



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

N. I. Sidnyaev, N. M. Gordeeva, The asymptotic theory of flows for the near wake of an axisymmetric body, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2014, Volume 17, Number 4, 88–97

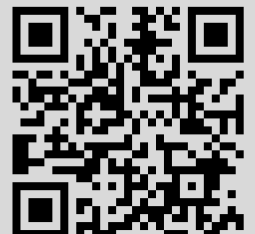
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.81

March 15, 2025, 07:37:18



## АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТЕЧЕНИЙ ДЛЯ БЛИЖНЕГО СЛЕДА ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА

Н. И. Сидняев, Н. М. Гордеева

Получено решение задачи о ближнем следе за тонким цилиндром в несжимаемом ламинарном потоке в виде асимптотического ряда. Для нахождения решения был использован метод разложения в ряды решений для внутренней и внешней частей течения. Влияние циркуляционного течения не учитывалось. Найденное решение применимо только на ограниченном расстоянии от кормовой части тела. Наблюдаются существенные отличия осесимметричного течения от соответствующей задачи о двумерном следе за плоской пластиной.

**Ключевые слова:** асимптотические методы, ближний след, обтекание, осесимметричное тело, дифференциальное уравнение, ряды, пограничный слой.

**Введение.** Одна из фундаментальных проблем аэромеханики — установление предельного состояния стационарного поля течения за телом конечных размеров при числе Рейнольдса  $Re \rightarrow \infty$  в условиях, когда его безотрывное обтекание невозможно, например за телом в форме кругового цилиндра или пластины, поставленной перпендикулярно набегающему потоку [1, с. 68]. Хотя в действительности такие течения становятся нестационарными уже при числах Рейнольдса порядка  $10^2$ , а при дальнейшем увеличении числа Рейнольдса переходят в турбулентное состояние, решение этой задачи представляет научный интерес [2–7]. Можно предположить, что такое решение дает возможность исследовать течения жидкости при умеренных числах Рейнольдса, когда сохраняется установившийся режим течения, но становятся уже неприменимыми методы теории при малых числах Рейнольдса ( $Re < 1$ ). Представляется интересным применить упрощения, если для большей части следа использовать уравнения пограничного слоя вместо полных уравнений Навье — Стокса. В области течения за телом (следа) линеаризация этих уравнений и практическое отсутствие градиента давления позволяют получить асимптотическое решение. В области вверх по течению справедливы уравнения пограничного слоя, но при этом нужно учитывать градиенты давления и структуру следа в ближней области, сильно зависящую от характера течения вверх по потоку. Область ближнего следа, включая область донного течения, наиболее сложна по своей природе.

В данной работе рассматривается придонная область. В двумерном течении это соответствует плоской пластине, в осесимметричном — случаю обтекания тонкого тела потоком с низким числом Рейнольдса. В статье рассматривается двумерный случай.

На рис. 1 показан общий характер поля течения в установившемся несжимаемом следе за плоской пластиной с толщиной  $2R$ . Полную картину течения в следе можно получить с использованием теории пограничного слоя с учетом циркуляционного течения.

Надо заметить, что в потоке происходит существенный обмен количеством движения и энергией между частицами жидкости в области циркуляционного

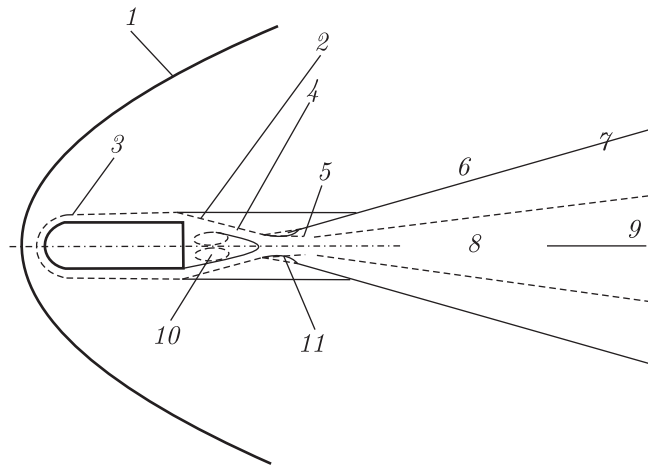


Рис. 1. Схема обтекания тела с указанием областей ближнего следа (установившееся течение): головная ударная волна (1), отрывной скачок уплотнения (2), пограничный слой (3), вязкий слой (4), горло следа (5), хвостовой скачок уплотнения (6), пограничный слой (7), ось следа (8), внутренняя часть следа (9), донное давление (10), волны сжатия (11)

течения и частицами жидкости, поступающими из пограничного слоя на теле [8–11]. Кроме того, внешнее невязкое течение заметно возмущается наличием донной области, и в результате в потоке появляются градиенты давления. Поскольку течение в пограничном слое и циркуляционное течение в следе (см. рис. 1) сложным образом взаимодействуют между собой, то для решения этой задачи используют упрощающие методики.

