И. И. Исмагилов, Модифицированные преобразования Уолша в сжатии цифровых изображений,
Исслед. по информ., 2000, выпуск 2, 85–90

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УОЛША В СЖАТИИ ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

И.И. Исмагилов

К настоящему времени предложено и исследовано множество методов сжатия цифровых изображений. Весьма популярны в практике сжатия изображений методы кодирования с преобразованием, основанные на дискретных ортогональных преобразованиях (ДОП) [1-3].

Методы кодирования с преобразованием интенсивно исследовались в связи с разработкой международных стандартов в области сжатия изображений. Многочисленные субъективные результаты тестирования алгоритмов сжатия статических полутоновых изображений привели к тому, что для международной стандартизации был выбран метод кодирования с преобразованием - адаптивное дискретное косинусное преобразование (ДКП). Этот метод является основой международного стандарта JPEG [3]. Несмотря на это исследования методов и средств сжатия цифровых изображений на основе ДОП продолжаются, при этом основное внимание уделяется преобразованиям, специально построенным для сжатия изображений.

Слэнт–преобразование является ярким примером ДОП, построенного специально для кодирования сигналов изображений [2]. Это преобразование может рассматриваться как "улучшенный" вариант преобразования Уолша. Модификация базиса Уолша была проведена путем дополнительных вращений некоторых координатных осей дискретного базиса.

В [4] указано на взаимосвязь дискретных базисов Уолша и базиса функций слэнт-преобразования с дискретными полиномами Чебышева (ДПЧ) и построены обобщенные дискретные базисы – базис Уолша-Адамара k-й (k=1, 2, ..., N-1) степени совершенства размерности $N=2^n$, n – целое больше 1. Подход к обобщению традиционного базиса Уолша-Адамара заключался в последовательной настройке ряда базисных векторов на некоторую совокупность ДПЧ. При этом под степенью совершенства базиса понимается величина, равная количеству первых ДПЧ, содержащихся в составе базиса (без учета полинома нулевой степени). Построенный базис при k=0 совпадает с базисом Уолша-Адамара; k =1 – с базисом функций слэнт-преобразования; $k=N$-1 - с базисом ДПЧ [5].

В предлагаемой работе рассматривается способ построения дискретного базиса Уолша-Адамара второй степени. Приводятся результаты исследований двумерных ДОП при сжатии цифровых изображений.

Матрица ДОП в базисе Уолша-Адамара второй степени совершенства вводятся следующим рекуррентным соотношением:

$$\mathbf{HAD}^{(2)}_{2^i} = \mathbf{M}^{(2)}_{2^i}\mathbf{M}^{(1)}_{2^i}(\mathbf{H}_2 \otimes \mathbf{HAD}^{(2)}_{2^{i-1}}),\ i=\overline{2,n},$$

где:

$\otimes$ - символ кронекеровского произведения матриц;

$\mathbf{HAD}^{(2)}_{2} = \mathbf{H}_2$; $\mathbf{H}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ - матрица Уолша-Адамара порядка 2;

$\mathbf{M}^{(1)}_{2^i}$, $i=\overline{2,n}$, - матрицы вращения вида

$$\mathbf{M}^{(1)}_{2^i} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2^{i-2}} & & & & \\ & b_i^{(1)} & & -a_i^{(1)} & \\ & & \mathbf{I}_{2^{i-2}-1} & & \\ & a_i^{(1)} & & b_i^{(1)} & \\ & & & & \mathbf{I}_{2^{i-1}-1} \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{I}_k$ - единичная матрица порядка k;

$a_i^{(1)}, b_i^{(1)}$ - поворачивающие множители:

$$a_i^{(1)} = \left(\frac{4^{i-1}-1}{4^i-1}\right)^{1/2},\ b_i^{(1)} = \left(\frac{3.4^{i-1}}{4^i-1}\right)^{1/2};$$

$\mathbf{M}^{(2)}_{2^i}$ - матрицы вращения вида

$$\mathbf{M}^{(2)}_{2^i} = \mathbf{I}_{2^i},\ i=2,$$

$$\mathbf{M}^{(2)}_{2^i} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3\times 2^{i-3}} & & & & \\ & b_i^{(2)} & & -a_i^{(2)} & \\ & & \mathbf{I}_{3\times 2^{i-3}-1} & & \\ & a_i^{(2)} & & b_i^{(2)} & \\ & & & & \mathbf{I}_{2^{i-2}-1} \end{bmatrix},\ i=\overline{3,n},$$

$a_i^{(2)}, b_i^{(2)}$ - поворачивающие множители:

$$a_i^{(2)} = \left(\frac{4^{i-2}-1}{4^i-1}\right)^{1/2},\ b_i^{(2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{15\times 4^i}{4^i-1}\right)^{1/2}.$$

Матрицы преобразований в базисе Уолша-Адамара второй степени совершенства представимы в целочисленном виде. В [4] приведены формулы для вычисления элементов поворачивающих матриц для этого случая.

