y_0; x, y) + b(\xi, y_0) v(\xi, y_0; x, y);\\
B(\xi; x, y) &= -\beta v_{xy}(\xi, y_0; x, y) - b(\xi, y_0) v_x(\xi, y_0; x, y) -\\
&\quad - c(\xi, y_0) v_y(\xi, y_0; x, y) - [b_x(\xi, y_0) + c(\xi, y_0) - e(\xi, y_0)] v(\xi, y_0; x, y);\\
A_1(\eta; x, y) &= -\beta v_y(x_0, \eta; x, y) + b(x_0, \eta) v(x_0, \eta; x, y);\\
B_1(\eta; x, y) &= -\alpha v_{xy}(x_0, \eta; x, y) - a(x_0, \eta) v_x(x_0, \eta; x, y) -\\
&\quad - b(x_0, \eta) v_y(x_0, \eta; x, y) - [a_x(x_0, \eta) + b_y(x_0, \eta) - d(x_0, \eta)] v(x_0, \eta; x, y).
\end{aligned}$$

Формулу (18) можно рассматривать как представление общего решения уравнения (1), если считать, что $u(x_0, y)$, $u_x(x_0, y)$, $u(x, y_0)$ и $u_y(x, y_0)$ — произвольные, непрерывно дифференцируемые функции.

Используя интегральное представление (18) при $x_0 = y_0 = 0$, учитывая условия (2) и (15), получим

$$\begin{aligned}
u(x, y) = \alpha v_x(0, y; x, y)\mu_1(y) + \beta v_y(x, 0; x, y)\psi_1(x) - \int\limits_0^x [\beta v(x, 0; \xi, y)\psi_2'(\xi) +\\
+ c(\xi, 0) v(\xi, 0; x, y)\psi_2(\xi) + A(\xi; x, y)\psi_1'(\xi) + B(\xi; x, y)\psi_1(\xi)] \, d\xi -\\
- \int\limits_0^y [\alpha v(0, \eta; x, y)\mu_2'(\eta) + a(0, \eta) v(0, \eta; x, y)\mu_2(\eta) + A_1(\eta; x, y)\mu_1'(\eta) +\\
+ B_1(\eta; x, y)\mu_1(\eta)] d\eta + \int\limits_0^x\int\limits_0^y v(\xi, \eta; x, y) g(\xi, \eta) \, d\xi d\eta. \quad (19)
\end{aligned}$$

Получено представление (19) в предположении существования решения задачи Гурса (2) и (15) для уравнения (1).

Заметим, что достаточно установить существование решения уравнения (1) при однородных краевых условиях $\psi_i(x) = 0$, $\mu_i(y) = 0$, $i = 1, 2$. В самом деле, введем новую неизвестную функцию $z(x, y)$ по формуле $z(x, y) = u(x, y) - u_0(x, y)$, где

$$u_0(x, y) = \mu_1(y) + x[\mu_2(y) - \psi_1'(0)] + \psi_1(x) + y[\psi_2(x) - \psi_2(0)] - \psi_2'(0)xy - \psi_1(0),$$

которая удовлетворяет уравнению (1) с другой правой частью и однородным условиям

$$z(0, y) = z_x(0, y) = z(x, 0) = z_y(x, 0) = 0.$$

Пользуясь свойством функции Римана, непосредственной проверкой легко убедиться, что функция, определенная формулой (19), удовлетворяет уравнению (1) и однородным граничным условиям.

Таким образом, доказана однозначная разрешимость задачи Гурса (2) и (15) для гиперболического уравнения третьего порядка.