Здесь уместно отметить, что циркуляционное течение пренебрежимо мало влияет на остальное поле течения. Это предположение приемлемо в случае, когда размер этой области мал по сравнению с толщиной пограничного слоя [7], что действительно соответствует двумерному обтеканию плоской пластины при стремлении толщины пластины к нулю. Этот процесс не изменяет течения в пограничном слое на пластине; в пределе можно получить след за плоской пластиной нулевой толщины.

Задача о ламинарном несжимаемом следе за плоской пластиной, установленной под нулевым углом атаки, уже рассматривалась в нескольких работах. Так, например, в работе [1, с. 48] было получено решение для течения в области ближнего следа. В [2] представлено озееновское приближение для профиля скорости вниз по потоку, а в [9–12] найдено приближенное решение для дальнего следа, где с помощью графического метода объединены решения для дальнего и ближнего следов. Это позволяет определить начало координат на оси  $x$  (в первом приближении) для решения задачи о дальнем следе. В работах [4, 12–17] представлено решение задачи о ближнем следе с использованием преобразования Мизеса, а в [5] проведено сравнение этих результатов с результатами других работ. В [13] даны самосогласующиеся асимптотические решения для следов и предложен новый метод интегрирования линейных уравнений, представленных в работе [1, с. 242]. В случае осесимметричного следа за круглым цилиндром также можно постепенно уменьшать диаметр цилиндра, но, как будет показано дальше, этот процесс не имеет предела; диаметр цилиндра все время остается характерным размером задачи [15–19]. Хотя толщина пограничного слоя  $\delta_1$  стремится к нулю, отношение  $\delta_1/r_{\text{цил}}$  стремится к бесконечности. Здесь в знаменателе представлен безразмерный радиус цилиндра

длины  $L_1$ :  $r_{\text{cyl}} = (R/4L_1) \text{Re}^{1/2}$ .

Для расчета ближнего следа необходимо знать профиль скорости в пограничном слое у кормового среза тела. Несжимаемый пограничный слой на длинном цилиндре вдали от начала координат представлен в работах [20–25].

**1. Построение расчетных моделей.** Для расчета профиля скорости вдали от носка цилиндра при его продольном обтекании [3] введем следующие безразмерные независимые переменные [1, с. 48]:

$$\bar{\beta} = \ln(4\nu\bar{x}_1/(U\alpha_1^2)), \quad \bar{\zeta} = Ur_1^2/(4\nu\bar{x}_1), \quad (1.1)$$

а также безразмерную функцию тока

$$f(\bar{\zeta}, \bar{\beta}) = \psi_1/(\nu\bar{x}_1). \quad (1.2)$$

Безразмерная компонента скорости в направлении  $x$  примет вид

$$u = \frac{1}{2}f_{\bar{\zeta}}. \quad (1.3)$$

Для больших значений  $\bar{\beta}$  выпишем решение уравнение движения, в котором необходимо учесть влияние поперечной кривизны, в виде ряда

$$f(\bar{\zeta}, \bar{\beta}) = f_0(\bar{\zeta}) + f_1(\bar{\zeta})/\bar{\beta} + f_2(\bar{\zeta})/\bar{\beta}^2 + \dots \quad (1.4)$$

Следовательно,

$$u = \frac{1}{2}(f'_0 + f'_1/\bar{\beta} + f'_2/\bar{\beta}^2 + \dots). \quad (1.5)$$

Первые три члена ряда для  $f_{\bar{\zeta}}$  имеют вид

$$\begin{aligned} f'_0 &= 2; & f'_1 &= 2Ei(-\bar{\zeta}); \\ f'_2 &= 2e^{-\bar{\zeta}}Ei(-\bar{\zeta}) - 4Ei(-2\bar{\zeta}) - Ei(-\bar{\zeta})^2 \\ &\quad + 4Ei(-\bar{\zeta}) \ln \bar{\zeta} - 6EI(-\bar{\zeta}) + (2 + 6\gamma)Ei(-\bar{\zeta}), \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$Ei(-\bar{\zeta}) = \int_{\infty}^{\bar{\zeta}} \left( \frac{e^{-t}}{t} \right) dt, \quad EI(-\bar{\zeta}) = \int_{\infty}^{\bar{\zeta}} \left( \frac{Ei(-t)}{t} \right) dt.$$