Отметим, что многомерные базисы Уолша-Адамара второй степени совершенства вводятся традиционным способом: путем перемножения одномерных базисных функций соответствующих одномерных дискретных базисов.

Алгоритмы быстрых преобразований в рассматриваемом базисе основаны на факторизованном представлении $\mathbf{HAD}_N^{(2)}$. В [4] предложено три факторизованных представления этой матрицы. Оценки вычислительной сложности алгоритмов быстрых преобразований по количеству операций сложения (*Ad*) и умножения (*Mu*) имеют следующий вид:

$$Ad = (n+1{,}5)N - 4\ , \quad Mu = 3N - 8\ .$$

При рассмотрении дискретных базисов Уолша и слэнт-преобразования оперируют различными упорядочениями базисных векторов в системе. Наиболее популярными в сжатии изображений являются секвентивно-упорядоченные дискретные базисы. Построение матриц преобразований в секвентивно-упорядоченных базисах связано с упорядочением базисных векторов по числу перемен знака или по так называемой "секвенте" [6]. Обозначим через $\mathbf{WAL}_N^{(k)}$ матрицу преобразования в секвентивно-упорядоченном базисе Уолша *k*-й степени совершенства.

Эффективность ДОП исследовалась на тестовом изоматериале. В качестве тестовых изображений были использованы изображения размером 256×256 с 256 градациями яркости. Программа сжатия и восстановления изображений реализует упрощенный вариант международного стандарта JPEG. В ней использовано зигзагообразное сканирование матрицы трансформант изображения и статистическое кодирование по Хаффмену. При этом предусматривалась возможность замены матрицы ДКП на произвольную ортогональную матрицу. Степень сжатия изображения определяется фактором качества - параметром, задающим таблицу квантования трансформант изображения.

В проведенных вычислительных экспериментах изучалась эффективность блочного кодирования изображений при размере блоков 8×8 с использованием ДОП в следующих базисах: $\mathbf{WAL}^{(0)}$ - базис функций Уолша; $\mathbf{WAL}^{(1)}$ - базис функций слэнт-преобразования; $\mathbf{WAL}^{(2)}$ - базис функций Уолша второй степени совершенства; **TCH** – базис ДПЧ; **DCT**- базис функций ДКП.

Все исследуемые дискретные базисы, за исключением $\mathbf{WAL}^{(2)}$, достаточно полно представлены в специальной литературе. Поэтому ограничимся приведением целочисленной матрицы ДОП в секвентивно-упорядоченном базисе Уолша второй степени совершенства порядка N=8:

$$
\mathbf{WAL}_8^{(2)} = \begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
7 & 5 & 3 & 1 & -1 & -3 & -5 & -7 \\
7 & 1 & -3 & -5 & -5 & -3 & 1 & 7 \\
7 & -1 & -9 & -17 & 17 & 9 & 1 & -7 \\
7 & -11 & -9 & 13 & 13 & -9 & -11 & 7 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & -3 & 3 & -1 & -1 & 3 & -3 & 1 \\
1 & -3 & 3 & -1 & 1 & -3 & 3 & -1
\end{vmatrix}
$$

Анализ результатов вычислительных экспериментов по сжатию цифровых изображений при варьировании фактора качества от 2 до 16 показал, что по объективным показателям базисы **DCT**, $\mathbf{WAL}^{(1)}$, $\mathbf{WAL}^{(2)}$ и **TCH** практически мало отличаются друг от друга. В большинстве случаев наименьшие ошибки восстановления дает базис **DCT**, далее идут базисы **TCH**, $\mathbf{WAL}^{(1)}$, $\mathbf{WAL}^{(2)}$. Наихудшие результаты по объективным показателям показал базис $\mathbf{WAL}^{(0)}$. В ряде случаев базисы $\mathbf{WAL}^{(1)}$, $\mathbf{WAL}^{(2)}$ незначительно выигрывают по коэффициенту сжатия у базисов **DCT** и **TCH**.

Для иллюстрации сказанного в таблице приведены результаты исследований эффективности ДОП при сжатии трех тестовых изображений при факторе качества равном 8. В качестве объективных показателей качества сжатия использованы относительная средняя абсолютная ошибка (ОСАО) и относительная среднеквадратичная ошибка (ОСКО) восстановления изображений.

