Модели тройных накрытий

Э. Креш, Ю. Чинкель

Ключевые слова: алгебраические многообразия, тройные накрытия.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12242

1. Введение. Пусть k – поле характеристики 0. Хорошо известно, что всякий морфизм проективных многообразий $\psi\colon T \to S$ над k, конечный степени 2 в общей точке, можно дополнить коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd} \widetilde{T} \arrow[r, dashed, "\varrho_T"] \arrow[d, "\widetilde{\psi}"'] & T \arrow[d, "\psi"] \\ \widetilde{S} \arrow[r, "\varrho_S"] & S \end{tikzcd} \tag{1}$$

с гладкими проективными многообразиями $\widetilde{S}$ и $\widetilde{T}$, таким образом, что ϱ_S является бирациональным морфизмом, ϱ_T является бирациональным отображением и $\widetilde{\psi}$ является конечным накрытием степени 2. Множество точек ветвления конечного накрытия степени 2 гладких проективных многообразий является гладким дивизором.

В этой заметке мы докажем аналогичную теорему для тройных накрытий, над совершенным полем, характеристика которого не равна 2 или 3. Хорошие модели тройных накрытий важны для конструкции моделей расслоений (над базой любой размерности), в тех случаях, когда группа симметрий геометрического общего слоя допускает сюръективный гомоморфизм на симметрическую группу $\mathfrak{S}_3$, например, для расслоений на поверхности дель Пеццо степени 6 [1]–[4].

Есть обширная литература про тройные накрытия поверхностей, см. [5]–[9]. В [8] доказана теорема для тройных накрытий поверхностей, похожая на теорему в этой заметке; стратегия доказательства связна с классическим решением кубического уравнения. Наша стратегия связана с геометрией и с детальным исследованием ветвления в коразмерности 1 и 2.

Мы строим $\widetilde{\psi}\colon \widetilde{T} \to \widetilde{S}$ таким образом, что дивизор ветвления является гладким. С другой стороны, в геометрических приложениях встречаются много (нециклических) накрытий гладких проективных многообразий степени 3, у которых дивизор ветвления имеет особые точки, например 6-го порядка с 6 каспами, лежащими на конике, для общей проекции гладкой кубичной поверхности [10]. Такое накрытие вполне разветвлено (геометрически, только один прообраз в T) только над каспами, но после применения нашей процедуры станет таким над целыми компонентами дивизора ветвления.

Как показано в [11; Exa. 3.1], таких моделей накрытий поверхностей степени $\geqslant 4$ как в (1) не существуют в общем случае.

2. Конечные накрытия и ветвление. Пусть k поле и S гладкое многообразие над k, т.е. отделимая геометрически целая схема конечного типа над k. Нормализация S в конечном расширении поля $k(S)$ дает каноническое соответствие между конечными расширениями $k(S)$ и связными нормальными k-схемами с конечным сюръективным морфизмом на S. Множество точек, где морфизм $T \to S$ не этален, является замкнутым подмножеством $Z \subset T$, которое

Работа второго автора отчасти поддержана грантом NSF 1601912 и Лабораторией зеркальной симметрии, НИУ ВШЭ (грант № 14.641.31.0001).

© Э. Креш, Ю. Чинкель, 2019

- равно T тогда и только тогда, когда ассоциированное расширение $k(S)$ не сепарабельно,
- имеет коразмерность 1 или пусто по теореме чистоты Зарисского–Нагаты в противном случае [12; теорема X.3.1].

Следовательно, если существует дивизор с простыми нормальными пересечениями $D \subset S$, $D = D_1 \cup \dots \cup D_n$, с неприводимыми D_i для всех i, такой, что $T \times_S (S \smallsetminus D) \to S$ этально, то множество точек ветвления (образ Z в S) имеет форму $\bigcup_{i \in I} D_i$ для некоторых $I \subset \{1, \dots, n\}$.

После выбора конечного расширения $k(S)$, говоря о ветвлении, мы имеем ввиду ветвление $T \to S$, где T нормализация S в этом расширении $k(S)$.

3. Основной результат. Пусть k совершенное поле характеристики, не равной 2 или 3, S гладкое проективное многообразие над k и T проективное многообразие с морфизмом на S степени 3 в общей точке. Если расширение полей $k(T)/k(S)$ циклично, то такой-же аргумент, как и для двойных накрытий, дает коммутативную диаграмму (1), где $\widetilde{\psi}\colon \widetilde{T} \to \widetilde{S}$ цикличное накрытие гладких проективных многообразий степени 3 с ветвлением над гладким дивизором $\widetilde{S}$. Как и в случае двойных накрытий, необходимо разрешение особенностей на S; например, достаточно иметь:

(R) вложенное разрешение особенностей дивизоров на S последовательностью раздутий с гладким центром.

Конечно, это имеет место, когда характеристика k равна 0 (Хиронака). Когда характеристика k положительна, это имеет место для $\dim(S) \leqslant 3$ (тривиально для $\dim(S) \leqslant 2$, теорема Абьянкара для $\dim(S) = 3$).