Следует заметить, что граничные условия

$$u = 0 \text{ при } r_1 = r_{\text{cyl}} \quad \text{или} \quad f_{\bar{\zeta}} = 0 \text{ при } \bar{\zeta} = e^{-\bar{\beta}} \quad (1.7)$$

не могут быть удовлетворены членами ряда (1.5), поскольку функции  $f_n$  по предположению не зависят от  $\bar{\beta}$ . Следует учесть, что

$$f'_n \sim b_n \ln \bar{\zeta} + a_n \text{ при } \bar{\zeta} \rightarrow 0.$$

Так как, увеличивая  $\bar{\beta}$ , можно сделать  $\bar{\zeta} = e^{-\bar{\beta}}$  сколь угодно малым, то предыдущее соотношение для  $f'_n$  можно использовать для выражения граничных условий (1.7). Тогда получим

$$\sum \frac{a_n - b_n\bar{\beta}}{\beta^n} = 0,$$

следовательно,  $b_n = a_{n-1}$ .

В результате для значений  $r_1$ , близких к  $r_{\text{cyl}}$ , получим выражение для профиля скорости

$$u = K \ln(r/r_{\text{cyl}}), \tag{1.8}$$

где

$$K = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\bar{\beta}^n}, \quad a_0 = 0, \quad b_1 = 2, \quad b_2 = 2\gamma b_3 = 2\gamma^2 - \pi^2/2 - 4 \ln 2, \dots$$

При выбранном типе ряда уравнения (1.5) и (1.8) одинаково справедливы при  $r_1$ , достаточно близких к  $r_{\text{cyl}}$ . Однако уравнение (1.8) имеет очевидное преимущество, так как каждый член ряда удовлетворяет граничному условию (1.7). Кроме того, если ряд (1.5) известен до члена порядка  $n$ , то ряд (1.8) может быть вычислен до члена порядка  $n + 1$ , поскольку  $b_{n+1} = a_n$ .

Итак, начальный профиль скорости может быть рассчитан по уравнению (1.8) для  $r_1/r_{\text{cyl}}$ , близких к единице, и другим способом по уравнению (1.5). Мы увидим, что решение для ближнего следа существенно зависит от формы начального профиля скорости вблизи стенки.

На рис. 2 показаны профили скорости для  $e^{\bar{\beta}} = 10^2$ ,  $\bar{\beta} = 4,6052$ , и  $e^{\bar{\beta}} = 10^4$ ,  $\bar{\beta} = 9,2103$ . Для того чтобы сделать кривую  $A$ , рассчитанную по (1.8), независимой от  $\bar{\beta}$ , вместо  $u$  отложена величина  $3u/\alpha$ , где  $\alpha$  — параметр. Кривая  $B$  рассчитана по уравнению (1.5) с учетом членов ряда вплоть до  $f'_2$ . Постоянная  $K$  вычислена с учетом членов ряда вплоть до члена порядка  $\bar{\beta}^{-3}$ . Видно, что кривую  $A$  можно рассматривать как хороший типичный профиль (если не лучший, чем кривые  $B$ ) примерно до  $r/r_{\text{cyl}} = 8$  при  $e^{\bar{\beta}} = 10^2$  и до  $r/r_{\text{cyl}} = 50$  при  $e^{\bar{\beta}} = 10^4$ .

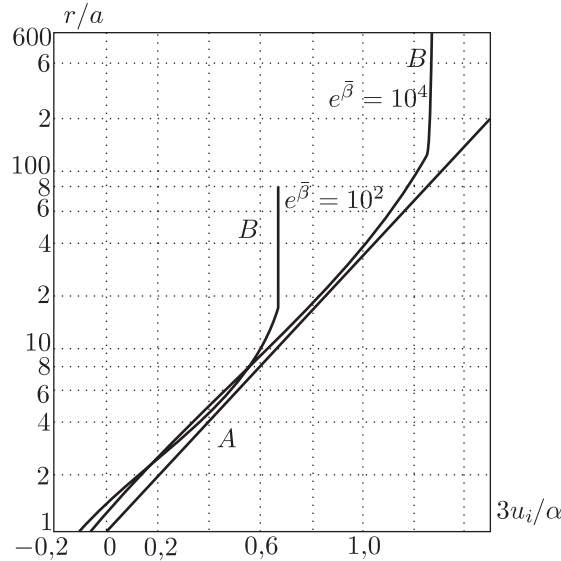


Рис. 2. Начальные профили скорости,  $e^{\bar{\beta}} = 10^2$ ,  $e^{\bar{\beta}} = 10^4$

