V. N. Kublanovskaya, The contribution of V. N. Faddeeva and D. K. Faddeev in the development of computational methods in linear algebra,
Algebra i Analiz, 1990, Volume 2, Issue 6, 34–39

В.Н.Кублановская

ВКЛАД В.Н.ФАДДЕЕВОЙ И Д.К.ФАДДЕЕВА В РАЗВИТИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Мои заметки посвящены тому неоценимому вкладу, который внесли Вера Николаевна и Дмитрий Константинович Фаддеевы в развитие вычислительных методов линейной алгебры. Большинство работ в этой области написаны ими совместно.

Вычислительными методами алгебры Вера Николаевна и Дмитрий Константинович стали заниматься на заре развития компьютерной техники и были у истоков возникновения численных методов. Их деятельность в области вычислительной алгебры будем условно разделять на два направления. Первое направление - просветительное. К нему отнесем монографии, обзорные статьи и доклады, прочитанные на Международных и Всесоюзных форумах математиков-вычислителей, библиографические указатели. Второе направление - собственные исследования устойчивости численного решения систем линейно-алгебраических уравнений и оценки результатов вычислений. Повторяю, что это деление чисто условное, так как то, что относится к просветительной деятельности, является неоценимым вкладом как в развитие численных методов, так и в обучение поколений математиков-вычислителей.

Остановимся коротко на первом направлении. Написаны три монографии „Вычислительные методы линейной алгебры". Первая монография вышла в 1950 г., была признана одной из лучших книг, появившихся в этой области. Важное место в ней уделено понятию нормы вектора и матрицы, а также их применению к установлению сходимости итерационных процессов. Без преувеличения можно сказать, что нормы как средство исследования сходимости итерационных процессов вошли в практику вычислительной алгебры только после появления этой монографии.

Последующие две монографии „Вычислительные методы линейной алгебры" - 1960 г. издания и переработанная и дополненная 1963 г. издания - являются фундаментальными исследованиями по вычислительным методам линейной алгебры. В них представлена большая группа алгоритмов и методов решения задач алгебры, даны глубокий анализ принципов построения методов, их систематизация. Многие методы получили дальнейшее развитие и улучшение. Все три монографии переведены на многие языки народов мира и не утратили свою актуальность до настоящего времени.

Достойным продолжением монографии Веры Николаевны и Дмитрия Константиновича Фаддеевых являются их обзорные доклады на съездах, Всесоюзных конференциях и обзорные статьи по вычислительным методам алгебры и параллельным вычислениям в линейной алгебре, а также библиографические указатели по вычислительным методам линейной алгебры [4-10]. Каждый из обзоров содержит глубокий анализ методов, принципы их построения. Вере Николаевне и Дмитрию Константиновичу Фаддеевым было свойственно удивительное чувство нового, перспективного. Их выступления, книги, статьи являются не только прекрасными путеводителями в том лабиринте численных методов, какое имеется на сегодня в литературе, но и содержит много идей, дающих пищу для творческих размышлений.

Перейдем ко второму направлению - к собственнонаучным исследованиям Веры Николаевны и Дмитрия Константиновича Фаддеевых по вычислительным методам алгебры. Эти исследования относятся в основном к решению линейных алгебраических систем (главным образом плохообусловленных), а также к средствам оценивания результатов вычислений.

Все, кто встречался с решением линейных систем, знают, какую неприятность несут плохообусловленные системы для вычислителя. Плохообусловленными признано называть системы, у которых нет непрерывной зависимости погрешности решения от погрешности исходных данных. Исследованием плохообусловленных систем занимались многие выдающиеся математики, в том числе и Вера Николаевна и Дмитрий Константинович Фаддеевы [11-15]. В качестве количественной меры обусловленности предложены так называемые числа обусловленности. В частности, Дмитрием Константиновичем Фаддеевым было предложено H-число обусловленности: $H(A)=\frac{\mu_1}{\mu_n}$, характеризующее разброс сингулярных чисел μ_i матрицы системы. В терминах сингулярного разложения [11-13] матрицы, т.е. разложения вида