Тестовое изображение	Тип ДОП	Коэффициент сжатия	ОСАО (%)	ОСКО (%)
Аэрофото	**DCT**	14, 11	3,4	4,9
	$\mathbf{WAL}^{(0)}$	13,97	3,61	5,22
	$\mathbf{WAL}^{(1)}$	14,13	3,45	4,98
	$\mathbf{WAL}^{(2)}$	14, 09	3,47	5
	TCH	14, 02	3,44	4,97
Катя	**DCT**	17,77	2,03	2,82
	$\mathbf{WAL}^{(0)}$	16,83	2,35	3,36
	$\mathbf{WAL}^{(1)}$	17,85	2,07	2,89
	$\mathbf{WAL}^{(2)}$	17,84	2,08	2,91
	TCH	17,74	2,06	2,86
Клоун	**DCT**	11,95	3,09	4,22
	$\mathbf{WAL}^{(0)}$	12,11	3,37	4,74
	$\mathbf{WAL}^{(1)}$	12,17	3,15	4,36
	$\mathbf{WAL}^{(2)}$	12,16	3,18	4,4
	TCH	11,93	3,16	4,34

Субъективная оценка качества восстановленных изображений показывает, что наихудшее качество у базиса $\mathbf{WAL}^{(0)}$ (уже при факторе качества, равном 4, становится заметной блочная структура изображения). Остальные исследованные базисы обеспечивают практически одинаковое субъективное качество восстановленного изображения.

Приведем оценки вычислительной сложности одномерных алгоритмов быстрых ДОП в исследуемых базисах размерности N=8 (двумерные преобразования реализованы на их основе построчно-столбцовым методом):

$$\mathbf{WAL}^{(0)} - Ad = 24;$$

$$\mathbf{WAL}^{(1)} - Ad = 30,\ Mu = 12;$$

$$\mathbf{WAL}^{(2)} - Ad = 32,\ Mu = 16;$$

$$\mathbf{DCT} \quad - Ad = 26,\ Mu = 16;$$

$$\mathbf{TCH} \quad - Ad = 56,\ Mu = 64.$$

Оценки для базиса $\mathbf{WAL}^{(0)}$ взяты из [2], для $\mathbf{WAL}^{(1)}$ - из [8], для **ДСТ** - из [7], а для преобразования в базисе **ТСН** проведены по прямому алгоритму.

Вычислительная эффективность преобразования в базисах **DCT**, $\mathbf{WAL}^{(1)}$, $\mathbf{WAL}^{(2)}$ при рассматриваемой размерности практически одинакова. Однако при использовании преобразований в базисе Уолша и его модификациях возможна организация вычислений в целочисленной арифметике, что позволяет повысить быстродействие средств вычисления трансформант изображения. При работе с ДКП такая возможность появляется лишь при квантовании по уровню элементов базисных векторов, т.е. при использовании "испорченного" ДОП, что приводит к увеличению погрешности восстановления изображения.

Базисы $\mathbf{WAL}^{(1)}$, $\mathbf{WAL}^{(2)}$ весьма целесообразны при сжатии изображений, в которых превалируют участки монотонного изменения яркости, хорошо описываемые степенными полиномами низких порядков (слэнт-преобразование было введено именно из этих соображений). При этом здесь появляется возможность предсказания части трансформант текущего блока изображения по информации предыдущих блоков с целью их разностного кодирования на основе фасетной модели изображения. Более широкие возможности в этом отношении представляет базис $\mathbf{WAL}^{(2)}$, так как в этом случае можно использовать фасетную модель изображения второго порядка. По этой причине базис $\mathbf{WAL}^{(2)}$ перспективен для синтеза алгоритмов гибридного кодирования изображения, когда процессом разностного кодирования охватывается лишь часть трансформант, несущая основную часть информации о низкочастотной области двумерного спектра изображения.

Литература

1. Красильников Н.Н. Теория передачи и восприятия изображений. Теория передачи изображения и её приложения. – М.: Радио и связь, 1986.

2. Птачек М. Цифровое телевидение. Теория и техника. – М.: Радио и связь, 1990.

3. Wallace G.K. The JPEG still picture compression standart // Communication of the ACM. –V. 34. – 1991. – N 4. – P. 31-44.

4. Исмагилов И.И. Класс дискретных ортогональных базисов для представления и обработки цифровых сигналов // Автоматика и вычислительная техника. -1996. –N 3. - С. 83-84.

5. Никифоров А.Ф., Суслов С.К., Уваров В.Б. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной. – М.: Наука, 1985.

6. Хармут Х. Теория секвентного анализа. – М.: Мир, 1980.

7. Merchant S.N., Rao B.X. Signal processing via COSHAD transform // Computers and Electrical Engineering. – 1986. – V. 12, N 1-2. – P. 3-12.

8. Zhong-DE Wang. New algorithm for the slant transform // IEEE transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 1982. – V. 4, N5. – P. 551-555.