**2. Расчет ближнего следа.** Как уже говорилось во введении, мы предположили, что влиянием циркуляционного течения вблизи дна цилиндра можно пренебречь, если отношение  $\delta_1/r_{\text{cyl}}$  достаточно велико. Учтем это и пренебрежем течением в цилиндрической области внутри  $r_1 < r_{\text{cyl}}$  и  $x_1 > 0$ , а при  $r_1 = r_{\text{cyl}}$  используем граничные условия, обычно применяемые на оси следа, а именно,

$$v_1 = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial r_1} = 0.$$

Введем новые безразмерные переменные и параметры:

$$\begin{aligned}x &= x_1/(4L_1), \quad r = \text{Re}^{1/2}r_1/(4L_1), \quad u = u_1/U, \\v &= \text{Re}^{1/2}v_1/(UR) = \text{Re}^{1/2}r_{\text{cyl}}/(4L_1),\end{aligned}$$

где  $\text{Re} = 4UL_1/\nu$ .

Заметим, что если в выражениях (1.1) положить  $\bar{x}_1 = L_1$ , то получим  $a^2 = e^{-\beta}$ ,  $r^2 = \bar{\zeta}$ , где  $\zeta$  и  $\beta$  представляют собой соответственно  $\bar{\zeta}$  и  $\bar{\beta}$  при  $\bar{x}_1 = L_1$ .

Уравнения неразрывности и количества движения (при пренебрежении градиентом давления) принимают вид

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0, \quad (2.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = r^{-1} \frac{\partial(r \frac{\partial u}{\partial r})}{\partial r} \quad (2.2)$$

и в соответствии с описанной выше моделью следа могут быть решены при следующих условиях.

Начальные условия для скорости:

$$u \rightarrow u_i|_{\bar{x}_1=L_1} \quad (2.3)$$

при  $x \rightarrow 0$  и фиксированном  $r$ , где  $u_i$  — профиль скорости.

Граничные условия:

$$u \rightarrow 1 \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad (2.4)$$

$$v = 0 \text{ при } r = R, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \text{ при } r = R. \quad (2.6)$$

Метод решения, предложенный в [1, с. 122] для двумерных течений, распространен на случай осесимметричного течения и использован для решения этой задачи. Следуя методу сопряжения асимптотических рядов [12–15], определим два типа рядов по координате  $x$ :

1) внешний ряд, который не может удовлетворять граничному условию при  $r = R$  и, следовательно, применим только при достаточно больших  $r$ ,  $r$  — внешняя переменная;

2) внутренний ряд, который справедлив только для  $r/R$ , близких к единице.

Если рассмотреть внутренний ряд для зависимой переменной, то видно, что  $(r/R - 1)$  и  $x$  одновременно, но независимо друг от друга стремятся к нулю. При стремлении к нулю соотношение между ними определяется внутренней переменной, которая должна оставаться постоянной.

Выбрав соответствующим образом внешнюю и внутреннюю переменные и ряды, можно произвести сопряжение обоих рядов аналитически и построить сложный ряд, одинаково справедливый при всех  $r$ . Оказывается, что внутренний ряд полностью определяется граничными условиями при  $r = R$  и начальным условием и не зависит от условий сопряжения, которые, по существу, определяют вид внешнего ряда.

**3. Построение внутреннего ряда.** Введем следующее преобразование координат:

$$\xi = \left(\frac{x}{\alpha R^2}\right)^{1/s}, \quad \eta = \frac{1}{s\xi} \ln(r/R) \text{ или } r/R = e^{s\xi\eta}, \quad (3.1)$$

где  $s$  и  $\alpha$  — некоторые постоянные.

