N. N. Frolov, Self-adjointness of elliptic operators with infinitely many variables,
Funktsional. Anal. i Prilozhen., 1980, Volume 14, Issue 1, 85–86

Функциональный анализ и его приложения,
т. 14, вып. 1, 1980, 85—86.

УДК 517.43

САМОСОПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ПЕРЕМЕННЫХ

Н. Н. Фролов

В настоящее время, благодаря стимулирующему влиянию квантовой теории поля, усилился интерес к изучению дифференциальных операторов с бесконечным числом переменных. Вопросы существенной самосопряженности таких операторов рассматривались в работах [1] — [5]. В работе Ю. Л. Далецкого [1] показана самосопряженность оператора типа Шредингера, если потенциал дважды дифференцируем и полуограничен на некотором «допустимом» множестве. В работе Ю. М. Березанского и Т. А. Михайлюк [2] аналогичный факт установлен в предположении, что потенциал достаточно быстро аппроксимируется цилиндрическими функциями и имеет специальную оценку снизу. В настоящей заметке показывается самосопряженность бесконечномерного оператора типа Шредингера, если он полуограничен, а потенциал удовлетворяет лишь условиям измеримости и ограниченности на ограниченных множествах.

1. Пусть вещественное гильбертово пространство H с нормой $\|\cdot\|$ и скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ оснащено гильбертовыми пространствами H_+ и H_-: $H_+ \subset H \subset H_-$, так что оператор вложения из H в H_- принадлежит классу Гильберта — Шмидта, $\mu(dx)$ — гауссова мера в H_-, определяемая характеристическим функционалом $\exp(-{}^1/_2 \|\varphi\|^2)$ (см. [6]), $C^m(H_-, B)$ — совокупность всех отображений u: $H_- \to B$, непрерывных и ограниченных на H_- со всеми производными Фреше до m-го $(m \leqslant \infty)$ порядка включительно. (Здесь B — некоторое банахово пространство.) Пусть $C_0^m(H_-, B)$ — совокупность всех финитных отображений из $C^m(H_-, B)$. Обозначим через W_2^m пополнение $C_0^\infty(H_-, \mathbf{C})$ по норме

$$\|u\|_m = \Big(\sum_{k=0}^{m} \int_{H_-} \|u^{(k)}(x)\|_{2,k}^2 \mu(dx)\Big)^{1/2},$$

где $\|\cdot\|_{2,k}$ — норма в гильбертовом пространстве $H^k = H \otimes \ldots \otimes H$ $(H^0 = \mathbf{C})$, являющемся тензорным произведением H самого на себя k раз (см. [7]). Положим $(W_2^m)^* = W_2^{-m}$, $W_2^0 = L_2$, тогда совокупность $\{W_2^m,\ m \in \mathbf{Z}\}$ образует гильбертову шкалу пространств (см. [8]), причем справедливо обобщенное неравенство Коши $|(u, \varphi)_0| \leqslant \|u\|_{-m} \|\varphi\|_m$, где $(u, \varphi)_0$ — значение функционала $u \in W_2^{-m}$ на элементе $\varphi \in W_2^m$. Рассмотрим дифференциальный оператор второго порядка (ср. [6])

$$Lu(x) = -\mathrm{Sp}\,(A(x)u'(x))' + (A(x)u'(x), x),$$

где $A(x) \in C^1(H_-, \mathscr{L}_+ \cap \mathscr{L}_0)$, $\mathscr{L}_+$ $(\mathscr{L}_0)$ — совокупность всех линейных ограниченных отображений в H_+ (H), след берется в пространстве H.

Оператор L назовем *сильно эллиптическим* в H_-, если $A(x)$ симметричен в H при каждом $x \in H_-$ и существует $\nu > 0$ такое, что $(A(x)\xi, \xi) \geqslant \nu \|\xi\|^2$ $(x \in H_-,\ \xi \in H)$.

В работе [5] показано, что если L сильно эллиптичен в H_-, то рассматриваемый на множестве $C_0^\infty(H_-, \mathbf{C}) \subset L_2$ этот оператор является эрмитовым в L_2, а его замыкание есть самосопряженный оператор в L_2 с областью определения $\mathscr{D}(L) = W_2^2 \subset L_2$. В дальнейшем это замыкание также обозначается через L.

Лемма. *Пусть L сильно эллиптичен в H_-, $A(x) \in C^1(H_-, \mathscr{L}_+ \cap \mathscr{L}_0)$. Тогда существует такое $K \geqslant 0$, что оператор $L + K\mathscr{I}$ гомеоморфно отображает W_2^2 на все L_2, а $L^* + K\mathscr{I}$ осуществляет гомеоморфизм между W_2^{m+2} и всем $W_2^m (m = -2, -1, 0)$.*

Приведем схему доказательства. Поскольку $L + K\mathscr{I}$ самосопряжен в L_2 и является гомеоморфизмом пространства W_2^2 на L_2, то $L^* + K\mathscr{I}$ гомеоморфно отображает L_2 на W_2^{-2}. Кроме того, $L^* + K\mathscr{I}$ гомеоморфно отображает W_2^2 на L_2. Так как $\{W_2^m,\ m \in \mathbf{Z}\}$ — гильбертова шкала, то из интерполяционной теоремы (см. [8]) вытекает утверждение леммы.