$$A = V\Sigma U^T,$$

где $\sum = \mathrm{diag}\{\mu_1,\dots,\mu_n\}$, $\mu_1\geq\dots\geq\mu_n$, $U=[u_1,\dots,u_n]$ - собственные векторы A^TA, $V=[v_1,\dots,v_n]$ - собственные векторы AA^T, проведен анализ плохообусловленных систем. Показано, что если сингулярные числа имеют разброс и делятся на группы больших и малых, то решение системы „разбалтывается" в направлении векторов, отвечающих группе малых сингулярных чисел. В то же время проекция решения в подпространство, натянутое на группу векторов U_1, отвечающих большим сингулярным числам, остается устойчивой к ошибкам в исходных данных (и ошибкам округления). Исследования Веры Николаевны и Дмитрия Константиновича Фаддеевых показали, какую информацию несет плохообусловленная система.

Две последующие статьи [14,15] посвящены масштабированию матрицы системы, улучшающему ее обусловленность.

В [14] ставится и решается задача нахождения двух диагональных матриц D_1 и D_2, доставляющих минимум числу обусловленности Тюринга для матрицы D_1AD_2. В [15] рассматривается задача на отыскание диагональной матрицы $D>0$, доставляющей $\min\|D^{-1}AD\|_2$.

Перейдем к изложению результатов исследования Верой Николаевной и Дмитрием Константиновичем Фаддеевыми в области оценивания решения конечной вычислительной задачи.

Всех вычислителей волнует вопрос об устойчивости выбранного алгоритма счета и об оценке результата вычислений. Этому вопросу посвящено много работ, начиная от основополагающих работ фон Неймана и Гольдштейна. Большой вклад внесен Уилкинсоном, Голубом, Бауэром, В.В.Воеводиным, А.Н.Тихоновым и, конечно, Верой Николаевной и Дмитрием Константиновичем Фаддеевыми.

Погрешность результата вычислений зависит от устойчивости самой задачи, т.е. от влияния наследственных ошибок (ошибок входных данных), если считать, что все вычисления выполняются точно, и от устойчивости выбранного алгоритма счета, когда вычисления идут в условиях ошибок округления.

Работы [16-19] Веры Николаевны и Дмитрия Константиновича Фаддеевых посвящены развитию нового подхода к оценке наследственной погрешности конечной вычислительной задачи.

Для разных целей оценки могут осуществляться различными способами и, в частности, с помощью различных норм. Идеальной оценкой было бы точное описание области, содержащей результаты вычислений задачи в предположении, что область изменения исходных данных характеризуется точностью их задания и известна. При точном описании области решений можно считать, что вся информация, содержащаяся во входных данных, будет перенесена в решение.

Но описание естественной области и ее оценка с помощью естественных норм - задача очень трудная. Вера Николаевна и Дмитрий Константинович Фаддеевы предлагают применять для этой цели эллиптические нормы (как наиболее близкие к естественным), специально подобранные для данной задачи. Входные данные и результат вычислений ими рассматриваются как координаты векторов в подходящих векторных пространствах. Вычислительная задача интерпретируется как отображения из пространства данных в пространство вычисленных векторов, при этом предполагается, что погрешность результата является линейной функцией ошибок входных данных. В этих предположениях предлагается способ построения подходящих эллиптических норм с помощью так называемой сопутствующей матрицы. Этот способ имитирует вероятностные оценки линейной вероятностной теории погрешности. Исследована связь между сопутствующей и корреляционной матрицами. В терминах сопутствующих матриц рассмотрен способ перехода от норм, в которых заданы исходные данные, к эллиптическим нормам. Выяснена возникающая при этом потеря информации.