Уравнение неразрывности (2.1) можно удовлетворить, введя функцию тока  $\psi$ , относительно которой предполагается, что она может быть разложена во внутренний ряд по степеням  $\xi$  с внутренней переменной  $\eta$  следующим образом:

$$\psi = \alpha R^2 \xi^j \sum_{l=0}^{\infty} \xi^l f_l(\eta), \quad (3.2)$$

где  $j$  — целое число, которое нужно определить. Используя формулы преобразования

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{sx} \left[ \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right], \quad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{sx} \frac{\partial}{\partial \eta},$$

получим

$$u = \alpha s^{-1} e^{-2s\xi\eta} \xi^{j-1} \sum_{l=0}^{\infty} \xi^l f'_l \eta, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \alpha s^{-2} \alpha^{-1} e^{-3s\xi\eta} \xi^{j-2} \sum_{l=0}^{\infty} \xi^l (f''_l - 2s\xi f'_l). \quad (3.4)$$

Уравнение движения (2.2) примет вид

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{l=0}^{\infty} \xi^l f'_l \right) \left( \sum_{l=0}^{\infty} \xi^l [(j-1+l)f'_l - 2snf'_{l-1}] \right) - \left( \sum_{l=0}^{\infty} \xi^l (j+l)f_l \right) \left( \sum_{l=0}^{\infty} \xi^l [f''_l - 2sf'_{l-1}] \right) \\ & = \xi^{s-j-1} \left( \sum_{l=0}^{\infty} \xi^l [f'''_l - 4sf''_{l-1} + 4s^2 f'_{l-2}] \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

В этом уравнении любое  $f$  с отрицательным значением индекса  $(l-1)$  или  $(l-2)$  должно быть положено равным нулю.

Необходимо, чтобы в правой части уравнения присутствовали члены высших порядков при любом порядке аппроксимации по  $\xi$ . Следовательно, необходимо потребовать, чтобы  $s = j + l$ . Используя начальное условие (3.3) для определения  $j$ , получаем, что для умеренных значений  $r/a$  начальный профиль скорости описывается уравнением (2.8):

$$u_i = K \ln(r/R) \text{ или } (r^2/R^2)u_i = K \ln(r/R)e^{2 \ln(r/R)}.$$

Показательную функцию можно разложить в ряд по  $\ln(r/R)$ :

$$\left( \frac{r^2}{R^2} \right) u_i = K \ln \left( \frac{r}{R} \right) \left\{ 1 + 2 \ln \left( \frac{r}{R} \right) + \dots + \frac{1}{l!} \left[ 2 \ln \left( \frac{r}{R} \right) \right]^l + \dots \right\}. \quad (3.6)$$

Теперь из (3.3) получим

$$\left( \frac{r^2}{R^2} \right) u = \left( \frac{\alpha}{s} \right) \xi^{j-1} \sum_{l=0}^{\infty} \xi^l f'_l(\eta). \quad (3.7)$$

Если  $r$  постоянно, то  $\xi \rightarrow 0$  и  $\eta \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow 0$ , так что  $\xi^n$  остается постоянным и равным  $\ln(r/R)$ . Следовательно, сопоставив уравнения (3.6) и (3.7), можно отметить, что условие (3.3) удовлетворяется, если выполнены соотношения

$$j = 2, \quad s = 3, \quad f'_l(\eta)/\eta^{l+1} \rightarrow K s^2 (2s)^l / (\alpha l!) \text{ при } \eta \rightarrow \infty, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

Таким образом, начальное условие (3.3) дает значения  $j$  и  $s$  и граничное условие на бесконечности для функций  $f_l$ . Заметим, что постоянная  $\alpha$  все еще не определена, но она входит только в условие (3.8) и не входит в уравнение (3.5).

Приравняв коэффициент при  $\xi^n$  в (3.5) нулю, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для  $f_0, f_1, f_2, \dots$ :

$$f_0''' + 2f_0f_0'' - f_0'^2 = 0, \quad (3.9)$$

$$f_1''' + 2f_0f_1'' - 3f_0'f_1' + 3f_0''f_1 = 12f_0'' + 12f_0f_0' - 6\eta f_0'^2, \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} f_2''' + 2f_0f_2'' - 4f_0'f_2' + 4f_0''f_2 \\ = (12 - 3f_1)f_1'' + 2f_1'^2 + 12(f_0 - \eta f_0')f_1' + 18f_0'f_1 - 36f_0', \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} f_3''' + 2f_0f_3'' - 5f_0'f_3' + 5f_0''f_3 = (12 - 3f_1)f_2'' \\ + [5f_1' + 12(f_0 - \eta f_0')]f_2' + (24f_0' - 4f_1'')f_2 - 6f_1'(\eta f_1' - 3f_1 + 6). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Из граничных условий (3.5) и (3.6) получим теперь соотношения