Теорема 1. *Пусть k совершенное поле характеристики, не равной 2 или 3, S гладкое проективное многообразие над k и $\psi\colon T \to S$ морфизм проективных многообразий, конечный степени 3 в общей точке. Предположим, что* (R) *выполнено для S. Тогда существует коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{T} \arrow[r, dashed, "\varrho_T"] \arrow[d, "\widetilde{\psi}"'] & T \arrow[d, "\psi"] \\ \widetilde{S} \arrow[r, "\varrho_S"] & S \end{tikzcd}$$

с гладкими проективными многообразиями $\widetilde{S}$ и $\widetilde{T}$, таким образом, что

- *ϱ_S бирациональный морфизм;*
- *ϱ_T бирациональное отображение;*
- *$\widetilde{\psi}$ конечное накрытие степени 3, с ветвлением над гладким дивизором в $\widetilde{S}$.*

Доказательство. Как уже упомянуто, в случае цикличного $k(T)/k(S)$ это достигается с помощью (R), превращая дивизор ветвления в дивизор с простыми нормальными пересечениями и повторно раздувая компоненты пересечений пар компонент дивизора ветвления, достигая гладкости дивизора ветвления. Существенным для второго шага является наблюдение, что компонента Y пересечения $D_i \cap D_j$, $i \neq j$, компонент дивизора ветвления с простыми нормальными пересечениями $D = D_1 \cup \dots \cup D_n$ (полученным на первом шагу) может быть одной из двух типов, в зависимости от того, содержит ли дивизор ветвления для $k(T)/k(S)$ раздутия $B\ell_Y S$ исключительный дивизор раздутия как одну из компонент. Пусть ℓ, соответственно m, обозначает число компонент $Y \subset D_i \cap D_j$, для некоторых $i \neq j$, для которых исключительный дивизор $B\ell_Y S$ является, или нет, компонентой дивизора ветвления. (Для простоты, мы продолжаем обозначать S, даже если на первом шагу надо бирационально преобразовывать.) Раздувая Y, для которого исключительный дивизор не

является компонентой дивизора ветвления, когда это возможно, а в противном случае, раздувая любой Y, мы получаем, для $(\ell, m) \neq (0,0)$ пару (ℓ', m'), для $S' := B\ell_Y S$, которая меньше, чем (ℓ, m), в лексиграфическом порядке.

В нецикличном случае мы применяем такой-же первый шаг, превращая дивизор ветвления в дивизор с простыми нормальными пересечениями, с помощью (R). Теперь дивизор ветвления имеет компоненты двух видов: некоторые, например $D_1 \cup \dots \cup D_n$, с простым ветвлением, и другие, $D'_1 \cup \dots \cup D'_{n'}$ с полным ветвлением. Мы будем считать, что все D_i и $D'_{i'}$ неприводимы.

Дискриминант $k(T)/k(S)$ определяет квадратичное расширение $k(S)$ с ветвением в $D_1 \cup \dots \cup D_n$. Раздувая пересечения пар компонент, мы добиваемся того, что $D_i \cap D_j = \varnothing$, для $i \neq j$.

Мы утверждаем, что $D_i \cap D'_{i'} = \varnothing$, для всех i и i'. Это следует из того, что прообраз $D'_{i'}$ в двойном дискриминантном накрытии неприводим. Мы рассуждаем от противного, заменяя S строгой гензелизацией локального кольца S в общей точке одной из компонент $D_i \cap D'_{i'}$. Мы по-прежнему имеем кубическое расширение поля вычетов общей точки, с нетривиальным дискриминантом, что дает циклическое кубическое расширение дискриминантного накрытия. Оно должно происходить из циклического кубического расширения внизу, заменой базы к двойному накрытию, и мы получаем противоречие.

Может случиться, что $D'_{i'} \cap D'_{j'} \neq \varnothing$, для некоторых $i' \neq j'$, но тогда, как в начале доказательства, мы исправим это раздутием компонент пересечений $D'_{i'} \cap D'_{j'}$. Мы получим гладкий дивизор ветвления и, следовательно, гладкую модель накрытия.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ж.-Л. Кольо-Телен, Н. А. Карпенко, А. С. Меркурьев, *Алгебра и анализ*, **19**:5 (2007), 159–178. **[2]** M. Blunk, *J. Algebra*, **323**:1 (2010), 42–58. **[3]** N. Addington, B. Hassett, Yu. Tschinkel, A. Várilly-Alvarado, *Cubic Fourfolds Fibered in Sextic del Pezzo Surfaces*, 2016, arXiv: 1606.05321. **[4]** A. Kuznetsov, *Derived Categories of Families of Sextic del Pezzo Surfaces*, 2017, arXiv: 1708.00522. **[5]** P. du Val, *J. London Math. Soc.*, **8**:3 (1933), 199–206. **[6]** R. Miranda, *Amer. J. Math.*, **107**:5 (1985), 1123–1158. **[7]** H. Tokunaga, *J. Math. Kyoto Univ.*, **31**:2 (1991), 359–375. **[8]** S.-L. Tan, *Geometry and Nonlinear Partial Differential Equations*, AMS/IP Stud. Adv. Math., **29**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, 143–164. **[9]** T. Shirane, *Kodai Math. J.*, **37**:2 (2014), 330–340. **[10]** O. Zariski, *Amer. J. Math.*, **51**:2 (1929), 305–328. **[11]** T. Shirane, *Kyushu J. Math.*, **64**:2 (2010), 297–322. **[12]** A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental*, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

Э. Креш
Universität Zürich, Switzerland
E-mail: andrew.kresch@math.uzh.ch

Поступило
05.10.2018
Принято к публикации
14.11.2018

Ю. Чинкель
Courant Institute of Mathematical Sciences, USA;
Simons Foundation, USA
E-mail: tschinkel@cims.nyu.edu