2. Рассмотрим вопрос о самосопряженности оператора

$$\mathscr{L} u(x) = Lu(x) + p(x)u(x),$$

где $p(x)$ — действительная функция на H_-.

Теорема. *Пусть L сильно эллиптичен в H_-, $A(x) \in C^1(H_-, \mathscr{L}_+ \cap \mathscr{L}_0)$, $p(x)$ — μ-измеримая действительная функция на H_-, ограниченная на ограниченных множествах в H_-. Если $\mathscr{L}$ полуограничен снизу на $C_0^\infty(H_-, \mathrm{C}) \subset L_2$, то его замыкание в L_2 есть самосопряженный оператор.*

Доказательство. Пусть $K \geqslant 0$ такое, при котором справедливы утверждения леммы, и $(\mathscr{L}\varphi + K\varphi, \varphi)_0 \geqslant \|\varphi\|_0^2$ $(\varphi \in C_0^\infty(H_-, \mathrm{C}))$. Если $u \in \mathscr{D}(\mathscr{L}^*) \subset L_2$ и $\mathscr{L}^* u + Ku = 0$, то из формулы

$$\mathscr{L}(\rho\varphi) = \rho\mathscr{L}\varphi + \varphi\mathscr{L}\rho - 2(A\rho', \varphi'),$$

справедливой для $\rho, \varphi \in C_0^\infty(H_-, \mathrm{C})$, вытекает равенство

$$(L^* + K\mathscr{I})(\rho u) = u_\rho - uL\rho - p(x)\rho u, \tag{1}$$

где $u_\rho \in W_2^{-1}$ и определяется формулой $(u_\rho, \varphi)_0 = 2((A\rho', \varphi'), u)_0$. В силу леммы отсюда следует, что $\rho_1 u \in W_2^1$ при любом $\rho_1 \in C_0^\infty(H_-, \mathrm{C})$. Из определения функционала u_ρ теперь получаем, что $u_\rho \in L_2$. Вновь используя лемму, из (1) находим, что $\rho u \in W_2^2$ при всех $\rho \in C_0^\infty(H_-, \mathrm{C})$.

Пусть $\rho_n \in C_0^\infty(H_-, \mathrm{R})$ такая, что $\rho_n(x) = 1$ при $\|x\|_- \leqslant n$, $\rho_n(x) = 0$ при $\|x\|_- > 2n$, $\|\rho'\| < cn^{-1}$ и $0 \leqslant \rho_n \leqslant 1$. Тогда для $u_n = \rho_n u \in W_2^2$ из формулы (1) вытекает, что

$$(\mathscr{L} + K\mathscr{I})u_n = (L^* + K\mathscr{I})u_n + p(x)u_n = u_{\rho_n} - uL\rho_n. \tag{2}$$

При помощи равенства $(Lu, v)_0 = ((Au', v'), 1)_0$ $(u, v \in W_2^2)$, доказанного в [9], находим, что

$$(u_{\rho_n}, u_n)_0 = (u_{\rho_n}, \rho_n u_{2n}) = \frac{1}{2}(\rho_n, |u_{2n}|^2_{\rho_n})_0 + (\rho_n L_{\rho_n}, |u_{2n}|^2)_0.$$

Так как $u_n \in W_2^2$ и финитна, то $u_n \in \mathscr{D}(\mathscr{L})$. Умножим (2) на u_n и воспользуемся тем, что $\mathscr{L}$ полуограничен; тогда с учетом последней формулы получим

$$\|u_n\|_0^2 \leqslant (\mathscr{L}u_n + Ku_n, u_n)_0 = ((A\rho_n', \rho_n'), |u_{2n}|^2)_0 \leqslant c_0 n^{-1} \|\dot{u}\chi_{2n}\|_0^2,$$

где χ_{2n} — характеристическая функция множества $\{x \in H_-, \|x\|_- \leqslant 2n\}$. Последняя оценка показывает, что $u = 0$.

Таким образом, ядро оператора $\mathscr{L}^* + K\mathscr{I}$ нульмерно, и, следовательно, область значений $\mathscr{L} + K\mathscr{I}$ плотна в L_2. Так как $\mathscr{L} + K\mathscr{I}$ полуограничен на $C_0^\infty(H_-, \mathrm{C})$, то замыкание $\mathscr{L}$ в L_2 есть самосопряженный оператор.

Дальневосточный государственный университет

Поступило в редакцию 30 января 1979 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Далецкий Ю. Л., ДАН СССР **227**, № 4 (1976), 784—787. **2**. Березанский Ю. М., Михайлюк Т. А., Укр. матем. ж. **29**, № 2 (1977), 157—165. **3**. Simon B., Hoegh-Krohn R., J. funct. analysis **9** (1972), 121—180. **4**. Марченко А. В., Матем. сб. **96** (1975), 276—293. 5. Фролов Н. Н., Матем. заметки, **24**, вып. 2 (1978), 241—248. **6**. Далецкий Ю. Л., УМН **XXII**, вып. **4** (1967), 3—54. **7**. Березанский Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Киев, «Наукова думка», 1965. 8. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., УМН **XXI**, вып. 2 (1966), 89—168. **9**. Фролов Н. Н., Матем. сб. **90** (1973), 403—414.