$$f_l(0) = 0, \quad (3.13)$$

$$f_0''(0) = 0, \quad f_0''(0) = 6f_{l-1}'(0), \quad l \geq 1. \quad (3.14)$$

Чтобы найти  $f_0$ , нужно решить двухточечную краевую задачу. Для этого можно подобрать величину  $\alpha$  так, чтобы выполнялось условие  $f_0'(0) = 1$ . Тогда  $K/\alpha$  становится просто численной константой, равной  $2f_0/9$ , известной из решения для  $f_0$ , и функции  $f_l(\eta)$  становятся универсальными функциями, не зависящими ни от какого параметра.

Система уравнений вплоть до  $f_3$  решена численно. Поскольку уравнение для  $f_l$  при  $l \geq 1$  линейное, то граничное условие на бесконечности может быть удовлетворено. Функции  $f_{l-1}'(\eta)$  для  $l = 0, 1, 2, 3$  определены для  $\eta$  от 0 до 6, кроме того, на рис. 3 показаны графики этих функций.

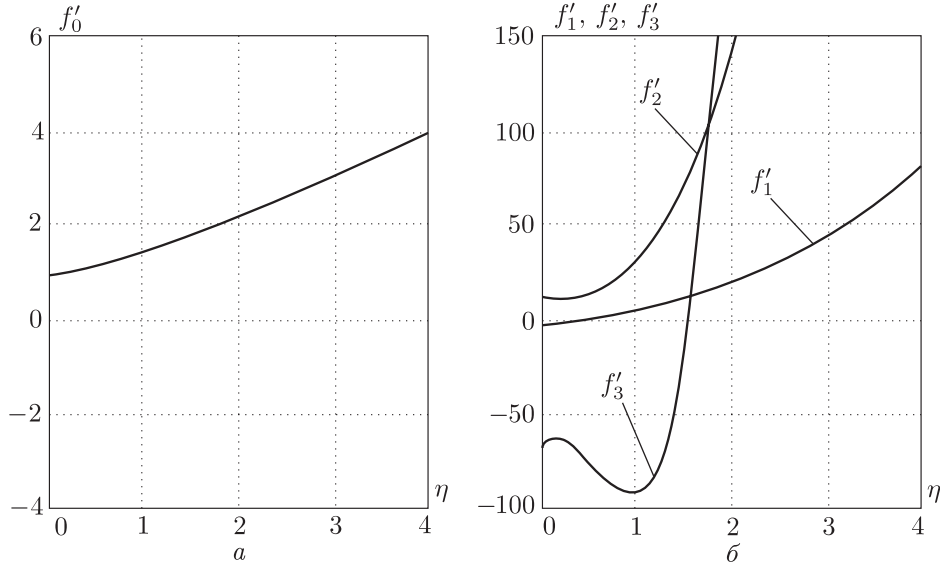


Рис. 3. Зависимость функций: а —  $f_0'(\eta)$ ; б —  $f_1'(\eta), f_2'(\eta), f_3'(\eta)$



Ниже приведены асимптотические формы функций  $f_l$  при  $\eta \rightarrow \infty$  для построения сложного ряда:

$$\begin{aligned} f_0 &\sim A_0(\eta + D_0)^2, & f_1 &\sim 4A_0\eta^3 + C_1\eta + D_1, \\ f_2 &\sim 4A_0\eta^4 + C_2\eta^2 + D_2\eta + E_2, \\ f_3 &\sim (72/5)A_0\eta^5 + C_3\eta^3 + D_3\eta^2 - 54D_0(\eta + D_0)\ln\eta + E_3\eta + H_3. \end{aligned} \quad (3.15)$$

**4. Построение внешнего ряда.** Вид внешнего ряда зависит от условий сопряжения его с внутренним рядом, и в нем должен присутствовать член порядка  $\xi^4 \ln \xi$  для того, чтобы можно было осуществить построение сложного ряда. Поэтому выпишем внешний ряд для функции тока в следующем виде:

$$\psi = \frac{\alpha a^2}{6} [\psi_0(\rho) + \xi\psi_1(\rho) + \xi^2\psi_2(\rho) + \xi^3\psi_3(\rho) + \xi^4 \ln \xi \bar{\psi}_4 + \xi^4\psi_4(\rho) + \dots], \quad (4.1)$$

где  $\rho = r^2/R^2$ . Следовательно,

$$\psi = \frac{\alpha}{3} [\psi'_0 + \xi\psi'_1 + \xi^2\psi'_2 + \xi^3\psi'_3 + \xi^4 \ln \xi \bar{\psi}'_4 + \xi^4\psi'_4 + \dots], \quad (4.2)$$

здесь штрихи означают дифференцирование по  $\rho$ .