Три статьи [20-22] относятся к решению систем линейных алгебраических уравнений общего вида. В статьях [20,21] (в соавторстве с В.Н.Кублановской) с геометрических позиций освещены вопросы, связанные с решением систем с прямоугольными матрицами. Независимо от работ американского ученого Голуба предложен алгоритм факторизации произвольной матрицы на левую трапецевидную матрицу с некоторым предписанным расположением элементов и матрицу из ортонормированных столбцов (нормализованное разложение). Установлена связь между сингулярными числами исходной матрицы и диагональными элементами левой трапецевидной матрицы. С использованием нормализованного разложения предложены устойчивые алгоритмы решения систем с прямоугольными матрицами (построение псевдообратной матрицы), а также алгоритм вычисления устойчивой проекции решения плохообусловленной системы.

В статье [22] Вера Николаевна и Дмитрий Константинович Фаддеевы предлагают новую концепцию оценивания качества результата численного решения систем линейных алгебраических уравнений в зависимости от качества задания входных данных. Основные идеи этой концепции состоят в следующем. Предлагается рассматривать три ситуации: школьная (входные данные заданы точно), регулярная (входные данные заданы не точно, но их вариация далека от критической) и нерегулярная, когда вариация входных данных близка или совпадает с критической, приводящей к качественному изменению задачи.

В школьной ситуации характер решения определяется соотношениями между числами, характеризующими размеры матрицы системы, и ее рангом.

В регулярной ситуации перед исследователем стоят две задачи:

1) учесть влияние наследственных ошибок на результат, т.е. оценить область, которую пробегает идеальное решение в предположении, что входные данные изменяются в области, характеризующей точность их задания;

2) вычислить с необходимой точностью решение задачи с „замороженными" входными данными, т.е. считать их точно заданными.

Для решения первой задачи - учета наследственной ошибки - рекомендуется применить способ оценки через специально построенные эллиптические нормы, о котором речь шла выше. Отмечается, что для решения второй задачи - построение решения замороженной системы - разработано большое количество прямых и итерационных алгоритмов. При их проведении приходится работать в условиях ошибок округления. Для оценки влияния этих ошибок на результат в литературе описано несколько подходов - обратный анализ ошибок округления, применение интервальной арифметики, вероятностный анализ ошибок округления и другие. Повышение разрядности вычислений как для всех вычислений, так и для частичных на особенно ответственных этапах позволяет снижать влияние ошибок округления на результат. Авторы надеются, что быстрое развитие вычислительной техники позволит широко использовать вычисления с повышенной точностью, так что ошибками округления можно будет пренебречь. Кроме того, вторым средством уменьшения влияния ошибок округления является применение итерационных уточнений по результатам вычислений, которому авторы придают большое значение.

Отмечается, что в *нерегулярной ситуации* не может идти речь о построении сколь-нибудь удовлетворительного точного решения. Обычно отыскивается лишь объект, близкий к решению в каком-либо обобщенном смысле и устойчивый к малым вариациям входных данных. Здесь следует различать два случая.

1) Между синуглярными числами матрицы имеется разрыв на группы больших и малых. В этом случае систему рекомендуется рассматривать как вполне недоопределенную, решение рассматривать как обобщенно нормальное и находить его, используя или

сингулярное, или нормализованное разложение, полагая малые сингулярные числа нулю.

2) Между сингулярными числами матрицы системы нет четкого разрыва на большие и малые. В этом случае систему следует считать некорректной и для отыскания устойчивого объекта надо применить концепцию регуляризации, разработанную А. Н. Тихоновым и его учениками.

Из других работ Д. К. Фаддеева следует отметить [23,24]. В [23] исследуются свойства согласованности и мультипликативности для норм в пространствах полиномиальных форм от векторов, принадлежащих конечномерным пространствам с векторными нормами. В [24] предлагается способ вложения алгебры матриц меньшего порядка в алгебру матриц большего порядка, который может быть использован для аппроксимации больших задач меньшими как при решении систем, так и в спектральной задаче матриц.