4. Сведение задачи (1)–(4) к интегральным уравнениям

Интегральное представление (19) можно записать в виде

$$u(x,y)=\big[\alpha v_x(0,y;x,y)-A_1(y;x,y)\big]\mu_1(y)-\alpha v(0,y;x,y)\mu_2(y)+\\ +\int\limits_0^y[A_{1y}(\eta;x,y)-B_1(\eta;x,y)]\mu_1(\eta)d\eta+\\ +\int\limits_0^y\big[\alpha v_y(0,\eta;x,y)-a(0,\eta)v(0,\eta;x,y)\big]\mu_2(\eta)\,d\eta+F(x,y),\quad (20)$$

где

$$F(x,y)=\big[\beta v_y(x,0;x,y)-A(x;x,y)\big]\psi_1(x)-\beta v_x(x,0;x,y)\psi_2(x)+\\ +\beta v(0,0;x,y)\psi_2(0)+\alpha v(0,0;x,y)\psi_1'(0)+\\ +\big[A_1(0;x,y)+A(0;x,y)\big]\psi_1(0)+\int\limits_0^x\big[A_x(\xi;x,y)-B(\xi;x,y)\big]\psi_1(\xi)\,d\xi+\\ +\int\limits_0^x\big[\beta v_x(\xi,0;x,y)-c(\xi,0)v(\xi,0;x,y)\big]\psi_2(\xi)\,d\xi+\int\limits_0^x\int\limits_0^y v(\xi,\eta;x,y)g(\xi,\eta)d\xi\,d\eta.$$

Так как функции $\mu_1(y)$, $\mu_2(y)$ нам неизвестны, то выясним, можно ли найти их так, чтобы решение задачи Гурса удовлетворяло условиям (3) и (4).

В силу нелокальных условий (3) и (4) имеем

$$\mu_1(y)=\sum_{k=1}^n\alpha_k(y)u(x_k,y)+\varphi_1(y),\quad 0\le y\le h,\quad (21)$$

$$\mu_2(y)=\sum_{k=1}^n\beta_k(y)u_x(x_k,y)+\varphi_2(y),\quad 0\le y\le h.\quad (22)$$

В формуле (20) полагаем поочередно $x=x_k$, и полученное при этом выражение почленно умножим на $\alpha_k(y)$. Вследствие (21) находим:

$$A_{11}(y)\mu_1(y)+A_{12}(y)\mu_2(y)=\int\limits_0^y\big[k_{11}(\eta,y)\mu_1(\eta)+k_{12}(\eta,y)\mu_2(\eta)\big]\,d\eta+f_1(y),\quad (23)$$

где

$$A_{11}(y)=1-\sum_{k=1}^n\alpha_k(y)[\alpha v_x(0,\eta;x_k,y)-A_1(\eta;x_k,y)],\quad A_{12}(y)=\alpha\sum_{k=1}^n\alpha_k(y)v(0,\eta;x_k,y),$$

$$k_{11}(\eta,y)=\sum_{k=1}^n\alpha_k(y)[A_{1y}(\eta;x_k,y)-B_1(\eta;x_k,y)],$$

$$k_{12}(\eta,y)=\sum_{k=1}^n\alpha_k(y)[\alpha v_y(0,\eta;x_k,y)-a(0,\eta)v(0,\eta;x_k,y)],$$

и $f_1(y)=\sum\limits_{k=1}^n\alpha_k(y)F(x_k,y)$ — известная функция.

Продифференцировав (20) по x и умножив почленно на $\beta_k(y)$, при $x = x_k$, в силу нелокального условия (22) убеждаемся в справедливости следующего равенства:

$$A_{21}(y)\mu_1(y) + A_{22}(y)\mu_2(y) = \int\limits_0^y \left[k_{21}(\eta, y)\mu_1(\eta) + k_{22}(\eta, y)\mu_2(\eta)\right] d\eta + f_2(y). \qquad (24)$$

Здесь

$$A_{21}(y) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k(y)\frac{\partial}{\partial x}[\alpha v_x(0, y; x_k, y) - A_1(y; x_k, y)],$$

$$A_{22}(y) = 1 - \alpha\sum_{k=1}^{n} \beta_k(y) v_x(0, y; x_k, y),$$

$$k_{21}(\eta, y) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k(y)\frac{\partial}{\partial x}[A_{1y}(\eta; x_k, y) - B_1(\eta; x_k, y)],$$

$$k_{22}(\eta, y) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k(y)\frac{\partial}{\partial x}[\alpha v_y(0, \eta; x_k, y) - a(0, \eta)v(0, \eta; x_k, y)],$$

и $f_2(y) = \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k(y)\dfrac{\partial}{\partial x}F(x_k, y)$ — известная функция.