Из уравнения движения (2.2) получается система уравнений

$$\begin{aligned} \psi'_0\psi'_1 - \psi''_0\psi_1 &= 0, & 2(\psi'_0\psi'_2 - \psi''_0\psi_2) &= \psi'_1\psi_1 - \psi'^2_2, \\ 3(\psi'_0\psi'_3 - \psi''_0\psi_3) &= \psi''_2\psi_1 - 3\psi'_2\psi'_1 + 2\psi_2\psi''_1 + 36(\rho\psi''_0)', & \psi'_0\bar{\psi}'_4 - \psi''_0\bar{\psi}_4 &= 0, \\ 4(\psi'_0\psi'_4 - \psi''_0\psi_4) &= \psi''_3\psi_1 - 4\psi'_3\psi'_1 + 3\psi_3\psi''_1 + 2\psi'_2\psi_2 - 2\psi'^2_2 + 36(\rho\psi''_1)', \end{aligned} \quad (4.3)$$

Решения этой системы имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_1 &= c\psi'_0, & \psi_2 &= (c^2/2)\psi''_0 + d\psi'_0, \\ \psi_3 &= \left(\frac{c^3}{6}\right)\psi'''_0 + cd\psi''_0 + e\psi'_0 + 12\psi'_0 \int_1^\rho \left[ \frac{(\rho\psi''_0)'}{\psi'^2_0} \right] d\rho, & \psi_4 &= c\psi'_0, \\ \bar{\psi}_4 &= \left(\frac{c^4}{24}\right)\psi''''_0 + \left(\frac{c^2d}{2}\right)\psi'''_0 + \left(ce + \frac{d^2}{2}\right)\psi''_0 + i\psi'_0 + 12c \frac{(\rho\psi''_0)'}{\psi'^2_0} \\ &+ 12\psi''_0 \int_1^\rho \left[ \frac{(\rho\psi''_0)'}{\psi'^2_0} \right] d\rho - 9c\psi'_0 \int_1^\rho \left[ \frac{\psi''''_0}{\psi'^2_0} \right] d\rho. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Постоянные  $c$ ,  $d$ ,  $e$  и  $i$  определяются из условий сопряжения.

Начальное условие (2.3) будет удовлетворено, если принять, что  $\psi'_0(\rho) = 3u_i/\alpha$ . В области, где для  $u_i$  справедливо уравнение (1.8), получим  $\psi'_0 = (A_0/3)\ln\rho$ . В этой области  $\rho\psi''_0$  тождественно равно нулю. Граничное условие  $u \rightarrow 1$  при  $\rho \rightarrow \infty$  автоматически удовлетворяется, но очевидно, что граничное условие при  $r = R$  не может быть удовлетворено.

**Заключение.** Для определения профиля скорости в области ближнего следа за продольно обтекаемым очень тонким цилиндром при больших значениях параметра  $\beta = \ln(4vL_1/(Ua_1^2))$  получены разложения решения в асимптотический ряд и соответствующие упрощения. Радиус применимости решения в направлении вниз по потоку в следе цилиндра ограничен, порядка нескольких радиусов цилиндра, а именно, при небольших  $\beta$  и больших значениях числа Re.

В то же время  $u_0$ , скорость на оси следа, увеличивается достаточно быстро до величины, составляющей 0,2 или 0,3 от скорости невозмущенного течения. В заданном сечении следа для заданного цилиндра величина  $u_0$  изменяется приблизительно пропорционально  $Re^{-1/3}$ . Все эти свойства решения — следствие осесимметричности течения. Метод решения применим при любом заданном начальном профиле скорости, включая отрывной профиль, для которого