Список литературы

[1] Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.; Л., Гостехиздат, 1950. 240 с.

[2] Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Л.: Физматгиз, 1960. 656 с.

[3] Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Л.: Физматгиз, 1963. 734 с.

[4] Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры // Тр. 3-го Всесоюзн. мат. съезда, Т.3. М., 1958.

[5] Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры // Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. 1975. Т.54. С.3-228.

[6] Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Взгляд на развитие вычислительных методов линейной алгебры // Вычислительные методы линейной алгебры. М., 1977. С.4-14.

[7,8] Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Параллельные вычисления в линейной алгебре // Кибернетика. 1977. N 6. С.28-40; ЛОМИ АН СССР. Препринт Р-6-81. Л., 1981. 47 с.

[9] Фаддеева В.Н., Кузнецов Ю.А., Грекова Г.Н., Долженкова Т.А. Вычислительные методы линейной алгебры // Библиографический указатель 1828-1974 гг. Новосибирск, 1976. 418 с.

[10] Фаддеева В.Н., Икрамов Х.Д., Мейник Е.А., Фурса Т.Г. Вычислительные методы линейной алгебры // Бибилиографический указатель 1975-1980 гг. Л., 1982. 344 с.

[11] Фаддеев Д.К. Об обусловленности матриц // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1959. Т.53. С.387-391.

[12] Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. О плохообусловленных системах линейно-алгебраических уравнений // Журн. вычисл. мат-ки и мат. физики. 1961. Т.1, N 3. С.412-417.

[13] Фаддеева В.Н. Сдвиг для систем с плохообусловленными матрицами // Журн. вычисл. мат-ки и мат. физики. 1965. Т.5, N 5. С.907-911.

[14] Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Задачи масштабирования для линейных систем // Современные численные методы: Материалы Междунар. летней школы, 1966. 1968. С.76-84.

[15] Фаддеева В.Н. О некоторых экстремальных задачах для матричных норм // Журн. вычисл. мат-ки и мат. физики. 1967. Т.7, N 2. С.401-404.

[16] Faddeev D.K., Faddeeva V.N. Stability in linear algebra problems // Proc. IFIP Congr. 68 Edinburgh, 1968. 1969. P.33-39.

[17] Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Естественные нормы в алгебраических процессах // Вопросы точности и эффективности вычислительных алгоритмов: Тр. симпозиума, 1. Киев. 1969. С.122-141.

[18] Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Сопутствующая матрица и оценивание конечной вычислительной задачи // Вычислительные методы линейной алгебры. Новосибирск, 1973. С.4-10.

[19] Фаддеев Д.К. Об оценке области, содержащей решение системы линейных алгебраических уравнений // Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. 1979. Т.90. С.227-228.

[20] Фаддеев Д.К., Кублановская В.Н., Фаддеева В.Н. Линейные алгебраические системы с прямоугольными матрицами //Современные численные методы: Материалы Междунар. летней школы. Киев, 1966. 1968. С.16-75.

[21] Фаддеев Д.К., Кублановская В.Н., Фаддеева В.Н. О решении линейно-алгебраических систем с прямоугольными матрицами // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1968. Т.96. С.76-92.

[22] Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. К вопросу о решении линейно-алгебраических систем // Журн. вычисл. мат-ки и мат. физики. 1974. Т.14, N 3. С.539-558.

[23] Фаддеев Д.К. О нормах в пространствах полиномиальных форм // Журн. вычисл. мат-ки и мат. физики. 1972. Т.12, N 2. С.521-525.

[24] Фаддеев Д.К. Об одной алгебре матриц и об ее применениях к вычислительным задачам // Вычислительные методы линейной алгебры. Новосибирск, 1973. С.11-14.

Ленинградское отделение
Математического института им.В.А.Стеклова АН СССР
191011, наб.Фонтанки, д.27

Поступило 10 мая 1990 г.