Таким образом, для определения функций $\mu_1(y)$, $\mu_2(y)$ получили систему интегральных уравнений. Следовательно, вопрос о разрешимости изучаемой нелокальной задачи редуцирован к вопросу о разрешимости системы уравнений (23) и (24).

Введя обозначения

$$P(y) = [A_{ij}(y)], \quad K(\eta, y) = [k_{ij}(\eta, y)], \quad 1 \le i, j \le 2; \quad 0 \le \eta \le y; \quad 0 \le y \le h,$$

систему интегральных уравнений (23)–(24) перепишем в виде

$$P(y)\begin{pmatrix} 1r\mu_1(y) \\ \mu_2(y) \end{pmatrix} = \int\limits_0^\eta K(\eta, y)\begin{pmatrix} 1r\mu_1(\eta) \\ \mu_2(\eta) \end{pmatrix} d\eta + \begin{pmatrix} 1rf_1(y) \\ f_2(y) \end{pmatrix}, \quad 0 \le y \le h. \qquad (25)$$

Уравнение (25) является системой интегральных уравнений Вольтерра третьего рода [6]. На основании лемм, доказанных в работах [8; 13], легко убедиться, что

$$\det|P(y)| \ne 0, \quad \forall\, y \in [0; h].$$

В силу условий теоремы 1 заключаем, что функции $f_1(y)$, $f_2(y)$ и элементы матрицы $P(y)$, $K(\eta, y)$ являются непрерывно-дифференцируемыми функциями, тогда решение интегрального уравнения (16) существует и единственно (см., например, [7]).

Таким образом, искомые функции $\mu_1(y)$ и $\mu_2(y)$ найдены, и, следовательно, нелокальная задача (1)–(4) имеет единственное решение, которое выражается формулой (5). Теорема 1 доказана. □

Список литературы

1. *Баренблатт Г. Н., Желтов Ю. П., Кочина И. Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Приклад. мат. и мех. 1960. Т. 24, № 5. С. 852–864.

2. *Дзекцер Е. С.* Уравнения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах // Докл. АН СССР. 1975. Т. 220, № 3. С. 540–543.

3. *Чудновский А. Ф.* Теплофизика почв. М.: Наука, 1976.

4. *Руденко О. В., Солуян С. Н.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.

5. *Джураев Т. Д., Попелек Я.* О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 10. С. 1734–1745.

6. *Нахушев А. М.* Задачи со смешением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.

7. *Жегалов В. И., Миронов А. Н.* Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казань, 2001.

8. *Шхануков М. Х.* О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникаюших при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 4. С. 689–699.

9. *Джохадзе О. М.* Влияние младших членов на корректность постановки характеристических задач для гиперболических уравнений третьего порядка // Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 4. С. 517–528.

10. *Colton D.* Pseudo Parabolic Equations in One Space Variable // J. of Differential Equations. 1972. Vol. 12. No. 3. P. 559–565.

11. *Rundell W.* The Construction of Solutions to Pseudoparabolic Equations in Noncylindrical Domains // J. of Differential Equations. 1978. Vol. 27. No. 3. P. 394–404.

12. *Водахова В. А.* Краевые задачи с нелокальным условием А. М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 2. С. 280–285.

13. *Керефев А. А., Плотникова Е. В.* Нелокальные задачи для одного уравнения третьего порядка // Владикавк. мат. журн. 2005. Т. 7, № 1. С. 51–60.

14. *Зикиров О. С.* Локальные и нелокальные краевые задачи для гиперболических уравнений третьего порядка // Современная математика и ее приложения. 2011. Т. 68. С. 101–120.

Материал поступил в редколлегию 25.12.2015

Адрес автора

ЗИКИРОВ Обиджан Салижанович

Национальный университет Узбекистана

ул. Университетская, 4, Ташкент, 100174,

Республика Узбекистан

zikirov@yandex.ru, zikirov_os@nuu.uz