$$\left. \frac{\partial u_i}{\partial r_1} \right|_{r_1=a_1} = 0.$$

Линеаризация уравнений движения позволяет получить простое решение, которое хорошо согласуется с асимптотическим, по крайней мере в отношении распределения величины  $u_0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Нейланд В. Я., Боголепов В. В., Дудин Г. Н., Липатов И. И. Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа. М.: Физматлит, 2003.
2. Meksyn D. Motion in the wake of a thin plate at zero incidence // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1951. V. 207. P. 370–380.
3. Сидняев Н. И. Учет влияния вязкостных эффектов на обтекание и аэродинамические характеристики комбинированных головных частей ракет // Вестн. МГТУ. Сер. Машиностроение. 2006. Т. 2(63). С. 17–34.
4. Sidnyaev N. I. Study of heat and mass transfer for hypersonic flow past a complex body of revolution // Thermophysics and Aeromechanics. 2006. V. 13, N 1. P. 2–16.
5. Ефимов Е. С., Мозольков А. С., Харитонов В. Т. Исследование влияния границ потока на обтекание моделей при сверхзвуковых скоростях // Тр. ЦАГИ. 1981. Т. 2095. С. 28–61.
6. Sidnyaev N. I. Aerodynamic performances of hypersonic aircrafts with surface mass transfer // Math. Models Comput. Simulations. 2009. V. 1, N 3. P. 343–352.
7. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
8. Bruno A. D. Asymptotic solving nonlinear equations and idempotent mathematics. М., 2013. 31 с. (Препринт / Ин-т прикл. математики; № 56).
9. Брюно А. Д. Автомодельные решения и степенная геометрия // Успехи мат. наук. 2000. Т. 55, № 1. С. 3–44.
10. Брюно А. Д. Степенные разложения решений системы алгебраических и дифференциальных уравнений // Докл. АН. 2001. Т. 380, № 3. С. 298–304.
11. Шадрина Т. В. Об осесимметричном обтекании иглы вязкой несжимаемой жидкостью. М., 2002. 21 с. (Препринт / Ин-т прикл. математики; № 36).
12. Брюно А. Д. Степенные разложения решений одного алгебраического или дифференциального уравнения // Докл. АН. 2001. Т. 380, № 2. С. 155–159.
13. Брюно А. Д. Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения. М., 2003. 39 с. (Препринт / Ин-т прикл. математики; № 9).
14. Брюно А. Д., Шадрина Т. В. Об осесимметричном обтекании иглы вязкой несжимаемой жидкостью // Докл. АН. 2002. Т. 387, № 5. С. 589–595.
15. Shadrina T. V. The axially symmetric boundary layer around a needle // Proceedings of BAII 2002. Perth: Univ. of Western Australia, 2002. P. 213–220.
16. Брюно А. Д. Степенные асимптотики решений обыкновенного дифференциального уравнения // Докл. АН. 2003. Т. 392, № 3. С. 295–300.
17. Брюно А. Д. Степенно-логарифмические разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // Докл. АН. 2003. Т. 392, № 4. С. 439–444.
18. Брюно А. Д. Нестепенные асимптотики решений обыкновенного дифференциального уравнения // Докл. АН. 2003. Т. 392, № 5. С. 586–591.
19. Брюно А. Д. Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // Успехи мат. наук. 2004. Т. 59, № 3. С. 31–80.
20. Брюно А. Д., Шадрина Т. В. Осесимметричный пограничный слой на игле // Докл. АН. 2004. Т. 394, № 3. С. 298–304.
21. Шадрина Т. В. Пограничный слой при осесимметричном обтекании иглы // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 6. С. 853–854.

22. Шадрина Т. В. Об осесимметричном обтекании иглы вязкой несжимаемой жидкостью // 28 Гагаринские чтения: Тез. докл. Т. 2. М.: МАТИ, 2002. С. 98–99.
23. Bruno A. D., Shadrina T. V. The axially symmetric boundary layer around a needle // Internat. Conf. on Differential and Functional Differential Equations: Abstracts. M.: MAI, 2002. P. 18–19.
24. Bruno A. D., Shadrina T. V. The axially symmetric boundary layer around a needle // Internat. Conf. «Navier—Stokes Equations and Related Topics» (NSECS): Abstracts. S. Peterburg: Euler Inst., 2002. P. 18–19.
25. Bruno A. D., Shadrina T. V. The axially symmetric boundary layer on a needle // Internat. Conf. on Boundary And Interior Layers, ONERA. Toulouse, 2004. P. 1–10.

*Статья поступила 10 апреля 2014 г.*

*Сидняев Николай Иванович*

*Гордеева Надежда Михайловна*

*Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана*

*ул. 2-я Бауманская, 5*

*105005 г. Москва*

E-mail: sidnyaev@bmstu.ru; nmgordeeva@bmstu.ru